Выпуск 40(57) ОПТИМИЗАЦИЯ 1987 г.

УДК 517.982+510.644+512.58

РАБОТЫ Л.В.КАНТОРОВИЧА ПО ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ

Д.А.Владимиров

Первые научные работы Л.В.Канторовича относились к дескриптивной теории функций. Сам автор в то время был студентом Ленинградского университета, а его первый университетский учитель Г.М.Фихтенгольц являлся пропагандистом новой для того времени "теоретико-множественной" математики. Надо сказать, что в Ленинграде тогда эта математика была еще мало популярна, в то время как в Москве уже многие годы существовала сильная школа теории функций вещественной переменной – Д.Ф.Егоров, Н.Н.Лузин и их многочисленные ученики.

Научная деятельность Л.В.Канторовича началась со статьи [1]. Работа эта посвящена функциям, входящим в так называемую классификацию Юнга. Известно, что стержень дескриптивной теории – трансфинитная классификация функций, ведущая от самых простых (непрерывных) к функциям все более и более сложной природы. Такая классификация может осуществляться по-разному. Наиболее популярна классификация Р.Бэра, при которой функции очередного класса являются пределами (в смысле простой точечной сходимости) функций предыдущих классов. Однако есть и другие подходы, один из которых был предложен У.Г.Юнгом в 1911 году, по-видимому, независимо от Бэра. Каждому трансфиниту α отвечают два класса G_α, g_α, один из которых состоит из всевозможных пределов возрастающих последовательностей функций предыдущих классов, а другой, соответственно, из пределов убывающих последовательностей таких функций. В конечном счете получается тот же запас функций, что и при методе Бэра, поскольку каждый предельный переход может быть представлен как итерация двух монотонных:

$$\lim_k f_k(x) = \lim_n \lim_m \max(f_n(x), \dots, f_{n+m}(x)). \quad (*)$$

Однако классификация Юнга тоньше, чем классификация Бэра. Она имеет свои особенности и преимущества. В [I] Л.В.Канторович показывает, что функции класса $g_{\alpha+1}$ и только они являются верхними пределами последовательностей функций классов g_β $(\beta<\alpha)$. Отсюда вытекают многочисленные следствия, относящиеся уже к бэровским функциям. Классификации Юнга посвящена также работа [2]. Здесь речь идет о так называемых универсальных функциях, т.е. функциях вида $F(x,y)$, способных при надлежащем выборе y "превратиться" в любую из функций интересующего нас класса (и только этого класса). В [2] доказывается, что для класса Бэра с номером α не существует универсальной функции того же класса, в то время как для классов Юнга такая функция существует. (В обоих случаях рассматриваются функции, допускающие бесконечные значения.)

В двух упомянутых работах уже проявился интерес Л.В.Канторовича к вопросам, связанным с упорядочением вещественных функций. Классификация Юнга теснее связана с таким упорядочением, чем бэровская. Надо сказать, что формула (*) при всей своей простоте играла в последующие годы большую роль в творчестве Л.В.Канторовича, явившегося одним из создателей современной теории векторных решеток.

Классификация Юнга играет существенную роль в работах [3] и [4]. В первой из них уточняется и развивается известный результат Витали, согласно которому измеримая по Лебегу функция всегда эквивалентна бэровской функции не выше второго класса; вторая работа содержит исчерпывающую характеристику функций, представимых в виде точечного предела почти везде непрерывных.

Наибольшую известность приобрел цикл работ [5-I3], большинство из которых выполнено совместно с погибшим во время войны ленинградским математиком Е.М.Ливенсоном. Эти работы имеют двоякое значение: во-первых, в них были заложены основы общей теории операций над множествами, во-вторых, решен ряд конкретных задач.

Теория операций над множествами имеет своим началом работу П.С.Александрова [I4], в которой он решил проблему мощности борелевского множества и для этой цели фактически ввел операцию, получившую вскоре название A-операции (М.С.Суслин [I5]).

Дальнейшее развитие эта теория получила в трудах А.Н.Колмогорова и Ф.Хаусдорфа, которые независимо друг от друга ввели понятие (δ_s) -операции, более общей чем A-операция. Л.В.Канторович и Е.М.Ливенсон сделали новый существенный шаг: они ввели наиболее общее понятие аналитической операции. Позже такие операции стали называть теоретико-множественными. Аналитическая операция соотносит каждому семейству множеств новое множество так, что принадлежность этому множеству какого либо элемента целиком определяется указанием тех членов исходного семейства, которым этот элемент принадлежит. Это значит, что такая операция задается булевым многочленом от бесконечного (вообще говоря) числа аргументов. Ранее изучавшиеся (δ_s) -операции выделяются среди аналитических свойством "положительности".

Теория операций над множествами в дальнейшем развивалась многими авторами: А.А.Ляпуновым [16], Ю.С.Очаном, И.И.Паровиченко [17] и другими. Результаты Л.В.Канторовича и Е.М.Ливенсона явились отправными пунктами новых исследований. "Операция А.Н.Колмогорова", которой посвящена заключительная глава работы [12], была в дальнейшем предметом многочисленных исследований под названием R-операции. В первую очередь нужно указать на многочисленные работы А.А.Ляпунова, глубоко исследовавшего класс R-множеств [16] и предложившего новый тип операции: T-операцию.

Из конкретных проблем, решенных в статьях этого цикла, в первую очередь должна быть упомянута проблема, относящаяся к так называемым C-множествам. Эти множества были введены Е.А.Селивановским; они получаются из открытых счетнократным повторением A-операций и операции перехода к дополнению. Основная проблема состояла в том, чтобы выяснить связь этого класса множеств с ранее изучавшимся классом проективных множеств. Л.В.Канторович и Е.М.Ливенсон доказали, что все C-множества лежат во втором проективном классе Н.Н.Лузина, точнее, являются так называемыми B_2-множествами. Этот результат имел большой резонанс*); Н.Н.Лузин дал ему высокую оценку**). Позднее другое доказательство этой теоремы дал К.Кура-

*) Впервые опубликован в [7].

**) См. [18, с.241, 589].

товский*) ; оно использовало предложенный П.С.Новиковым метод сравнения индексов. Дальнейшее усиление теоремы Канторовича – Ливенсона принадлежит А.А.Ляпунову, который доказал, что не только C-множества, но и R-множества (образующие более широкий класс) содержатся в классе B_2. Что касается C-множеств, то последующее развитие их теории связано в основном с именем П.С.Новикова, доказавшего, в частности, теоремы об отделимости [20]. Если результаты Канторовича – Ливенсона и Ляпунова принадлежат к числу наиболее ярких достижений "классического" периода, то, начиная с работ П.С.Новикова, дескриптивная теория множеств все более срастается с логикой, аксиоматической теорией множеств и теорией моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kantorovich L.V. Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M.W.Young // Fund. Math. - 1929. - Vol.13. - P.178-185.
2. Канторович Л.В. Об универсальных функциях // Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва. - 1929. - Т.2, вып. I.- С.3-21.
3. Kantorovich L.V. Sur le théorème de M.Vitali. - C.r. Soc. sci. Varsovie. - 1929. - T.22. - P.142-148.
4. Kantorovich L.V. Sur les suites des fonctions presque partout continues. - Fund. Math. - 1930. - Vol.16. - P. 25-28.
5. Kantorovich L.V. Sur les ensembles projectifs de la deuxiéme classe // C.r. Acad. sci. - 1929. - T.189.- P.1233.
6. Kantorovich L.V., Livenson E.M. Sur les fonctions de M.Hausdorff. - C.r. Acad. sci. - 1930. - T.190. - P.332.
7. Sur les ensembles projectifs de M.Luzin // C.r. Acad.sci.- 1930. - T.190. - P.1113.
8. Sur les fonctions du type (α) // C.r. Acad. Sci. - 1930.- T.190. - P.1267.
9. Канторович Л.В. О проективных множествах // Докл. на I Всесоюзном мат. съезде. Научный бюллетень съезда. - Харьков, 1930. - С.26-27.

---

*) См. [19].

10. Kantorovich L.V., Livenson E.M. Memoir on the analytical operations and projective sets // Fund. Math. - 1932. - Vol.18. - P.214-279.
11. Kantorovich L.V. Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés // C.r. Soc. sci. Varsovie. - 1932. - T.25. - P.1-7.
12. Kantorovich L.V. Memoir on the analytical operations and projective sets // Fund. Math. - 1933. - T.20. - P.54-97.
13. Kantorovich L.V., Livenson E.M. Sur quelques théorèms sur les ensembles projéctifs// C.r. Acad. sci. - 1937. - T.204.- P.466-468.
14. Александров П.С. Sur la puissance des ensembles mesurables B // C.r. Acad. sci. - 1916. - T.162. - P.323-325.
15. Суслин М.Я. Sur une definitions des ensembles mesurables B sans nombres transfini // C.r. Acad. sci. - 1917. - T.164. - P.90-91.
16. Ляпунов А.А. Вопросы теории множеств и теории функций. - М.: Наука, 1979.
17. Паровиченко И.И. Теория операций над множествами. - Кишинев: Штиинца, 1981.
18. Лузин Н.Н. Собр. соч. Т.2. - М.: изд. АН СССР, 1958.
19. Куратовский К. Les ensembles projectifs et l'operation (A) // C.r. Acad. sci. - 1936. - T.203. - P.911-913.
20. Новиков П.С. Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe // Fund. Math. - 1935. - T.25. - P.459-466.

Поступила в ред.-изд. отдел
18.08.1986 г.