Выпуск 40(57) ОПТИМИЗАЦИЯ 1987 г.

УДК 519.83

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ СИТУАЦИЙ РАВНОВЕСИЯ В ПОЛИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Л.М.Брэгман, И.Н.Фокин

В работе рассматриваются некоторые теоретико-игровые задачи, которые сводятся к задачам линейного программирования очень больших размеров: как число ограничений, так и число переменных экспоненциально зависит от параметров задач. Однако ранг матрицы ограничений этих задач оказывается существенно меньше их размеров. Благодаря этому удается построить методы их решения. Один из подходов, основанный на идее переменного базиса, рассматривался в [1,2]. Здесь рассматриваем другой подход, основанный на генерировании столбцов в симплекс-методе (см.[3]). При этом получается алгоритм типа симплекс-метода, в котором для определения вводимого в базис столбца нужно решать некоторую экстремальную задачу. Эта задача может быть задачей линейного программирования, которая в свою очередь решается методом генерирования столбцов. Для практического решения рассматриваемых задач можно применять программные системы, допускающие генерирование столбцов в симплекс-методе, в частности пакет программ ЛП ЛГУ [4].

Рассмотрим бескоалиционную игру n лиц (множество участников $1:n$ будем обозначать через N), в которой каждая пара участников играет друг с другом в матричную игру (для игроков i и j эта игра с $m_{ij} \times m_{ji}$ -матрицей выигрышей H_{ij} , при этом $H_{ji} = -H_{ij}^{T}$), а общий выигрыш каждого игрока является суммой его выигрышей во всех играх, в которых он участвует. Эту игру будем называть полиматричной. Чистая стратегия z_i

игрока i представляет собой вектор $r_i = (r_i[1], \ldots, r_i[i-1], r_i[i+1], \ldots, r_i[n])$, в котором компонента $r_i[j]$ ($j \neq i$) есть номер строки в матрице H_{ij}, которую выбирает игрок i, применяя стратегию r_i. Предположим, что для всех игроков заданы множества R_i допустимых чистых стратегий, т.е. допустимыми являются, вообще говоря, не все возможные комбинации выборов стратегий игроком во всех попарных играх, в которых он участвует. Если все игроки выбрали свои чистые стратегии $r_i \in R_i$, то выигрыш игрока i в этой ситуации определяется так:

$$H_i(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \sum_{j \in N \setminus i} H_{ij}[r_i[j], r_j[i]]. \quad (1)$$

Важным примером подобной полиматричной игры является бескоалиционная игра распределения ресурсов. Пусть i-й из n участников ($i \in N$) имеет в своем распоряжении K_i единиц некоторого ресурса. Этот ресурс может быть распределен различным способом на парные игры с остальными участниками, а выигрыш в каждой парной игре зависит от количества ресурсов, направравленных участниками на данную игру. Общий выигрыш каждого игрока, как и прежде, равен сумме его выигрышей в каждой из парных игр. Ясно, что игра распределения ресурсов является частным случаем полиматричной игры. Матрицы H_{ij} имеют $(K_i + 1)$ строк и $(K_j + 1)$ столбцов, элемент $H_{ij}[p, q]$ равен выигрышу игрока i в парной игре с игроком j в случае, если игрок i направил на эту игру $(p-1)$ единиц ресурса, а игрок j – $(q-1)$ единиц. Чистая стратегия игрока представляет собой вектор, задающий распределение ресурса на игры с остальными игроками. Допустимыми являются те чистые стратегии игрока i, в которых расход ресурса равен K_i.

Как обычно, смешанной стратегией игрока i в полиматричной игре будем называть вероятностное распределение на множестве R_i, т.е. вектор $s[R_i]$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{r_i \in R_i} s_i[R_i] = 1 \quad , \quad s_i[r_i] \geq 0 \; .$$

Если $s = (s_1, \ldots, s_n)$ – ситуация, т.е. набор смешанных стратегий игроков, то выигрыш игрока i в ситуации s есть математическое ожидание выигрыша, т.е.

$$H_i(s)=\sum_{k\in N}\sum_{r_k\in R_k} H_i(r_1,\dots,r_k,\dots r_n)\cdot s_1[r_1]\cdot\ldots\cdot s_k[r_k]\cdot\ldots\cdot s_n[r_n]. \quad (2)$$

Очевидно, что для любого s имеет место $\sum_{i\in N} H_i(s)=0$.

Ситуация $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ называется ситуацией равновесия по Нэшу, если для всех $i\in N$ имеет место $H_i(s^*)\geq H_i(s^*\| s_i)$, где $s^*\| s_i$ – ситуация, в которой стратегия s_i^* игрока i заменена на стратегию s_i.

ТЕОРЕМА I. *Ситуация s^* является ситуацией равновесия в полиматричной игре тогда и только тогда, когда найдется вектор $v[N]$, который вместе с s^* будет решением задачи линейного программирования:*

$$\min \sum_{i\in N} v[i] \; ; \quad (3)$$

$$\sum_{j\in N\setminus i}\sum_{r_j\in R_j} H_{ij}[r_i[j],r_j[i]]\cdot s_j[r_j]\leq v[i] \;,\; i\in N,\; r_i\in R_i\,; \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{r_j\in R_j} s_j[r_j]=1\;,\; j\in N\,;\\ &s_j[r_j]\geq 0\,.\end{aligned}\right. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$H_i(s)=\sum_{r_i\in R_i}\sum_{j\in N\setminus i}\sum_{r_j\in R_j} H_{ij}[r_i[j],r_j[i]]\cdot s_i[r_i]\cdot s_j[r_j]\,. \quad (6)$$

Действительно, подставляя в (2) выражение $H_i(r_1,\dots,r_n)$ из (I) и меняя порядок суммирования, получим

$$H_i(s)=\sum_{j\in N\setminus i}\sum_{r_i\in R_i}\sum_{r_j\in R_j}\sum_{k\in N\setminus(i\cup j)}\sum_{r_k\in R_k} H_{ij}[r_i[j],r_j[i]]\cdot s_1[r_1]\cdot\ldots\cdot s_k[r_k]\cdot\ldots\cdot s_n[r_n].$$

Учитывая, что $\sum_{r_k\in R_k} s_k[r_k]=1$, получим (6).

Заметим далее, что задача (3)-(5) является двойственной к самой себе и значение минимума в ней равно нулю. Действительно, обозначим двойственные переменные, соответствующие ограничениям (4), через $t_i[\tau_i]$, а соответствующие ограничениям (5) – через $-w[i]$. Тогда двойственная задача будет иметь вид:

$$max \sum_{i\in N} (-w[i]);$$

$$\sum_{i\in N\setminus j} \sum_{\tau_i\in R_i} -H_{ij}[\tau_i[j], \tau_j[i]]\cdot t_i[\tau_i] - w[j] \leqq 0, \ j\in N, \ \tau_j\in R_j;$$

$$\sum_{\tau_i\in R_i} t_i[\tau_i] = 1 \quad , \ i\in N \ ; \qquad t_i[\tau_i] \geqq 0 \ .$$

Так как $-H_{ij}[\tau_i[j], \tau_j[i]] = H_{ji}[\tau_j[i], \tau_i[j]]$,

то ограничения прямой и двойственной задач совпадают. Таким образом, двойственная задача состоит в максимизации $\sum_{i\in N}(-v[i])$ при ограничениях (4)-(5), а значит, для оптимального плана задачи (3)-(5) имеет место $-\sum_{i\in N} v_i = \sum_{i\in N} v_i$, т.е. $\sum_{i\in N} v_i = 0$. Любой набор векторов $s_i[R_i]$, $v[N]$, удовлетворяющий ограничениям (4)-(5) и условию $\sum_{i\in N} v_i = 0$, является одновременно решением и прямой, и двойственной задачи.

Пусть s^* – ситуация равновесия в полиматричной игре. Покажем, что найдется вектор $v[N]$, который вместе с s^* образует решение задачи (3)-(5). Положим

$$v[i] = \max_{\tau_i\in R_i} \sum_{j\in N\setminus i} \sum_{\tau_j\in R_j} H_{ij}[\tau_i[j], \tau_j[i]]\cdot s_j^*[\tau_j] \ . \quad (7)$$

Тогда s^* и v будут удовлетворять ограничениям (4)-(5). Пусть для некоторого i найдется стратегия τ_i , для которой

$$s_i^*[\tau_i] > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j\in N\setminus i} \sum_{\tau_j\in R_j} H_{ij}[\tau_i[j], \tau_j[i]]\cdot s_j^*[\tau_j] < v[i]. (8)$$

Тогда

$$H_i(s^*) = \sum_{\tau_i\in R_i} \sum_{j\in N\setminus i} \sum_{\tau_j\in R_j} H_{ij}[\tau_i[j], \tau_i[j]]\cdot s_i^*[\tau_i]\cdot s_j^*[\tau_j] < v[i].$$

Рассмотрим стратегию s_i° , в которой с вероятностью единица выбирается чистая стратегия τ_i° , на которой достигается максимум в (7). Тогда $H_i(s^* \| s_i^\circ) = \vartheta[i]$, т.е. $H_i(s^* \| s_i^\circ) > H_i(s^*)$, и s^* – не ситуация равновесия.

Таким образом, (8) не может быть выполнено, а тогда $H_i[s^*] = \vartheta[i]$. Так как $\sum_{i\in N} H_i(s^*) = 0$, то s^* вместе с ϑ образуют решение задачи (3)-(5).

Пусть s^* и ϑ – решение задачи (3)-(5). Тогда, в силу принципа дополняющей нежесткости и так как s^* и ϑ являются решением двойственной задачи, имеет место для всех i и τ_i

$$s_i^*[\tau_i] \cdot \sum_{j\in N\setminus i} \sum_{\tau_j\in R_j} H_{ij}[\tau_i[j], \tau_j[i]] \cdot s_j^*[\tau_j] = \vartheta[i].$$

Следовательно, $H_i(s^*) = \vartheta[i]$. Пусть s_i' – некоторая смешанная стратегия игрока i. Имеем

$$H_i(s^* \| s_i') = \sum_{\tau_i\in R_i} \sum_{j\in N\setminus i} \sum_{\tau_j\in R_j} H_{ij}[\tau_i[j], \tau_j[i]] \cdot s_i'[\tau_i] \cdot s_j^*[\tau_j] \le \vartheta[i],$$

т.е. s^* – ситуация равновесия. Теорема доказана.

Основные трудности при решении задачи (3)-(5) связаны с ее большими размерами: в ней $\sum_{i\in N} |R_i| + n$ ограничений и столько же переменных. Числа $|R_i|$ могут быть очень большими, например, для задачи распределения ресурсов

$$|R_i| = \binom{K_i + n - 2}{n-2},$$

т.е. $|R_i|$ экспоненциально зависит от K_i.

Покажем, что ранг матрицы ограничений задачи (3)-(5) линейно зависит от размеров матриц H_{ij} (для задачи распределения ресурсов число строк матрицы H_{ij} равно $K_i + 1$).

Перепишем задачу (3)-(5) по-другому.

Пусть R есть прямая сумма множеств R_i, $R = \bigoplus_{i\in N} R_i$, т.е. R есть множество пар вида (i, τ_i), где $i \in N$, а $\tau_i \in R_i$. Векторы $s_1[R_1], \ldots, s_n[R_n]$ объединим в один вектор $s[R]$, в котором $s[(i,\tau_i)] = s_i[\tau_i]$. Введем далее векторы $e^i[R]$ из нулей и единиц:

$$e^i[(j,\tau_j)] = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $A[R,R]$ – матрица коэффициентов при $s_j[\tau_j]$ в ограничениях (4). Очевидно,

$$A[(i,r_i),(j,r_j)]=\begin{cases} H_{ij}[r_i[j],r_j[i]], & \text{если } i\neq j, \\ 0 & \text{, если } i=j. \end{cases}$$

В новых обозначениях задачу (3)-(5) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i\in N} v[i]; \\ & A[R,R]\times s[R]-\sum_{i\in N} v[i]\cdot e^i[R]\leq \mathbf{0}; \\ & (e^i[R],s[R])=1, \; i\in N; \\ & s[R]\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{I0}$$

Пусть H - прямая сумма матриц H_{ij}, т.е. H - блочно-диагональная матрица, составленная из $n(n-1)$ матриц H_{ij} ($i,j\in N$, $i\neq j$). Множество строк матрицы H обозначим через M. Множество M состоит из $\sum_{i\in N}\sum_{j\in N\setminus i} m_{ij}=m$ элементов, оно есть прямая сумма множеств строк $M_{ij}=1:m_{ij}$ матриц H_{ij}. Множество столбцов матрицы H обозначим через M'. M' есть прямая сумма множеств M_{ji} - множеств столбцов матриц H_{ij}. Таким образом, элементами множества M являются пары $((i,j),k)$, где (i,j) определяют матрицу H_{ij} ($i,j\in N$, $i\neq j$), а $k\in M_{ij}$ - номер строки в этой матрице.

Для каждого $r\in R$ определим вектор-строку $X[r,M]$ из нулей и единиц:

$$X[(\nu,r_\nu),((i,j),k)]=\begin{cases} \text{I, если } i=\nu \text{ и } k=r_\nu[j]; \\ \text{0 в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, вектор $X[r,M]$ имеет следующую структуру. Его компоненты разбиваются на $n(n-1)$ блоков, каждый блок ооответствует множеству M_{ij}. Единицы расположены только в тех блоках, в которых i совпадает с номером ν в паре (ν, r_ν). В каждом таком блоке имеется одна единица на месте $k=r_\nu[j]$.

Пусть, например, $r=(1,r_1)$. Тогда вектор $X[r,M]$ можно изобразить следующим образом:

$1\dots r_1[2]\dots m_{12}$	$1\dots r_1[3]\dots m_{13}$	$\dots$	$1\dots r_1[n]\dots m_{1n}$	$1\dots m_{21}$	$\dots$	$1\dots m_{n\,n-1}$
$0\dots1\dots0$	$0\dots1\dots0$	$\dots$	$0\dots1\dots0$	$0\dots0$	$\dots$	$0\dots0$
M_{12}	M_{13}	$\dots$	M_{1n}	M_{21}	$\dots$	$M_{n\,n-1}$

Множество векторов $X[r,M]$ образует матрицу $X[R,M]$. Аналогично для каждого $r\in R$ построим вектор-столбец $Y[M',r]$ из нулей и единиц, компоненты которого определяются так:

$$Y[((i,j),\ell),(\nu,r_\nu)] = \begin{cases} 1, \text{ если } \nu=j \text{ и } \ell=r_\nu[i], \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Образуем из этих векторов матрицу $Y[M,R]$.

ТЕОРЕМА 2. Имеет место равенство

$$A[R,R]=X[R,M]\times H[M,M']\times Y[M',R].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r=(\mu,r_\mu)$, $r'=(\nu,r_\nu)$. Вычислим $\alpha(r,r')=X[r,M]\times H[M,M']\times Y[M',r']$.

Имеем

$$\alpha(r,r')=\sum_{\substack{((i,j),k)\in M\\((i',j'),\ell)\in M'}} X[(\mu,r_\mu),((i,j),k)]\times$$

$$\times H[((i,j),k),((i',j'),\ell)]\cdot Y[((i',j'),\ell),(\nu,r_\nu)].$$

Если $i=i'$ и $j=j'$, то $H[((i,j),k),((i',j'),\ell)]=H_{ij}[k,\ell]$, в противном случае этот элемент равен нулю. Элемент $X[(\mu,r_\mu),((i,j),k)]$ отличен от нуля, только если $i=\mu$ и $k=r_\mu[j]$, а элемент $Y[((i',j'),\ell),(\nu,r_\nu)]$ отличен от нуля, только если $j'=\nu$ и $\ell=r_\nu[i]$. Таким образом, если $\mu\neq\nu$, то в последней сумме отлично от нуля единственное слагаемое при $i=i'=\mu$, $j=j'=\nu$, $k=r_\mu[\nu]$, $\ell=r_\nu[\mu]$, и оно равно $H_{\mu\nu}[r_\mu[\nu],r_\nu[\mu]]$. Если же $\mu=\nu$, то все слагаемые равны нулю. Таким образом, учитывая (9), получим $\alpha(r,r')=$ $=A[r,r']$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что ранг матрицы A не превосходит $m=|M|$.

Рассмотрим метод решения задачи (3)-(5), основанный на генерировании столбцов в симплекс-методе. При этом порядок хранимых матриц не превосходит $m+n$.

Пусть C есть множество векторов y , представимых в виде $y=Y[M',R]\times s[R]$, где s удовлетворяет условиям $(e^i[R], s[R])=1, s[R]\geq 0$. Очевидно, C есть выпуклый многогранник. Представим его в виде системы неравенств

$$D[S,M']\times y[M']\geq d[S],$$

где D - некоторая матрица, а d - вектор, вообще говоря, нам неизвестные.

Таким образом, задача (I0) может быть переписана в виде

$$\min \sum_{i\in N} v[i];$$

$$X[R,M]\times H[M,M']\times y[M'] - \sum_{i\in N} v[i]\cdot e^i[R]\leq 0; \quad (II)$$

$$D[S,M']\times y[M']\geq d[S].$$

Выпишем задачу, двойственную для (II); двойственные переменные обозначим соответственно через $u[R]$ и $\bar{u}[R]$. Получим

$$\begin{aligned} &\max\,(d[S]\times \bar{u}[S]);\\ &(u[R], e^i[R])=1 \quad, i\in N;\\ &-u[R]\times X[R,M]\times H[M,M'] + \bar{u}[S]\times D[S,M']\leq 0;\\ &u[R], \bar{u}[S]\geq 0. \end{aligned} \quad (I2)$$

В задаче (I2) число ограничений $m+n$, так что при решении ее симплекс-методом порядок хранимых базисных матриц равен $m+n$.

Пусть имеем некоторый базисный план задачи (I2) и соответствующий ему вектор двойственных переменных $(y[M'], v[N])$. Рассмотрим метод определения вводимого в базис вектора; только эта операция вызывает трудности, все остальные выполняются как обычно.

Так как двойственной для (I2) является задача (II), то проверка условий оптимальности сводится к проверке того, что векторы $y[M']$ и $v[N]$ удовлетворяют ограничениям задачи (II). Непосредственная проверка этого невозможна, так как множество R может иметь слишком большое число элементов, а матрица D и вектор d вообще неизвестны.

Рассмотрим метод проверки первой группы ограничений задачи (II). Пусть $z[M] = H[M,M'] \times y[M']$. Так как вектор y известен, то вектор z можно вычислить непосредственно. Пусть $\beta_i = \max\limits_{r_i \in R_i} X[(i,r_i),M] \times z[M]$. Если для всех $i \in N$ имеет место $\beta_i \leqq v[i]$, то первая группа ограничений (II) выполнена. Если же для некоторого $r=(i,r_i)$ будет $X[r,M] \times$ $\times z[M] > v[i]$, то в базис задачи (I2) может быть введен вектор $(\varepsilon^i[N], -X[r,M] \times H[M,M'])$, где $\varepsilon^i[N]$ – i-й единичный орт. Из определения вектора $X[r,M]$ для $r=(i,r_i)$ получим $X[r,M] \times z[M] = \sum\limits_{j \in N \setminus i} z[((i,j), r_i[j])]$. Таким образом, задача нахождения β_i при фиксированном i свелась к следующей: даны векторы $z_j[M_{ij}]$ ($j \in N \setminus i$), нужно так выбрать допустимую стратегию $r_i \in R_i$, чтобы максимизировать $\sum\limits_{j \in N \setminus i} z_j[r_i[j]]$. Возможность эффективного решения последней задачи зависит от структуры множества R_i. Будем предполагать, что располагаем алгоритмом решения этой задачи. Отметим, что для задачи распределения ресурсов такой алгоритм существует. В этом случае $r_i[j] = p_j + 1$, где p_j – количество ресурса, направленного игроком i на игру с игроком j. Пусть $\bar{z}_j(p) = z_j[r_i[j]]$. Тогда задача определения β_i сводится к максимизации $\sum\limits_{j \in N \setminus i} \bar{z}_j(p_j)$ при условиях $\sum\limits_{j \in N \setminus i} p_j = K_i$, $p_j \geqq 0$, p_j – целые. Последняя задача может быть решена с помощью динамического программирования.

Проверка второй группы ограничений задачи (II) сводится к проверке того, что данный вектор $y[M']$ принадлежит множеству C. Эта проверка может быть осуществлена с помощью решения задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\min\ (u^+[M'] \times \mathbb{1}[M'] + u^-[M'] \times \mathbb{1}[M'])\ ; \\
&Y[M',R] \times s[R] + u^+[M'] - u^-[M'] = y[M']\ ; \\
&(e^i[R], s[R]) = 1\ , \quad i \in N\ ; \\
&s[R] \geqq 0\ , \quad u^+[M'] \geqq 0\ , \quad u^-[M'] \geqq 0
\end{aligned} \tag{I3}$$

($\mathbb{1}$ - вектор, состоящий из единиц).

Если в задаче (13) значение минимума равно нулю, то $u^+[M']=u^-[M']=\mathbb{O}$ и $y\in C$. Если же это значение положительно, то какое-либо из ограничений $Dy\geqq d$ нарушено, и определим строку матрицы D и компоненту вектора d, соответствующие нарушенному ограничению. Они определяют столбец, который следует ввести в базис в задаче (12).

Задача (13) имеет $m+n$ ограничений, и ее также будем решать симплекс-методом с генерированием столбца, вводимого в базис. Выпишем задачу, двойственную к (13), обозначив двойственные переменные, соответствующие первой группе ограничений (13), через $w[M']$, а второй группе - через $t[N]$:

$$\begin{aligned} &\max\ \left(y[M']\times w[M']+\sum_{i\in N}t[i]\right);\\ &w[M']\times Y[M',R]+t[i]\leqq \mathbb{O}\ ;\\ &-\mathbb{1}[M']\leqq w[M']\leqq \mathbb{1}[M']\ . \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть имеется некоторый базисный план задачи (13) и соответствующие ему двойственные переменные w и t. Условия $-1\leqq w[j]\leqq 1$ проверяются непосредственно, при их нарушении в базис задачи (13) вводится переменная $u^+[j]$ или $u^-[j]$. Для проверки остальных ограничений задачи (14) вычислим $\gamma_j=\max\limits_{r_j\in R_j} w[M']\times Y[M',(j,r_j)]$. Если для всех j будет $\gamma_j+t[j]\leqq 0$, то ограничения задачи (14) выполняются, в противном случае определим нарушенное ограничение и тем самым столбец, подлежащий вводу в базис в задаче (13).

Задача нахождения γ_j того же типа, что и нахождение β_i. Имеем

$$w[M']\times Y[M',(j,r_j)]=\sum_{i\in N\setminus j} w[((i,j),r_j[i])].$$

Отсюда $\gamma_j=\max\limits_{r_j\in R_j}\sum\limits_{i\in N\setminus j} w_i[r_j[i]]$.

Для задачи распределения ресурсов величины γ_j, как и β_i, можно определить с помощью динамического программирования.

Таким образом, получим метод решения пары задач (13)-(14), т.е. метод проверки принадлежности вектора y множеству D.

Рассмотрим теперь способ формирования строки матрицы $\mathcal{D}$, соответствующей нарушенному ограничению задачи (II). Для этого зафиксируем способ представления множества C системой неравенств. Обозначим через Δ многогранник ограничений задачи (I4). Пусть $(w_\nu[M'], t_\nu[N])$ $(\nu\in S)$ – крайние точки Δ. Составим из векторов $w_\nu[M']$ матрицу $W[S,M']$, а из чисел $\mathbb{1}[N]\times t_\nu[N]$ вектор $T[S]$. Покажем, что множество C можно задать системой неравенств

$$-W[S,M']\times y[M'] \geqq T[S]. \qquad (I5)$$

Действительно, если $y\in C$, то максимум в задаче (I4) равен нулю, а тогда для произвольной крайней точки Δ имеет место $w_\nu[M']\times y[M'] + \mathbb{1}[N]\times t_\nu[N] \leqq 0$, т.е. (I5) имеет место. Если $y\notin C$, то значение максимума в (I4) положительно, а тогда найдется крайняя точка (w_ν, t_ν) многогранника Δ, для которой

$$y[M']\times w_\nu[M'] + \mathbb{1}[N]\times t_\nu[N] > 0,$$

т.е. (I5) не выполнено.

Таким образом, строку матрицы $\mathcal{D}$, нарушающую ограничения $\mathcal{D}y \geqq d$, и соответствующую компоненту вектора d можно определить следующим образом: если при решении задач (I3)-(I4) получим положительное значение минимума в задаче (I3), то берем вектор двойственных переменных $(w[M'], t[N])$, соответствующий оптимальному базисному плану задачи (I3), и выбираем в качестве соответствующей строки $\mathcal{D}$ вектор $w[M']$, а в качестве компоненты d число $\mathbb{1}[N]\times t[N]$. В базис задачи (I2) введем вектор $(\mathbb{0}[N], -w[M'])$ с коэффициентом целевой функции, равным $\mathbb{1}[N]\times t[N]$.

Таким образом, получаем следующий алгоритм решения задачи (3)-(5).

I. Строим базисный план задачи (I2), возможно, содержащий искусственные переменные (начальный план может быть построен на искусственных переменных).

2. Строим двойственные переменные $y[M']$ и $v[N]$, соответствующие текущему базисному плану задачи (I2).

3. Проверяем первую группу ограничений задачи (II). Для этого вычисляем $\beta_i = \max\limits_{r_i\in R_i} \sum\limits_{j\in N\setminus i} z_j[r_i[j]]$ для $i\in N$.

Если найдется такое $i \in N$, что $\beta_i > v[i]$, то вводим в базис задачи (I2) вектор $(\varepsilon^i[N], -X[r,M] \times H[M,M'])$, выполняем, как обычно, замену базиса и переходим к п.2.

4. Если $\beta_i \leqq v_i$ для всех $i \in N$, то проверяем вторую группу огрэничений задачи (II), для чего решаем задачу (I3). Ее решение состоит из следующих шагов.

4.I. Строим базисный план задачи (I3).

4.2. Строим двойственные переменные $w[M']$ и $t[N]$, соответствующие текущему базисному плану задачи (I3).

4.3. Если нарушено условие $-1 \leqq w[j] \leqq 1$, то вводим в базис $u^+[j]$ или $u^-[j]$, перестраиваем его и переходим к п.4.2.

4.4. Вычисляем $\gamma_j = \sum_{r \in R_j} w_i[r_j[i]]$ $(j \in N)$.

4.5. Если для всех $j \in N$ будет $\gamma_j + t[j] \leqq 0$, то задача (I3) решена. Переходим к п.5.

4.6. Возьмем $j \in N$, для которого $\gamma_j + t[j] \leqq 0$, и введем в базис задачи (I3) вектор $(Y[M',(j,r_j)], \varepsilon^j[N])$, где r_j - стратегия, на которой реализуется максимум при нахождении γ_j. Производим замену базиса и переходим к п.4.2.

5. Задача (I3) (а вместе с ней и (I4)) решена. Если значение минимума в ней нуль, то решена и задача (3)-(5). Ее решение - вектор $(s[R], v[N])$, где s берется из последнего решения задачи (I3), а v - текущие двойственные переменные задачи (I2).

6. Если значение минимума в (I3) положительно, то вводим в базис задачи (I2) вектор $(0[N], -w[M'])$ с коэффициентом целевой функции $\mathbb{1}[N] \times t[N]$, где w и t - двойственные переменные, соответствующие оптимальному плану задачи (I3). Производим замену базиса и переходим к п.2.

Отметим в заключение, что изложенный здесь подход применим к ряду других теоретико-игровых задач, которые сводятся к задачам линейного программирования неполного ранга.

ЛИТЕРАТУРА

I. Брэгман Л.М., Фокин И.Н. Метод решения сумм матричных игр// Исследование операций и статистическое моделирование. - Л., 1974. - Вып.2. - С.37-55.

2. Муравьев В.И., Романовский И.В. Использование метода переменного базиса для решения непрерывного аналога задачи Джонсона // Там же. - С.27-37.
3. Канторович Л.В., Романовский И.В. Генерирование столбцов в симплекс-методе // Экономика и мат. методы. - 1985. - Т.21, вып.1. - С.128-138.
4. Брэгман Л.М., Сурин С.С. Пакет ЛП ЛГУ. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

Поступила в ред.-изд. отдел
29.12.86 г.