Выпуск 40(57) ОПТИМИЗАЦИЯ 1987 г.

УДК 513.88

О ВКЛАДЕ Л.В.КАНТОРОВИЧА В ТЕОРИЮ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.Г.Кусраев, С.С.Кутателадзе

В истории функционального анализа принято связывать создание теории упорядоченных векторных пространств с исследованиями Г.Биркгофа, Л.В.Канторовича, М.Г.Крейна, Х.Накано, Ф.Рисса, Г.Фрейденталя и др. Л.В.Канторовичу принадлежит заслуга выделения наиболее важного класса таких пространств - векторных решеток, обладающих свойством (ограниченной, условной) порядковой полноты, т.е. таких векторных решеток, в которых непустые порядково ограниченные множества имеют точные границы. Эти пространства получили название K-пространств или, более подробно, пространств Канторовича.

K-пространства были выделены в первой основополагающей работе Л.В.Канторовича [1], а в серии дальнейших работ [2-9] он заложил основы для развития функционального анализа в таких пространствах, имея прежде всего в виду изучение линейных операций и связанных с ними уравнений. В дальнейшем теория упорядоченных векторных пространств стала одной из главных тем творчества Л.В.Канторовича. Она отражена в его работах [10-23]. Под влиянием Л.В.Канторовича в области упорядоченных векторных пространств стали работать его ученики А.Г.Пинскер, Б.З.Вулих, А.И.Юдин, а несколько позже к этой тематике подключились и другие ученики Л.В.Канторовича - Г.П.Акилов, А.И.Бедуев, Д.А.Владимиров, составившие ядро в дальнейшем окрепшей и разросшейся ленинградской школы "полуупорядоченников".

В наши дни теория и приложения упорядоченных векторных пространств - обширная область математики, составляющая, по существу, одно из основных направлений функционального анализа. Это направление хорошо представлено в монографической литературе (см. [19,23-38]). В теории упорядоченных векторных пространств достойное место занимают идеи Л.В.Канторовича. Время показало их жизненную силу. Как это ни парадоксально, только теперь, спустя полвека после открытия K-пространств, вскрываются новые глубинные связи, определяющие их место в перечне наиболее фундаментальных математических структур.

В настоящей статье мы не ставили своей задачей дать обстоятельный очерк развития идей Л.В.Канторовича и его школы в области функционального анализа на основе полуупорядоченных пространств. Эта масштабная задача ждет еще своего решения. Мы преследовали скромную цель - привлечь внимание к пионерским работам Л.В.Канторовича и отметить некоторые достаточно бесспорные связи.

Надеемся, что даже наш краткий экскурс вызовет интерес у читателей к оригинальным работам одного из математических классиков и поможет погрузиться в необыкновенную атмосферу творчества, в поток новых идей, перспектив и возможностей, многие из которых ждут дальнейшего развития и исследования.

I. Введение понятия K-пространства. Первой работой Л.В. Канторовича в области упорядоченных векторных пространств была работа [I], в которой он пишет:

"В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы".

Здесь Л.В.Канторович сформулировал важную методологическую установку, которую ниже будем называть принципом Канторовича или, более подробно, принципом переноса для K-пространств. Это название вызвано тем, что в определение линейного полуупорядоченного пространства была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная I_c. Таким образом, уже в первой работе Л.В.Канторовича выделен класс K-пространств. Изучение K-пространств Леонид Витальевич связал с выяснением области применимости фундаментальной теоремы Хана - Банаха и сформулировал теорему 3, которая теперь в литературе именуется теоремой Хана - Банаха - Канторовича.

В ней фактически утверждается, что в классической теореме о мажорированном продолжении линейного функционала можно реализовать принцип Канторовича, т.е. заменить в теореме Хана – Банаха вещественные числа элементами произвольного K-пространства, а линейные функционалы – операторами со значениями в таком пространстве.

2. Основы теории регулярных операторов в K-пространствах. Первой работой в этом направлении является заметка [2]. В ней прежде всего следует выделить теорему 3, составившую основу исчисления регулярных операторов и получившую в литературе название теоремы Рисса – Канторовича. Эта теорема утверждает, что естественным образом упорядоченное множество регулярных (т.е. имеющих положительную мажоранту) операторов, определенных на векторной решетке и со значениями в K-пространстве, также образует K-пространство. Аналогичное свойство мер Радона сформулировал Ф.Рисс в своем знаменитом докладе в Болонье в 1928 году (см. [39]), вписав тем самым свое имя в число основоположников теории упорядоченных векторных пространств. Дальнейшее развитие и приложения исчисления регулярных операторов представлены в монографии (см. также обзор в [40]).

Фундаментальное значение имеет впервые введенное в этой работе понятие векторного пространства, нормированного элементами некоторого полуупорядоченного пространства или, как теперь говорят, абстрактно нормированного пространства. Следует особо подчеркнуть введение Л.В.Канторовичем необычной аксиомы разложимости абстрактной нормы – аксиомы 4. Любопытно, что в последующих исследованиях других авторов аксиома 4 часто опускалась как несущественная. Ее принципиальное значение было открыто только в 80-е годы в связи с булевозначной интерпретацией принципа Канторовича (см. [41]).

Стоит отметить, что в этой же работе появились впервые линейные операторы в абстрактно нормированных пространствах, мажорируемые положительным линейным или возрастающим сублинейным оператором. Впоследствии такие операторы назывались по-разному: регулярные, мажорированные, а в некоторых частных ситуациях – доминированными, имеющими абстрактную норму (см. [19,26,41]).

3. Основы теории функций со значениями в K-пространстве. Уже в 1930-х годах, как известно, предпринимались попытки распространения классической теории функций действительного переменного на абстрактные вектор-функции, под которыми в то время понимались отображения со значениями в банаховом пространстве. Отмечая это обстоятельство в работе [6], Л.В.Канторович пишет: "... теория таких функций является гораздо более бедной, чем теория функций с вещественными значениями. Здесь я хочу сделать набросок теории функций, значения которых принадлежат некоторому линейному полуупорядоченному пространству. В этой теории находят отражение все основные теоремы классической теории функций, однако построение этой теории приходится вести иным образом".

Из этого отрывка видно, что и здесь Л.В.Канторович проводит последовательно свой эвристический принцип, согласно которому теория абстрактных вектор-функций наиболее адекватным и полным образом расширяет скалярную теорию, сохраняя все богатство ее содержания, именно в тех случаях, когда области значений представляют собой K-пространство.

В работах [3,6] принцип Канторовича применен к построению аналогов пространств непрерывных и абсолютно непрерывных функций, функций ограниченной вариации, абстрактных аналогов гильбертова пространства; намечена теория интеграла в таких пространствах, указаны ее приложения к проблемам гармонического анализа. Интересно подчеркнуть, что в работе [6] Л.В.Канторович возвращается к задаче "распространения - "обогащения" функционального пространства Гильберта за счет введения "идеальных" функций, которые уже не будут функциями в обычном смысле", поставленной им ранее в работе [42]. Эта малоизвестная работа посвящена одной из наиболее актуальных проблем 1930-х годов - развитию математического аппарата физики и квантовой механики на основе теории гильбертовых пространств. Занявшись теперь построением теории абстрактных вектор-функций, Л.В.Канторович дает еще одно разъяснение своего взгляда на понятие идеальной функции. Он пишет: "Будем рассматривать также "идеальные" (или средние) функции $y=f(t)$, для которых не указаны значения при определенных значениях t, но для которых даны средние их значения в любом промежутке, т.е. дана функция $y=F(t)$ - представляющая для f - такая, что с ее помощью среднее значение $f(t)$ в любом промежутке (α, β) дается величиной $\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ". Подчеркнем, что уже тогда Л.В.Канторович говорил об обобщенных функциях со значениями в K-пространствах.

4. Дальнейшее развитие теории линейных операторов. В то время, когда Л.В.Канторович ознакомился с основополагающими идеями С.Банаха и увлекся функциональным анализом, одной из центральных тем этой дисциплины было аналитическое представление линейных операций.

Дело в том, что необходимо было накопить определенный запас конкретных фактов о строении линейных функционалов и операторов в типичных классах непрерывных и интегрируемых функций. К началу 1930-х годов общая форма линейного функционала была найдена для всех классических банаховых пространств, за исключением L_∞. Для операторов имеющиеся сведения практически исчерпывались результатами И.Радона об общих формах ограниченных и компактных эндоморфизмов пространства непрерывных функций. Проблема представления линейных операторов сразу же привлекла внимание Л.В.Канторовича и стала одним из основных направлений его аналитического творчества. Стали классическими полученные им совместно с одним из своих учителей Г.М. Фихтенгольцем теоремы об аналитическом представлении операторов, действующих из пространства непрерывных функций в L_∞. Естественно, что, выработав концепцию K-пространства, Леонид Витальевич обращается к детальному анализу действующих в них операторов. Одно из его принципиальных наблюдений состояло в следующем. В классических функциональных объектах математического анализа - в функциональных классах - чрезвычайно важное значение имеют не задаваемые естественными нормами, но связанные с имеющимися отношениями порядка типы сходимости: сходимость почти всюду, сходимость по мере. Таким образом, возникла новая возможность выделить и характеризовать классы операторов, непрерывных в своеобразном "смешанном" смысле. На этом пути Л.В.Канторович выделил многочисленные классы регулярных операторов и нашел для них конкретные аналитические описания.

Эти исследования отражены в работах [5,8,19,27,43,44], среди которых следует особо выделить [43]. Примерно в те же годы важные результаты об аналитическом представлении линейных операторов на основе теории банаховых пространств получали И.М.Гельфанд, Н.Данфорд, Б.Петтис и др. Таким образом, Леонид Витальевич был одним из основоположников бурно развиваемого до настоящего времени направления – аналитического представления линейных операторов. Следует особо выделить вклад Леонида Витальевича в разработку новых форм принципа ограниченности Банаха – Штейнгауза для введенных им типов операторов.

Более подробное изложение ранних исследований Л.В.Канторовича и его учеников в этой области дано в [12,19].

5. K-пространства в приближенных методах анализа. Для творчества Л.В.Канторовича характерно, как уже отмечалось, разнообразие интересов, сочетающееся с идейной целостностью. Уже с 1930-х годов одной из главных тем творчества Леонида Витальевича стала вычислительная математика. (Впрочем, сам термин "вычислительная математика" в те годы не употреблялся, принято было говорить о приближенных методах высшего анализа.) Не удивительно поэтому,что уже в своих ранних работах Л.В. Канторович обращается к приложениям теории полуупорядоченных пространств в численных методах. Идейную сторону своего подхода Леонид Витальевич раскрыл в заметке [9]:

"При доказательстве существования решения различных классов функциональных уравнений в анализе весьма часто применяется способ последовательных приближений; при этом доказательство сходимости этих приближений основывается на том, что данное уравнение может быть мажорировано некоторым уравнением простого вида. Такого рода доказательства встречаются в теории бесконечных систем линейных уравнений и в теории интегральных и дифференциальных уравнений.

Рассмотрение полуупорядоченных пространств и операций в них позволяет с большой легкостью развить в абстрактной форме полную теорию функциональных уравнений упомянутого вида".

И в самом деле, метод мажорант, восходящий к Коши, обретает свою естественную и законченную форму в рамках теории K-пространств (см. [9,13,16,19-21]).

В связи с задачами прикладного характера Л.В.Канторович вновь обращается к идее абстрактно нормированных пространств и вводит специальную аксиому полноты. Таким образом, само введение пространств типа B_K или, как теперь говорят, пространств Банаха – Канторовича имело как абстрактные корни, так и основательную прикладную мотивацию. Абстрактный метод мажорант, построенный Леонидом Витальевичем, получил существенное развитие как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей и занял видное место в арсенале теоретических средств вычислительной математики.

6. Булевозначная трактовка принципа Канторовича. Как уже отмечалось выше, эвристический принцип переноса, выдвинутый Л.В.Канторовичем в связи с концепцией K-пространства, находил позже многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора, так и его последователей. По существу этот принцип оказался одной из тех стержневых идей, которые, играя организационную и направляющую роль в становлении нового направления, привели, в конечном итоге, к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными положениями. Уже в начальный период развития теории предпринимались попытки формализации указанных эвристических соображений. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства (см. [19]).

Однако оставался неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы применимости подобных утверждений, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Вся глубина и универсальный характер принципа Канторовича были раскрыты в рамках булевозначного анализа.

Булевозначным анализом называют раздел функционального анализа, использующий специальную теоретико-модельную технику - булевозначные модели теории множеств. Любопытно отметить, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией упорядоченных векторных пространств. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960-му году. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствии вдохнула жизнь в созданный математический аппарат, привела к бурному прогрессу в теории моделей. Такая идея пришла с открытием Дж.Коэна, установившем в 1963 году абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической континуум-проблемы. Именно в связи с осмыслением метода форсинга Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П.Вопенки, Д.Скотта и Р.Соловея.

Булевозначный статут понятия K-пространства установлен в [45]. Основной результат этой работы утверждает, что любое расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели. Более подробно, пусть B - полная булева алгебра, а $\mathcal{R}$ - поле вещественных чисел в булевозначной модели, построенной на основе B. Тогда с $\mathcal{R}$ вполне определенным способом связано расширенное K-пространство $\mathcal{R}\downarrow$, база которого изоморфна булевой алгебре B. При этом оказывается, что любая теорема (в рамках аксиоматики Цермело - Френкеля с аксиомой выбора) о вещественных числах имеет свой аналог для K-пространства $\mathcal{R}\downarrow$, причем перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определенных стандартных процедур, т.е. по сути дела алгоритмически. Тем самым установка Л.В.Канторовича "элементы K-пространства суть обобщенные числа" обретает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку. С другой стороны, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную, наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, превращается в рамках булевозначного анализа в точный исследовательский метод.

Дальнейшее развитие булевозначного анализа показало, что подобный перевод (перенос, трансляция), изготовляющий из известных фактов новые теоремы, возможен не только для K-пространств, но и практически для всех объектов, так или иначе связанных с такими пространствами: для пространств типа B_K, различных классов линейных и нелинейных операторов, операторных алгебр и т.п. Более подробно об этом рассказано в книгах [41,46]. Здесь отметим лишь то, что принцип Канторовича для пространств типа B_K (с точностью до элементарных оговорок) реализован в следующем виде: пространство Банаха - Канторовича допускает погружение в подходящую булевозначную модель теории множеств, превращаясь в банахово пространство. Иначе говоря, пространство типа B_K суть булевозначная интерпретация банахова пространства. При этом именно необычная аксиома разложимости нормы, введенная Л.В.Канторовичем, обеспечивает возможность такого погружения.

7. Место K-пространств в творчестве Л.В.Канторовича. Научное наследие Л.В.Канторовича колоссально. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Л.В.Канторович по праву входит в число основоположников современного экономико-математического направления. Открытое им линейное программирование изменило лицо экономической науки. Л.В.Канторович - автор более трехсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам: I) дескриптивная теория функций и теория множеств, 2) конструктивная теория функций, 3) приближенные методы анализа, 4) функциональный анализ, 5) функциональный анализ и прикладная математика, 6) линейное программирование, 7) вычислительная техника и программирование, 8) оптимальье планирование и оптимальные цены, 9) экономические проблемы социалистической экономики.

Столь впечатляющее многообразие направлений исследований определяется не только личностью Л.В.Канторовича, но и единством его методических установок. Он всегда подчеркивал внутреннее единство своего творчества, взаимопроникновение идей и методов, используемых им при решении самых разнообразных теоретических и прикладных проблем в математике и экономике. Анализ методологии творчества Л.В.Канторовича заслуживает специальных исследований. Сейчас мы только можем отметить, что абстрактные идеи Л.В.Канторовича в области теории K-пространств оказались, как это ни парадоксально, тесно связанными с идеями линейного программирования, с приближенными методами анализа. Обращаясь к идейным установкам теории K-пространств в последней математической работе [46], которую Л.В. Канторович заканчивал непосредственно перед своей кончиной, он отмечал:

"При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов наряду с алгебраическими и другими соотношениями большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющееся между всеми объектами, носит обедненный характер, например, можно все виды расположить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, определяется или фиксируется, а в других случаях остается неопределенным (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый больше второго, если в первом каждого продукта соответственно больше, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать.

Так в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств и прежде всего теория K-пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль, и уже при возникновении K-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.

Теория K-пространств имеет и другое значение - их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы вместо чисел могут использоваться элементы такого пространства - конечномерного или бесконечномерного. Подобная нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел - максимумами ее на частях этого интервала".

Подчеркнем, что в приведенном фрагменте Л.В.Канторович отмечает неразрывную связь K-пространств с теорией неравенств и экономической проблематикой. Стоит также указать, что идеи линейного программирования неразрывно связаны с теорией K-пространств в следующем строго математическом плане: выполнение в абстрактной математической структуре любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K-пространством (см. [48]). Удивительно прозорливым оказалось положение Л.В.Канторовича о том, что элементы K-пространства суть обобщенные числа. Возникший на этой основе эвристический принцип Канторовича, как мы уже отметили, нашел блестящее подтверждение в рамках современной математической логики.

Математические и экономические идеи Л.В.Канторовича устремлены в будущее.

Мы убеждены в том, что теория K -пространств, вошедшая в золотой фонд мировой науки, окажется полезным инструментом в руках будущих исследователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях к теории линейных операций // Докл. АН СССР. - 1935. - Т.4, № 1-2. - С.11-14.
2. Канторович Л.В. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР. - 1936. - Т.1, № 7. - С. 271-274.
3. Канторович Л.В. Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида // Докл. АН СССР. - 1936. - Т.2, № 1. - С.7-10.
4. Kantorovich L.V. Sur les propriétés des espaces semiordonnes lineaires// C.r. Acad. Sci. - 1936. - V.202. - P.813-816.
5. Kantorovich L.V. Les formes generales des operations lineaires que transforment quelques espaces classiques dans un espace semiordonne lineaire arbitraire.-C.r.Acad.Sci.-1936.
6. Канторович Л.В. Основы теории функций вещественного переменного, значения которых принадлежат линейному полуупорядоченному пространству // Докл. АН СССР. - 1936. - Т.2, № 9. - С.359-363.
7. Канторович Л.В. О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР. - 1936. - Т.3, № 1. - С.9-13.
8. Канторович Л.В. Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР. - 1936. - Т.3, № 9. - С.101-106.
9. Канторович Л.В. Об одном классе функциональных уравнений// Докл. АН СССР. - 1936. - Т.4, № 5. - С.211-216.
10. Kantorovich L.V. Lineare halbgeordnete Raume. - Мат. сб. - 1937. - Т.2, № 1. - С.121-158.
11. Канторович Л.В. О полуупорядоченных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1937, № 1. - С.79-90.

12. Канторович Л.В. О последовательности линейных операций // Докл. АН СССР. - 1937. - Т.14, № 3. - С.255-259.
13. Канторович Л.В. О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ.- 1937. - Т.3, № 7 - С.17-33.
14. Kantorovich L. Sur la continuite et sur le prolongement des operations lineaires. - C. r. Acad. Sci. - 1938.- V.206. - P.879-883.
15. Kantorovich L., Pinsker A. Sur les fonctionelles partiellement additives dans les espaces semiordonnes lineaires// C.r. Acad. Sci. - 1938. - V.207.
16. Kantorovich L. The method of successive aproximations for functional equations // Acta Math. - 1939. - V.71.-P.63-97.
17. Kantorovich L., Pinsker A. Sur les formes generales des fonctionelles partiellement additives// C.r. Acad. Sci.- 1939. - V. 208.
18. Kantorovich L. Linear operations in semiordered spaces,I// Мат. сб. - 1940. - Т.49, № 2. - С.209-284.
19. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
20. Канторович Л.В. Принцип мажорант и метод Ньютона // Докл. АН СССР. - 1951. - Т.70, № 1. - С.17-20.
21. Канторович Л.В. Некоторое дальнейшее применение принципа мажорант// Докл. АН СССР. - 1951. - Т.80, № 6. - С. 849-852.
22. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Линейные полуупорядоченные группы // Успехи мат. наук. - 1951. - Т.6, № 3. - С.31-98.
23. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1985.
24. Nakano H. Modulated semi-ordered linear spaces. - Tokyo: Maruzen, 1950.
25. Nakano H. Semi-ordered linear spaces. - Tokyo: Maruzen, 1955.
26. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. - М.: Физматгиз, 1961.

27. Peressini A.L. Ordered topological vector spaces. - N.Y. a.o.: Harper and Row, 1967.
28. Jameson G. Ordered linear spaces. - Berlin a.o.: Springer, 1970.
29. Cristescu R. Spatii lineare ordonate. - Bucharest: Editare Acad. Populare Romine, 1970.
30. Luxemburg W.A.I., Zaanen A.C. Riesz spaces, I. - Amsterdam-London: North Holland, 1971.
31. Wong Y.-Ch., Ng K.-F. Partially ordered topological vector spaces. - Oxford: Univ. Press, 1976.
32. Schaefer H.H. Banach lattices and positive operators. - Berlin a.o.: Springer, 1974.
33. Fremlin D.H. Topological Riesz spaces and measure theory.- London - N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1974.
34. Jonge E. de, Rooij A.P.M. van. Introduction to Riesz spaces. Amsterdam, 1977.
35. Aliprantis C.D., Birkinshaw O. Locally solid Riesz spaces. - N.Y. - London: Acad. Press, 1978.
36. Акилов Г.П., Кутателадзе С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
37. Lindenstrauss J., Zafriri L. Classical Banach spaces.II. Function spaces. - Berlin a.o.: Springer, 1979.
38. Zaanen A.C. Riesz spaces II. - Amsterdam. a.o.: North Holland, 1983.
39. Riesz F. Sur la decomposition des operations fonctionneles lineaires// Atti Del Congresso Internationalle dei matematici , Bologna. - 1928, T.III. - P.145-147.
40. Бухвалов А.В. Приложение методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах // Усп. мат. наук. - 1983. - Т.38, № 6. - С.37-83.
41. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1985.
42. Канторович Л.В. О некоторых общих методах расширения пространства Гильберта // Докл. АН СССР. - 1935. - Т.3, № 3-4. - С.115-118.
43. Kantorovich L., Vulich B. Sur la representation des operations lineaires//Compos. math. - 1937. - V.5. - P.119-165.

44. Kantorovich L., Vulich B. Sur un theoreme de N.Dunford // Compos. math. - 1937. - V.5. - P.430-432.

45. Гордон Е.И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР. - 1977. - Т.237, № 4. - С.773-775.

46. Канторович Л.В. Функциональный анализ. Основные идеи // Сиб. мат. журн. - 1987. - Т.28, № 1. - С.7-16.

47. Канторович Л.В. Мой путь в науке// Усп. мат. наук. 1987.- Т. 41, № 2. - С.

48. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Субдифференциальное исчисление. - Новосибирск: Наука, 1987.

Поступила в ред.-изд. отдел
1.04.1987 г.