УДК 519.86

ОБ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ РАВНОВЕСИЙ

В.А.Васильев

Заметка посвящена обобщению известной теоремы Дебре [1] о конечности равновесных цен на случай моделей обмена, учитывающих эффект влияния на предпочтения участников. Помимо развернутого обоснования соответствующих результатов, значительное внимание уделяется уточнению понятия регулярности модели, схематически изложенному в [2], а также ослаблению граничных условий на функции спроса.

Основным инструментом исследования является теорема о плотности трансверсальных сечений [3]. В связи с этим следует подчеркнуть, что рассматриваемый ниже класс моделей представляет весьма специфическое подмножество стандартного пространства моделей обмена, заданных в форме функций спроса. Характерной чертой элементов этого подмножества является известная "вырожденность", что и требует использования более развитого аппарата, нежели в [1].

1. Прообразом рассматриваемых в работе моделей являются так называемые обобщенные модели обмена [4,5]. Более высокая степень общности этих моделей по сравнению со стандартными состоит в учете внешних влияний на предпочтения участников. Известно (см., например, [4,6]), что классические вальрасовские равновесия в такой ситуации, как правило, не оптимальны по Парето. Исследуемые ниже информационные равновесия, являясь аналогом вальрасовских, избавлены от указанного недостатка [5]. Более того, они сохраняют многие полезные качества вальрасовских равновесий стандартных моделей обмена (моделей

без внешних влияний): возможность внутренней характеризации в терминах блокирования [5], достаточную простоту и естественность условий существования [7] и т.д. К числу упомянутых достоинств относится и устанавливаемая ниже конечность информационных равновесий в регулярных обобщенных моделях обмена.

Для полноты изложения приведем базовое определение рассматриваемых моделей, включающее задание функций полезности (целевых функций) каждого из участников.

Обобщенной моделью обмена называется система

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, u_i, w^i\}_N \rangle ,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество участников, $X_i \subseteq \mathbb{R}^l$, $w^i \in \mathbb{R}^l$ – потребительские множества и начальные запасы участника $i \in N$, а $u_i : \prod_{k \in N} X_k \to \mathbb{R}$ – его функция полезности.

Несколько модифицируя соответствующее определение из [5], информационным равновесием обобщенной модели обмена $\mathcal{E}$ будем называть пару $(\bar{p}, \bar{x})$, где $\bar{p} = (\bar{p}^i)_N$ – вектор из $(\mathbb{R}^{ln}_+)^N$ такой, что для некоторого $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}^l_+$ справедливы равенства:

$$\sum_{i \in N} \bar{p}^{ik} = \bar{p}_0 , \quad k \in N \text{ *)}, \qquad (I.I)$$

а $\bar{x} \in \prod_N X_i$ удовлетворяет условиям

$$\sum_N \bar{x}^i = \sum_N w^i , \qquad (I.2)$$

$$u_i(\bar{x}) = \max \{ u_i(x) / x \in B_i(\bar{p}) \}, \ i \in N, \qquad (I.3)$$

где $B_i(\bar{p})$ – бюджетное множество участника i при ценах $\bar{p}$:

$$B_i(\bar{p}) = \{ x \in \prod_N X_i \mid \bar{p}^i \cdot x \leq \bar{p}_0 \cdot w \} \text{ **)} .$$

В случае, когда X_i выпуклы, а функции полезности строго квазивогнуты ($u_i(\lambda x + (1-\lambda)x') > \min\{u_i(x), u_i(x')\}$ при $x \neq x'$), элементы $f^i(\bar{p}^i, \bar{p}_0 \cdot w^i)$, доставляющие максимум функциям u_i на бюджетных множествах $B_i(\bar{p})$, определяют-

---

*) Здесь и далее $p^{ik} = (p_1^{ik}, \dots, p_l^{ik})$ – k-я компонента вектора $p^i = (p^{i1}, p^{i2}, \dots, p^{in}) \in (\mathbb{R}^l)^N$.

**) $p \cdot z$ – скалярное произведение векторов p и z.

ся однозначно. В этой ситуации равновесность пары $(\bar{p}, \bar{x})$ эквивалентна выполнению соотношений (I.I), (I.2) и следующих равенств:

$$f^i(\bar{p}^i, \bar{p}_\cdot \cdot w^i) = \bar{x} \quad , \quad i \in N.$$

Таким образом, в условиях однозначности отображений спроса ($\operatorname{Argmax}_{x \in B_i(p)} u_i(x) = \{ f^i(p^i, p_\cdot \cdot w^i) \}$) все данные, необходимые для описания оптимальной реакции потребителей на изменения цен (и достаточные для задания информационного равновесия), определяются функциями спроса $(p^i, w) \mapsto f^i(p^i, w)$ $(w \in \mathbb{R}_+)$. Известно [8], что некоторые дополнительные требования гладкости и регулярности функций u_i обеспечивают и надлежащую гладкость функций f^i. В дальнейшем ограничиваемся изучением обобщенных моделей обмена, имеющих однозначные и непрерывно дифференцируемые функции спроса. Поэтому, по аналогии со стандартными моделями, введем самостоятельное определение обобщенной модели обмена в форме функций f^i. При этом будем рассматривать лишь строго положительные векторы цен p^i, нормированные некоторым естественным образом.

Именно, для фиксированных n и ℓ через P обозначим внутренность $(\mathbb{R}^\ell_+)^N$ и положим

$$\mathcal{P} = \{ (p^1_1, \dots, p^1_\ell, \dots, p^n_1, \dots, p^n_\ell) \in P \mid \sum_{s=1}^{\ell} p^k_s < 1 \, , \, k \in N \}.$$

Далее, обозначим через L положительную вещественную полуось ($L = (0, \infty)$) и будем говорить, что функция $f: \mathcal{P} \times L \to \bar{P}$ является функцией спроса, если для нее выполняется тождество

$$p \cdot f(p, w) = w \quad (p \in \mathcal{P}, \; w \in L). \qquad (I.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Обобщенной моделью обмена, заданной в форме функций спроса (о.м.о.), будем называть систему

$$\mathcal{E} = \langle N, \{ f^i, w^i \}_N \rangle, \qquad (I.4)$$

где, как и ранее, $N = \{1, \dots, n\}$ – множество участников, $w^i \in \operatorname{int} \mathbb{R}^\ell_+$ – их начальные запасы, а f^i – функции спроса (т.е. функции, действующие из $\mathcal{P} \times L$ в $(\mathbb{R}^\ell_+)^N$ и удовлетворяющие тождеству (I.3)).

Положим

$$S_1 = \{ p_0 \in int\, \mathbb{R}^\ell_+ \mid \sum_{s=1}^{\ell} p_{0s} = 1 \}$$

и через Q обозначим множество нормированных наборов индивидуальных цен, удовлетворяющих условию (I.I):

$$Q = \{ (p^i)_N \in \mathcal{P}^N \mid \exists p_0 \in S_1 [\sum_{i \in N} p^{ik} = p_0 , \ k \in N] \}. \quad (I.5)$$

Переформулируем применительно к рассматриваемой ситуации определение информационного равновесия о.м.о. $\mathcal{E} = \langle N, \{f^i, w^i\}_N \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Информационным равновесием о.м.о. $\mathcal{E}$ называется пара $(\bar{p}, \bar{x}) \in Q \times X(w)$, удовлетворяющая условию

$$f^i(\bar{p}^i, \bar{p}_0 \cdot w^i) = \bar{x} , \quad i \in N , \qquad (I.6)$$

где

$$w = (w^1, \ldots, w^n) ,$$

$$X(w) = \{ x = (x^i)_N \in \bar{P} \mid \sum_N x^i = \sum_N w^i \} .$$

Далее предполагается, что функции спроса f^i – фиксированные непрерывные дифференцируемые отображения, и, следовательно, отдельные представители рассматриваемого класса о.м.о. отличаются лишь начальными запасами. Интересующий нас вопрос состоит в выяснении свойств f^i ($i \in N$), гарантирующих конечность множества информационных равновесий обобщенных моделей $\mathcal{E}_w$ для всех $w = (w^1, \ldots, w^n)$ из некоторого открытого подмножества P полной лебеговской меры.

Обозначим через $I(w)$ множество всех равновесных цен о.м.о. $\mathcal{E}_w = \langle N, \{f^i, w^i\}_N \rangle$, представляющее из себя проекцию на Q множества всех информационных равновесий $\mathcal{E}_w$. Ясно, что для решения сформулированной задачи достаточно найти условия, обеспечивающие конечнозначность соответствия

$$w \mapsto I(w) \quad , \ w \in P$$

для почти всех $w \in P$. При этом конечность множества $I(w)$ должна быть устойчива относительно малых колебаний w.

Одно из таких условий вполне аналогично суммарной ненасыщаемости для стандартных моделей обмена [9] и имеет вид следующего граничного условия на функции спроса f^i.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Если последовательность $(p_{(k)}, w_{(k)})$ из $Q \times L^n$ сходится к некоторой точке $(p_{(0)}, w_{(0)})$ из $\partial Q \times L^n$, то

$$\lim_k \|\sum_{i \in N} f^{ik}(p^i_{(k)}, w^i_{(k)})\| = \infty . \qquad (I.7)$$

Здесь, как обычно, через ∂Q обозначается граница $Q \subset (\mathbb{R}^{\ell n})^N_+$ а через f^{ik} – k-я составляющая вектора $f^i = (f^{i1}, \dots, f^{in})$ *).

Второе условие состоит в некоторой невырожденности семейства $\{f^i\}_N$. Его формулировка потребует дополнительных построений (состоящих, по существу, в конструировании некоторого элементарного атласа для многообразия Q). Для каждых $p = (p^1, \dots, p^n) \in (\mathbb{R}^\ell)^N$ и $x \in \mathbb{R}^\ell$ через $p^{(i)} \in (\mathbb{R}^\ell)^{N \setminus \{i\}}$ и $\hat{x} \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ будем обозначать проекции p на $(\mathbb{R}^\ell)^{N\setminus\{i\}}$ и x на $\mathbb{R}^{\ell-1}$ соответственно:

$$p^{(i)} = (p^1, \dots, p^{i-1}, p^{i+1}, \dots, p^n),$$

$$\hat{x} = (x_1, \dots, x_{\ell-1}).$$

Положим

$$\mathcal{P}_i = \{ p^{(i)} \mid p \in \mathcal{P} \}, \quad i \in N,$$

$$\hat{S}_1 = \{ \hat{p}_0 \mid p_0 \in S_1 \}$$

и через $\hat{Q}$ обозначим множество всех векторов $(q_1, \dots, q_n, q_0) \in \prod_{i \in N} \mathcal{P}_i \times \hat{S}_1$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} q^{ji} \ll \tilde{q}_0 , \quad i \in N ,$$

---

*) Напомним еще раз, что в соответствии с принятыми обозначениями пространства $\mathbb{R}^{\ell n}$ и $(\mathbb{R}^\ell)^N$ отождествляются, а векторы $x \in \mathbb{R}^{\ell n}$ записываются в форме $x = (x^1, \dots, x^n)$, где $x^i = (x^i_1, \dots, x^i_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$.

где для каждого $q_0 = (q_{01}, \ldots, q_{0\ell-1}) \in \hat{S}_i$ через $\tilde{q}_0 \in \mathbb{R}^\ell$ обозначается вектор $(q_{01}, \ldots, q_{0\ell-1}, 1 - \sum_{s=1}^{\ell-1} q_{0s})$. Что касается символической записи $x \ll y$ ($x, y \in \mathbb{R}^m$), то она, как обычно, означает строгое покомпонентное неравенство: $x_i < y_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Обозначим через ζ_i оператор, действующий из $\hat{Q}$ в $\mathcal{P}_i$ и определяемый по формуле

$$\zeta_i^k(q^1, \ldots, q^n, q_0) = \begin{cases} q^{ik} & , k \in N \setminus \{i\}, \\ \tilde{q}_0 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q^{ji} & , k = i. \end{cases}$$

Другими словами, оператор ζ_i продолжает вектор $q^i = (q^{i1}, \ldots, q^{ii-1}, q^{ii+1}, \ldots, q^{in})$ до вектора $\zeta_i(q^1, \ldots, q^n, q_0)$ из $\mathcal{P}_i$, пополняя его i-й составляющей, равной $\tilde{q}_0 - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q^{ji}$.

Введем в рассмотрение функции $g^i : P \times \hat{Q} \to \overline{P}$, определяемые равенствами

$$g^i(w, q^1, \ldots, q^n, q_0) = f^i(\zeta_i(q^1, \ldots, q^n, q_0), \tilde{q}_0 \cdot w^i),$$

и через $D = D(w, q, q_0)$ обозначим матрицы частных производных функций g^i по переменным q_s^{jk} ($j \neq k$, $j,k = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, \ell$) в точке $(w, q, q_0) = (w^1, \ldots, w^n, q^1, \ldots, q^n, q_0) \in P \times \hat{Q}$.

Отметим сразу же, что среди столбцов матрицы D_i (являющейся, по определению, частным дифференциалом $D_q g^i$ функции g^i в точке (w, q, q_0)) содержится не более чем $2(n-1)\ell$ ненулевых, причем количество различных среди них не превышает $n \cdot \ell$.

Упоминавшееся условие невырожденности состоит в следующем.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для любого ненулевого $\lambda \in \prod_{i \in N} (\mathbb{R}^\ell)^{N \setminus \{i\}}$ среди векторов $\{D_i \lambda\}_{i=1}^n$ имеются несовпадающие.

Как будет видно из доказательства формулируемой ниже теоремы I, предположение 2 можно существенно ослабить, требуя несовпадения векторов $\{D_i \lambda\}_{i=1}^n$ лишь в точках, отвечающих равновесным состояниям. Далее, каждый столбец матрицы D_i с точностью до знака совпадает с соответствующим столбцом частных производных $\partial f_r^{ik} / \partial p_s^{jm}$ ($k = 1, \ldots, n$, $r = 1, \ldots, \ell$)

вектор-функции f^i. Поэтому нужное условие невырожденности можно записать в локальной форме, причем непосредственно в терминах частных дифференциалов функции f^i. Однако получающаяся формулировка более громоздка, в то время как используемый вариант дает достаточное представление о характере требований к функциям f^i.

Отождествляя рассматриваемые о.м.о. $\mathcal{E}_w = \langle N, \{f^i, w^i\}_N \rangle$ с параметризующими их распределениями запасов $w = (w^1, \ldots, w^n) \in P$, сформулируем теорему о конечности информационных равновесий.

ТЕОРЕМА I. *Если для функций спроса $f^1, \ldots, f^n$ выполняются условия предположений I, 2, то почти все обобщенные модели обмена $\mathcal{E}_w = \langle N, \{f^i, w^i\}_N \rangle$ ($w \in P$) имеют конечное число информационных равновесий, причем для некоторого открытого подмножества полной меры $P_1 \subseteq P$ это свойство устойчиво относительно малых колебаний w.*

Не останавливаясь на других аналогиях, отметим, что так же как и для стандартных моделей, можно показать, что на самом деле для упомянутого в теореме открытого подмножества полной меры число элементов $I(w)$ не только конечно, но и локально-постоянно.

2. Приступая к доказательству теоремы I, сформулируем нужный вариант теоремы о плотности трансверсальных сечений (см., например, [3], а также [9]).

Напомним необходимые понятия и обозначения. Пусть $\mathcal{X}$ - произвольное дифференцируемое многообразие*). Как обычно, через $T_x \mathcal{X}$ будем обозначать касательное пространство (пространство касательных векторов) многообразия $\mathcal{X}$ в точке $x \in \mathcal{X}$. Далее, для дифференцируемых многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и дифференцируемого отображения $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ через $T_x f$ будем обозначать дифференциал f в точке $x \in \mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ - дифференцируемые много-

---

*) Всюду далее имеется в виду дифференцируемость класса C^1.

образия, $\tilde{\mathcal{Y}}$ – дифференцируемое подмногообразие $\mathcal{Y}$, а f – дифференцируемое отображение из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Говорят, что f трансверсально к $\tilde{\mathcal{Y}}$ (символически: $f \pitchfork \tilde{\mathcal{Y}}$), если для любой точки $x \in f^{-1}(\tilde{\mathcal{Y}})$ выполняется равенство

$$T_x f(T_x \mathcal{X}) + T_{f(x)} \tilde{\mathcal{Y}} = T_{f(x)} \mathcal{Y} .$$

Другими словами, отображение f транверсально к $\tilde{\mathcal{Y}}$, если для любой точки $x \in f^{-1}(\tilde{\mathcal{Y}})$ касательное пространство $\mathcal{Y}$ в точке $f(x)$ порождается своими подпространствами $T_{f(x)}\tilde{\mathcal{Y}}$ и $T_x f(T_x \mathcal{X})$.

Как вытекает из определения 3, в случае, когда $\tilde{\mathcal{Y}} = \{y\}$ (подмногообразие $\tilde{\mathcal{Y}}$ представляет из себя точку), касательное пространство $\tilde{\mathcal{Y}}$ состоит из единственного нулевого вектора и, следовательно, $f \pitchfork \{y\}$ тогда и только тогда, когда линейные операторы $T_x f$ имеют максимальный возможный ранг для всех точек $x \in f^{-1}(y)$. Таким образом, трансверсальность f к одноточечному подмногообразию $\{y\}$ эквивалентна тому, что y является регулярным значением f.

Пусть $A, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – произвольные дифференцируемые многообразия конечной размерности, f – некоторое дифференцируемое отображение из $A \times \mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Через f_α $(\alpha \in A)$ будем обозначать сечение $f(\alpha, \cdot)$ отображения f ($f_\alpha(x) = f(\alpha, x)$, $x \in \mathcal{X}$), а через A_y – совокупность всех сечений f, трансверсальных к точке $y \in \mathcal{Y}$:

$$A_y = \{\alpha \in A \mid f_\alpha \pitchfork \{y\}\} .$$

Наконец, напомним, что подмножество B k-мерного дифференцируемого многообразия A имеет (по определению) нулевую меру, если мера Лебега множества $h(\mathcal{U} \cap B) \subseteq \mathbb{R}^k$ равна нулю для любой локальной системы координат $(h, \mathcal{U})$ многообразия A.

Во введенных обозначениях справедлива следующая параметрическая теорема о плотности трансверсальных сечений.

ТЕОРЕМА 2 [3,9]. Если размерности дифференцируемых многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ совпадают, а отображение $f: A \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ трансверсально к $y \in \mathcal{Y}$, то множество $A \setminus A_y$ имеет нулевую меру.

Таким образом, в условиях теоремы 2 множество всех трансверсальных сечений f_α всюду плотно (в том смысле, что A_y всюду плотно в A). Отметим еще, что в случае, когда $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – открытые подмножества некоторого конечномерного пространства $\mathbb{R}^m$, а y – нулевой вектор из $\mathbb{R}^m$, теорема 2 дает достаточные условия плотности множества параметров $\alpha \in A$, для которых все особенности сечений f_α невырожденны.

Перейдем к доказательству основного результата этой работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Если отвлечься от специфики рассматриваемых моделей и соответствующих им вспомогательных конструкций, то схема доказательства теоремы I совпадает с предложенной в [I] для стандартной ситуации без внешних влияний (см.также [9]). Сначала убедимся в том, что в условиях теоремы 2 почти для всех $w \in P$ множества $I(w)$ дискретны. Затем, установив замкнутость многозначного отображения $w \mapsto I(w)$, покажем, что множества $I(w)$ компактны (и, следовательно, конечны, если они дискретны).

Проверка дискретности состоит в применении теоремы 2 к некоторому специальному отображению φ, ассоциируемому с рассматриваемым пространством моделей $\mathcal{E}_w$ ($w \in P$). Для построения этого отображения положим $\mathcal{D} = \{(i,j) \in N \mid i \neq j\}$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cup \{0\}$ и через E обозначим векторное пространство $\prod_{d \in \mathcal{D}_0} E^d$, где $E^0 = \mathbb{R}^{\ell-1}$, а $E^d = \mathbb{R}^\ell$ для всех $d \in \mathcal{D}$. Введем в рассмотрение линейные операторы $\hat{\gamma}_i$: $(\mathbb{R}^\ell)^N \to E$, представляющие "усечение" операторов γ_i из [5] и действующие по формулам:

$$\hat{\gamma}_i^d(x^1,\ldots,x^n) = \begin{cases} \hat{x}^i, & d = 0, \\ -\hat{x}^i, & d = (k,i), \\ x^k, & d = (i,k), \\ 0, & d = (k,s),\, k \neq i,\, s \neq i, \end{cases}$$

где, как и ранее, $\hat{y} = (y_1, \dots, y_{\ell-1})$ для любого $y = (y_1, \dots, y_{\ell-1}, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$. Нужное нам отображение $\varphi : P \times \hat{Q} \to E$ определяется следующим образом:

$$\varphi(w, q, q_0) = \sum_N \hat{\gamma}_i(g^i(w, q, q_0)) - \sum_N \hat{w}^i_\Delta, \quad (2.1)$$

где векторы $\hat{w}^i_\Delta \in E$ имеют вид:

$$(\hat{w}^i_\Delta)^d = \begin{cases} \hat{w}^i, & d = 0, \\ 0, & d \in \mathcal{D}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Сечения φ по параметру w будем обозначать через φ_w ($\varphi_w(q, q_0) = \varphi(w, q, q_0)$). Нетрудно проверить, что точка $(q, q_0) \in \hat{Q}$ является нулем отображения φ_w тогда и только тогда, когда вектор $(\zeta_1(q, q_0), \dots, \zeta_n(q, q_0))$ принадлежит $I(w)$. Достаточно заметить, что по построению операторов $\hat{\gamma}_i$ условие $\varphi_w(q, q_0) = 0$ эквивалентно равенствам

$$f^1(\zeta_1(q, q_0), \tilde{q}_0 \cdot w^1) = \dots = f^n(\zeta_n(q, q_0), \tilde{q}_0 \cdot w^n), \quad (2.3)$$

$$\sum_N \hat{f}^{ii}(\zeta_i(q, q_0), \tilde{q}_0 \cdot w^i) = \sum_N \hat{w}^i. \quad (2.4)$$

Что же касается недостающего до материального баланса совпадения суммарного спроса и предложения ℓ-го продукта, то при выполнении соотношений (2.3) и (2.4) оно вытекает из закона Вальраса (тождества (1.3)). Действительно, если положить $p^i = \zeta_i(q, q_0)$, а через $\hat{p} \in \prod_{\mathcal{D}_0} E^d$ обозначить вектор с компонентами

$$\hat{p}^d = \begin{cases} q_0, & d = 0, \\ q^{ik}, & d = (i, k), \end{cases}$$

то непосредственно из определения отображений ζ_i имеем

$$\hat{p} \cdot \varphi_w(q, q_0) + \tilde{q}_{0\ell} \cdot \Big[\sum_{i \in N} w^i_\ell - \sum_{i \in N} f^{ii}_\ell(p^i, \tilde{q}_0 \cdot w^i)\Big] =$$

$$= \sum_{i \in N} p^i \cdot f^i(p^i, \tilde{q}_0 \cdot w^i) - \tilde{q}_0 \cdot \sum_{i \in N} w^i.$$

Поэтому при $\varphi_w(q,q_0)=0$ тождества (2.3) дают требуемое равенство

$$\sum_{i\in N} f_\ell^{ii}(\zeta_i(q,q_0),\ \tilde q_0\cdot w^i)=\sum_{i\in N} w_\ell^i .$$

Итак, для всех $w\in P$ множества $\varphi_w^{-1}(0)$ и $I(w)$ равномощны. Далее, ясно, что отображение $\zeta:(q,q_0)\mapsto$ $\mapsto(\zeta_i(q,q_0))_{i=1}^n$ осуществляет диффеоморфизм многообразий $\hat{Q}$ и Q. Поэтому для проверки дискретности $I(w)$ для почти всех $w\in P$ достаточно убедиться, что отображение $\varphi: P\times\hat{Q}\to E$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2 относительно тривиального подмногообразия $0\in E$.

С этой целью отметим, что размерности многообразий $\hat{Q}$ и E совпадают и равны $c=\ell(n^2-n+1)-1$. Действительно, непосредственно из построения $\hat{Q}$ и E вытекают равенства: $\dim\hat{Q}=n^2\ell-n\ell+1-1$, $\dim E=n(n-1)\ell+\ell-1$. Поскольку в условиях теоремы 1 отображение φ непрерывно дифференцируемо, остается показать, что φ трансверсально к 0. Как уже отмечалось, последнее свойство равносильно тому, что ранг дифференциала $D\varphi$ во всех точках множества $\varphi^{-1}(0)$ равен c. Поэтому для наших целей достаточно установить, что в условиях предположения 2 строки матрицы Якоби отображения $\varphi=(\varphi_1^0,\dots,\varphi_{\ell-1}^0,\varphi_1^{11},\dots,\varphi_t^{ik},\dots,\varphi_\ell^{nn})$ линейно-независимы. Допуская противное, возьмем произвольный вектор $\mu=(\mu_1^0,\dots,\mu_{\ell-1}^0,\mu_1^{11},\dots,\mu_t^{ik},\dots,\mu_\ell^{nn})\in\mathbb{R}^{\ell-1}\times(\mathbb{R}^\ell)^{D}$ такой, что линейная комбинация строк упомянутой матрицы с коэффициентами, определяемыми μ, равна нулю. В частности, должны выполняться соотношения

$$\sum_{t=1}^{\ell-1}\mu_t^0\frac{\partial\varphi_t^0}{\partial w_s^j}+\sum_{(i,k)\in D}\sum_{t=1}^{\ell}\mu_t^{ik}\frac{\partial\varphi_t^{ik}}{\partial w_s^j}=0 \qquad (2.5)$$

для всех $j=1,\dots,n,\ s=1,\dots,\ell$. Из определения вектор-функции φ вытекает, что для ее частных производных по w_s^j справедливы формулы:

$$\frac{\partial \varphi_\tau^{\circ}}{\partial w_s^j} = \begin{cases} \frac{\partial f_\tau^{jj}}{\partial w_j} q_{os} - 1, & \tau = s, \\ \frac{\partial f_\tau^{jj}}{\partial w_j} q_{os}, & \tau \neq s, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \varphi_\tau^{ik}}{\partial w_s^j} = \begin{cases} \frac{\partial f_\tau^{jk}}{\partial w_j} q_{os}, & i = j, \\ -\frac{\partial f_\tau^{jj}}{\partial w_j} q_{os}, & k = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{2.7}$$

где, как и ранее, $q_{o\ell} = 1 - \sum_{s=1}^{\ell-1} q_{os}$, $w_j = \tilde{q}_o \cdot w^j$, а $\partial f_\tau^{jk}/\partial w_j$ – частная производная функции $f_\tau^{jk}(\rho^i, w)$ по w в точке $(\xi^i(q), w_j)$. На основании формул (2.6) и (2.7) из соотношений вытекают равенства:

$$q_{os} \cdot a_j(\mu) = \mu_s^{\circ}, \quad s = 1, \ldots, \ell-1,$$

$$q_{o\ell} \cdot a_j(\mu) = 0,$$

где

$$a_j(\mu) = \sum_{\tau=1}^{\ell-1} \left(\mu_\tau^{\circ} - \sum_{k \in N \setminus \{j\}} \mu_\tau^{kj}\right) \cdot \frac{\partial f_\tau^{jj}}{\partial w_j} + \sum_{k \in N \setminus \{j\}} \mu_\tau^{jk} \frac{\partial f_\tau^{jk}}{\partial w_j}.$$

Отсюда, ввиду $q_{o\ell} > 0$, имеем: $\mu_s^{\circ} = 0$ для всех $s = 1, \ldots, \ell-1$.

Далее обозначим через $\gamma_{io} : (\mathbb{R}^\ell)^N \longrightarrow \prod_{d \in \mathcal{D}} E^d$ линейный оператор, получающийся из $\hat{\gamma}_i$ удалением компонент, отвечающих пространству E°:

$$\gamma_{io}^{d}(x^1,\dots,x^n)=\begin{cases}-x^i\ , & d=(k,i)\,,\\ x^k\ , & d=(i,k)\,,\\ 0 & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

и рассмотрим функцию $\psi=\sum_N \gamma_{io}(g^i)$. Как видно из предыдущего, для доказательства искомого равенства $\mu=0$ остается убедиться в том, что ранг частного дифференциала $D_q\psi$ равен $c-\ell+1=n(n-1)\ell$. Обозначим через d_s^{jm}, d_s^{ijm} столбцы частных производных функций ψ и $\psi^i=\gamma_{io}(g^i)$ по переменной q_s^{jm}. Учитывая равенство $\psi=\sum_N \psi^i$ и линейность операторов γ_{io}, имеем

$$d_s^{jm}=\sum_{i\in N} d_s^{ijm}\ , \tag{2.8}$$

$$d_s^{ijm}=\gamma_{io}\left(\frac{\partial g^i}{\partial q_s^{jm}}\right)\ ,\quad i=1,\dots,n\,. \tag{2.9}$$

Допустим, что существует ненулевой вектор $\lambda=(\lambda_s^{jm})\in(\mathbb{R}^\ell)^{\mathfrak{D}}$, для которого выполняется равенство $\sum\lambda_s^{jm}\cdot d_s^{jm}=0$. Отсюда, на основании (2.8), получаем

$$\sum_{i\in N}\left(\sum\lambda_s^{jm}\,d_s^{ijm}\right)=0\ .$$

Привлекая еще раз линейность операторов γ_{io} и формулы (2.9), перепишем последнее равенство в нужной для нас форме

$$\sum_{i\in N}\gamma_{io}\left(\sum\lambda_s^{jm}\,\frac{\partial g^i}{\partial q_s^{jm}}\right)=0\ . \tag{2.10}$$

Но, в силу определения операторов γ_{io}, равенство (2.10) означает, что все векторы $D_i\lambda$ ($i=1,\dots,n$) равны между собой. А это противоречит предположению 2, в соответствии с которым для любого $\lambda\neq0$ среди векторов $D_i\lambda$ имеются несовпадающие.

Итак, ранг $D_q\psi$ равен $n(n-1)\ell$, что и завершает доказательство равенства $\mu=0$, а вместе с ним и проверку того, что φ удовлетворяет условиям теоремы 2. На основании этой теоремы для почти всех $w \in P$ нулевой вектор является регулярным значением отображения $\varphi_w : \hat{Q} \to E$. Рассмотрим произвольный элемент w, для которого все особенности отображения φ_w невырожденны. Поскольку $\dim \hat{Q} = \dim E$, размерность дифференцируемого подмногообразия $\varphi_w^{-1}(0) \subseteq \hat{Q}$ равна нулю (см., например, [10]). Поэтому оно дискретно и, следовательно, каждый элемент $(q, q_0) \in \varphi_w^{-1}(0)$ имеет окрестность в $\hat{Q}$, не содержащую точек множества $\varphi_w^{-1}(0) \setminus \{(q, q_0)\}$. Таким образом, для доказательства конечности множества $\varphi_w^{-1}(0)$ остается убедиться в его компактности. В силу изоморфизма многообразий Q и $\hat{Q}$, для проверки этой компактности достаточно **установить замкнутость многозначного** отображения $I : w \to I(w)$, действующего из P во множество подмножеств $(\mathbb{R}^{\ell n})^N$.

Рассмотрим произвольную сходящуюся в P последовательность $\{w_{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ и некоторую сходящуюся в $\bar{Q} = cl\, Q$ последовательность $\{p_{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Q$, удовлетворяющую условию

$$p_{(m)} \in I(w_{(m)})$$

для всех $m = 1, \ldots$. Покажем, что $\lim p_{(m)} \in I(w)$, где $w = \lim w_{(m)}$. Ясно, что точка $p = \lim p_{(m)}$ принадлежит замыканию Q в $(\mathbb{R}^{\ell n})^N$. Допуская, что p лежит на границе Q ($p \in \partial Q$), имеем, ввиду строгой положительности вектора w:

$$\lim \left(p_{(m)}, p_0^{(m)} \cdot w_{(m)}^1, \ldots, p_0^{(m)} \cdot w_{(m)}^n\right) \in \partial Q \times L^n .$$

Здесь $p_0^{(m)}$ – вектор из S_1, отвечающий набору $p_{(m)} = (p_{(m)}^i)_N$:

$$p_0^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} p_{(m)}^{ik} \qquad (k \in N) .$$

В силу предположения I имеем

$$\lim \Big\| \sum_{i,k \in N} f^{ik}\left(p_{(m)}^i, p_0^{(m)} \cdot w_{(m)}^i\right) \Big\| = \infty . \qquad (2.11)$$

С другой стороны, ввиду равновесности $p_{(m)}$, справедливы равенства

$$\sum_{i,k\in N} f^{ik}(p^i_{(m)}, p^{(m)}_o \cdot w^i_{(m)}) = \sum_{i\in N} w^i_{(m)}, \quad m=1,\ldots \quad (2.12)$$

Но, по условию, $\lim \sum_{i\in N} w^i_{(m)} = n \sum_{i\in N} w^i$, что противоречит (2.II).

Таким образом, точка p принадлежит Q. Отсюда, осуществляя предельный переход в (2.I2) и в соотношениях

$$f^1(p^1_{(m)}, p^{(m)}_o \cdot w^1_{(m)}) = \ldots = f^n(p^n_{(m)}, p^{(m)}_o \cdot w^n_{(m)}), \quad m=1,\ldots,$$

получаем требуемое включение: $p \in I(w)$.

Для завершения доказательства теоремы I остается заметить, что в ее условиях множество трансверсальных сечений $A_0 = \{w \in P \mid \varphi_w \pitchfork \{0\}\}$ открыто. Последнее вытекает из того, что матрица $D_{(q,q_0)}\varphi_w$ непрерывно зависит от переменных (w, q, q_0), а многозначное отображение $I: w \longmapsto I(w)$ полунепрерывно сверху во множестве параметров P. Действительно, в силу указанных причин для достаточно малой окрестности U_w точки $w \in A_0$ ранг матрицы $D_{(q,q_0)}\varphi_{w'}$ остается максимальным во всех точках $(q, q_0) \in \varphi^{-1}_{w'}(0)$ $(w' \in U_w)$.

По аналогии с обычными моделями обмена будем говорить, что о.м.о. $\mathcal{E}_w$ регулярна, если все особенности отображения φ_w невырожденны. Как и в стандартной ситуации [I,9], доказательство теоремы I, по существу, исчерпывается проверкой того, что множество регулярных о.м.о. $\mathcal{E}_w$ открыто и имеет нулевое (по мере Лебега) дополнение в P. Специфику составляют, в основном, два обстоятельства. Во-первых, в отличие от аналогичного пространства классических моделей обмена [I], размерность многообразия цен в нашем случае превышает (причем значительно) размерность параметризующего множества P. Этим и объясняется необходимость дополнительных требований невырожденности (типа предположения 2), накладываемых на функции f^i. Во-вторых, аналог условия индивидуальной ненасыщаемости [I] уже не обеспечивает компактности множеств $I(w)$. Поэтому требуется специальное условие суммарной ненасыщаемости (предположение I).

В заключение отметим, что помимо использовавшихся операторов γ_{io}, для исследования обобщенных моделей и их аналогов представляют интерес и другие вспомогательные отображения. В качестве примера приведем линейные операторы Γ_i, действующие из некоторого $\mathbb{R}^m$ в $(\mathbb{R}^m)^N$ по формуле:

$$\Gamma_i^k(x) = \begin{cases} x, & k = i, \\ \frac{x}{1-n}, & k \neq i, \end{cases} \qquad k \in N = \{1, \ldots, n\}.$$

Как и для операторов γ_{io} $(m = n\ell)$, условие совпадения векторов $a^1, \ldots, a^n \in R^m$ с помощью операторов Γ_i может быть записано в аддитивной форме:

$$a^1 = \ldots = a^n \Longleftrightarrow \sum_{i \in N} \Gamma_i(a^i) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Debreu G. Economies with a finite set of equilibria // Econometrica. - 1970. - V. 38. - P.387-392.
2. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. Равновесие, рационирование и устойчивость // Оптимизация.- 1986. - Вып. 38(55). - С.5-120.
3. Abraham R., Robbin J. Transversal mappings and flows. - N.Y.: Benjamin, 1967.
4. Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Современные проблемы математики. - Т.19. - М., 1982. - С.23-58.
5. Макаров В.Л., Васильев В.А. Информационное равновесие и ядро в обобщенных моделях обмена // Докл. АН СССР. - 1984.- Т.275, № 3. - С.549-553.
6. Маракулин В.М. Неэффективность равновесия в гладких экономиках с функциями полезности общего вида // Оптимизация. - 1981. - Вып. 27(44). - С.44-64.
7. Васильев В.А. Существования информационного равновесия в экономике чистого обмена // Оптимизация. - 1983. - Вып. 33(50). - С.79-94.

8. Katzner D.W. A note on the differentiability of consumer demand function // Econometrica. - 1968.- V.36.- P.415-418.
9. Diercer E. Topological methods in Walrasian economies // Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. - Vol. 92. - Berlin: Springer, 1974.
10. Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979.

Поступила в ред.-изд. отдел
19.02.1986 г.