УДК 51.330.115 + 513.88.

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.П. Швейдель

## Введение

В работе изучаются точечно-множественные отображения в конечномерном случае. Знак $\triangleq$ означает "по определению".

Рассмотрим $n$ -мерное арифметическое пространство $R^n$, состоящее из наборов $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$. Положим $R_n^+ \triangleq \{x \in R^n : x^{(i)} \geq 0 \ i=1,2,\dots,n\}$ - конус векторов с неотрицательными компонентами. Введем в $R^n$ евклидову норму и порядок, определяемый конусом $R_n^+$. Обозначим через $\Xi(R_n^+)$ совокупность непустых ограниченных подмножеств, $S_n \triangleq \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}$ - единичный шар $R^n$; $e_i = (0 \dots \underset{i}{1} \dots 0)$ - орты.

Подмножество $\Omega$ конуса $R_n^+$ назовём нормальным, если $\overline{\Omega - R_n^+} = \Omega$ (здесь черта означает замыкание). Из определения непосредственно следует, что компактное подмножество $\Omega$ конуса $R_n^+$ нормально тогда и только тогда, когда с каждой своей точкой $x$ оно содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$.

Нормальной оболочкой подмножества $\Omega$ конуса $R_n^+$ назовём пересечение всех нормальных множеств, содержащих $\Omega$. Нормальную оболочку $\Omega$ обозначим символом $n\Omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\Omega \subset R_n^+$, то $n\Omega = \overline{\Omega - R_n^+} \cap R_n^+$ (см.[1]).

Отображение $a : R_n^+ \longrightarrow \Xi(R_n^+)$ называется суперлинейным, если оно положительно однородно. $a(\lambda x) = \lambda a(x)$,

$\lambda > 0$, $x \in R_n^+$), супераддитивно ( $a(x_1+x_2) \supset a(x_1) + a(x_2)$, $(x_1, x_2 \in R_n^+)$), замкнуто (из того, что $x_n \to x$, $y_n \to y$, $y_n \in a(x_n)$ следует, что $y \in a(x)$ ), гейловское ( $a(0) = 0$ ).

Суперлинейное отображение $a$ конуса $R_n^+$ в $\Xi(R_n^+)$ назовём нормальным, если для любого $x \in R_n^+$ множество $a(x)$ нормально. Нормальной оболочкой суперлинейного отображения $a$ назовем отображение $\pi a$, которое каждому $x$ из $R_n^+$ ставит в соответствие множество $\pi a(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Нормальная оболочка суперлинейного отображения есть нормальное суперлинейное отображение (см. [I]).

Нормальное отображение называется неособенным, если при некотором $x \in \operatorname{int} R_n^+$ множество $a(x)$ телесно.

Условимся продолжение отображения $a$ на $\Xi(R_n^+)$, ставящее в соответствие каждому $\xi$ из $\Xi(R_n^+)$ подмножество $\bigcup_{x \in \xi} a(x)$ множества $R_n^+$, обозначать тем же символом $a$, что и исходное отображение. Заметим, что если $\Omega$ - выпуклый компакт, то и $a(\Omega)$ - выпуклый компакт.

Выпуклое компактное подмножество $\xi$ из $\Xi(R_n^+)$, отличное от нуля, называется собственным множеством суперлинейного отображения $a$, если $a(\xi) = \lambda \xi$ при некотором положительном $\lambda$. Положительное число $\lambda$ называется собственным числом отображения $a$.

Пусть $W_n$ - совокупность выпуклых компактных подмножеств $R^n$. В $W_n$ введем операции Минковского (сложение множеств и умножение на неотрицательное число). Превратим $W_n$ в метрическое пространство, положив

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho > 0 \mid A + \rho\xi_n \supset B,\ B + \rho\xi_n \supset A\} \quad (A, B \in W_n).$$

Это так называемая метрика Хаусдорфа (см. [2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Всякое непрерывное суперлинейное отображение $a$ обладает собственным множеством.

Доказательство аналогично доказательству существования собственных множеств у нормального суперлинейного отображения (см. [I]).

Заметим, что нормальная оболочка собственного множества $\xi$ суперлинейного отображения $a$, отвечающего собственному числу $\lambda$, является собственным множеством отображения $na$, отвечающим тому же самому $\lambda$. Так как $n\xi \supset \xi$, то $a(n\xi) \supset a(\xi)$, а поэтому и $na(n\xi) \supset na(\xi)$. Отображение $na$, очевидно, монотонно. Для $z \in n\xi$ найдется $\bar{z} \in \xi$ такой, что $z \leq \bar{z}$. Тогда $na(\bar{z}) \supset na(z)$, то есть $na(\xi) \supseteq na(n\xi)$. Мы получили равенство $na(\xi) = na(n\xi) = \lambda\xi$. Пусть теперь $a(\xi) = \lambda\xi$. Тогда $na(\xi) = na(n\xi) = \lambda n\xi$. Обращаясь снова к [I], получаем: I) собственных чисел у непрерывного суперлинейного отображения конечное число; 2) собственным множествам, пересекающим $int\, R_n^+$, отвечает одно и то же собственное число.

Если $a$ - суперлинейное отображение $R_n^+$ в $\Xi(R_n^+)$, то на множестве $R_n^+$ можно определить отображение $a^{-1}$, обратное к $a$

$$a^{-1}(y) = \{x \in R_n^+ : y \in a(x)\} \quad (y \in a(R_n^+)).$$

Ясно, что $a(R_n^+)$ - конус и отображение $a^{-1}$ замкнуто, положительно однородно, супераддитивно. Если $a$ - неособенное нормальное отображение, то $a(R_n^+) = R_n^+$ и отображение $a^{-1}$, определенное на всём конусе $R_n^+$, обладает также следующими свойствами: I) если $y_1 \geq y_2 \geq 0$, то $a^{-1}(y_1) \subset a^{-1}(y_2)$, 2) $a^{-1}(y) = a^{-1}(y) + R_n^+$ (плюс здесь означает сложение по Минковскому), 3) $a^{-1}(y) = R_n^+ \Leftrightarrow y = 0$ (см. [3]). Замкнутое выпуклое множество $A$ назовём $R_n^+$-устойчивым, если $A + R_n^+ = A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $a$ - нормальное отображение и $A$ $R_n^+$ - устойчивое множество, то $a^{-1}(A) = \bigcup_{y \in A} a^{-1}(y)$ также $R_n^+$ - устойчивое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \bar{\in} a^{-1}(A)$, но $\inf\limits_{y \in a^{-1}(A)} \rho(x,y) = 0$. Тогда найдется последовательность $x_n$ такая, что $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$ и $x_n \in a^{-1}(y_n)$, где $y_n \in A$. По определению обратного отображения $y_n \in a(x_n)$. Так как $x_n \to x$, то для всякого $\bar{x} > x$ имеем $x_n < \bar{x}$, начиная с некоторого $n$. В силу монотонности отображения $a$ получаем, что $y_n \in a(x_n) \subset a(\bar{x})$. Но $a(\bar{x})$ – компакт, поэтому из последовательности $y_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $y_{n_k} \to y$. Множество $A$ замкнуто, поэтому $y \in A$, а тогда $x \in a^{-1}(y)$, то есть $x \in a^{-1}(A)$. Получили противоречие. Остальные свойства очевидны.

Пусть $a_n$ – совокупность $R_n^+$ – устойчивых множеств. С помощью операций Минковского введем в $a_n$ структуру полугруппы с операторами из $R+$.

Непрерывный функционал $p$, заданный на $R_n^+$, называется суперлинейным, если $p(x+y) \geq p(x)+p(y)$, где $x$, $y \in R_n^+$, и $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ при $\lambda > 0$ и $x \in R_n^+$.

Теорема Минковского – Фенхеля устанавливает изоморфизм между полугруппой $a_n$ и конусом суперлинейных функционалов над $R_n^+$. При этом $R_n^+$ – устойчивому множеству $A$ соответствует суперлинейный функционал $p(z) = \inf\limits_{y \in A}(y, z)$. В силу положительной однородности отождествим суперлинейный функционал с его следом на $\xi_n$. Изоморфизм не нарушится. Условимся след суперлинейного функционала, отвечающего $R_n^+$ -устойчивому множеству $A$, обозначать $f_A$.

Отображение $a^{-1}$, обратное к неособенному нормальному отображению $a$, и его продолжение на $R_n^+$ - устойчивые подмножества конуса $R_n^+$, ставящее в соответствие каждому множеству $A$ множество $\bigcup\limits_{y \in A} a^{-1}(y)$, условимся обозначать буквой $b$.

$R_n^+$ - устойчивое собственное подмножество $A$ конуса $R_n^+$ назовём собственным множеством отображения $b$, если $b(A) = \lambda A$ при некотором $\lambda > 0$.

Всякое нормальное отображение $a$ имеет собственное множество (см. [I]). Возникает естественный вопрос: имеет ли собственное множество отображение, обратное к неособенному нормальному? При доказательстве этого факта выделим три параграфа, представляющих самостоятельный интерес. В первом параграфе строится некоторая локально-выпуклая топология в $C(\xi_n \cap R_n^+)$ и рассматриваются топологические свойства $R_n^+$ -устойчивых подмножеств конуса $R_n^+$. Во втором параграфе доказывается непрерывность отображения $b$ построенной топологии. В третьем параграфе устанавливается существование собственных множеств.

§ I. Рассмотрим $C(\zeta_n \cap R_n^+)$ – банахово пространство функций, непрерывных на компакте $\zeta_n \cap R_n^+$. Пусть $\mathcal{Z} = \{z_k / z_k \in \zeta_n \cap \operatorname{int} R_n^+\}$ – счётное, всюду плотное подмножество $\zeta_n$. Через $\mathcal{Y}$ обозначим линейную оболочку $\mathcal{Z}$ в пространстве линейных функционалов, определенных на $C(\zeta_n \cap R_n^+)$. Очевидно, $\mathcal{Y}$ и $C(\zeta_n \cap R_n^+)$ находятся в двойственности, поэтому на $C(\zeta_n \cap R_n^+)$ можно ввести локально-выпуклую топологию простой сходимости $\sigma(C(\zeta_n \cap R_n^+), \mathcal{Y})$. Так как множество $\mathcal{Z}$ счётно, топология $\sigma(C(\zeta_n \cap R_n^+), \mathcal{Y})$ метризуема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $f_{\mathcal{A}_n} \to f_{\mathcal{A}}$ и $a_n \to a$, где $a_n \in \mathcal{A}_n$, то $a \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим $a \bar{\in} \mathcal{A}$. По теореме отделимости Эйдельгайта найдутся $z \in \zeta_n$ и число $c$ такие, что $(z, a) < c$ и $f_{\mathcal{A}}(z) > c$. Так как множество $\mathcal{A} - R_n^+$ -устойчивое, все координаты $z$ неотрицательные, $f_{\mathcal{A}}$ – непрерывная функция и неравенства строгие, поэтому можно считать, что $z \in \mathcal{Z}$. По условию $f_{\mathcal{A}_n}(z) \longrightarrow f_{\mathcal{A}}(z)$. Следовательно, $(a, z) = \lim (a_n, z) \geq \lim f_{\mathcal{A}_n}(z) = f_{\mathcal{A}}(z) > c$. Получили противоречие.

Положим $X \triangleq \{f \in C(\zeta_n \cap R_n^+) : f = f_{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{A} \subset R_n^+\}$.

ТЕОРЕМА 1. $X$, рассматриваемое как подпространство метрического пространства $(C(\zeta_n \cap R_n^+), \sigma(C(\zeta_n \cap R_n^+), \mathcal{Y}))$, локально компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M$ – бесконечное ограниченное подмножество $X$ и $z$ – произвольный элемент $\mathcal{Z}$. Так как $z \in \operatorname{int} R_n^+$, то $f_{\mathcal{A}}(z) = (a, z)$, где $a \in \mathcal{A}$. Ограниченность множества $M$ означает ограниченность множества $\{f_{\mathcal{A}}(z) / f_{\mathcal{A}} \in M\}$, поэтому найдется положительное число $c$ такое, что для любой функции $f_{\mathcal{A}}$ из $M$ множества $\mathcal{A}$ и $\{a \in R_n^+ / (a, z) \leq c\}$ пересекаются. Обозначим через $d$ верхнюю границу множества $\{a \in R_n^+ / (a, z) \leq c\}$. Она существует, так как все координаты $z$ положительны. Всякое $R_n^+$-устойчивое множество, определяющее функцию из $M$, содержит $d+R_n^+$.

Введем обозначения: $\Pi_k = \{x \in R_n^+ \mid x \leq d+(k-1)\sum_{i=1}^{n} e_i\}$, $E_k = \{x \in \Pi_k \mid d \leq x\}$, $D_k = \Pi_k \setminus E_k$. Очевидно, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k = R_n^+$, $D_k \cup E_k = \Pi_k$, $D_{k+1} \supset D_k$. Так как $E_k$ задаётся системой линейных неравенств, то это выпуклое замкнутое множество.

На компактных подмножествах $R^n$ определим метрику Хаусдорфа. Как показано в [2], это метрическое пространство локально-компактно. Следовательно, можно найти последовательность $R_n^+$-устойчивых множеств $\{A_{n_1}\}$ такую, что $f_{A_{n_1}} \in M$ и $A_{n_1} \cap D_1 \to B_1$. Из последовательности $A_{n_1}$ выберем подпоследовательность $A_{n_2}$ так, чтобы $A_{n_2} \cap D_2 \to B_2$, и т.д. Ясно, что $A_{nn} \cap D_k \to B_k$ при любом $k$. Покажем, что множество $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup (d+R_n^+) - R_n^+$ - устойчивое.

Пусть $y \in B$ и $\bar{y} > y$. Если $\bar{y} \in d+R_n^+$, то $\bar{y} \in B$. Предположим противное. В этом случае $y \in B_k$ при некотором $k$, $u$ реализуется как предел последовательности $y_n$, где $y_n \in A_{nn} \cap D_k$. Множества $A_{nn}$ - $R_n^+$-устойчивые, поэтому $y_n + (\bar{y}-y) \in A_{nn}$. Так как $y_n + (\bar{y}-y) \bar{\in} d+R_n^+$, то $y_n + (\bar{y}-y) \in \mathcal{D}_\ell$ при некотором $\ell$ и, следовательно, $\bar{y} \in B_\ell$ - подмножеству множества $B$.

Представим множество $B$ как $\bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cup E_k)$. По построению $(B_k \cup E_k) \subset (B_m \cup E_m)$, если $m > k$. Множество $B_k \cup E_k$ выпуклое, как предел выпуклых множеств. $B_k \cup E_k =$

$$\lim ((A_{nn} \cap D_k) \cup E_k = \lim ((A_{nn} \cup E_k) \cap (E_k \cup D_k)) =$$

$$\lim (A_{nn} \cap \Pi_k).$$

Тогда выпуклость множества $B$ очевидна.

Покажем, что дополнение $B$ - открытое множество. Пусть $x \bar{\in} B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_n \cup (d+R_n^+)$ и $\varepsilon = \inf_{y \in B} \rho(x,y)$. Ясно, что $\varepsilon = \min(\inf_{y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \rho(x,y), \inf_{y \in d+R_n^+} \rho(x,y))$.

Предположим $\inf\limits_{y\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n} \rho(x,y)=0.$

Тогда $x=\lim x_k$, где $x\in B_{n_k}$ – наименьшему по включению множеству, содержащему $x_k$. Можно считать, что $x_k^i > d^i + (n_k - \ell)$ при некотором $i$ ( иначе перейдем к подпоследовательности). $\{x_k^i\}$ – ограниченное множество, поэтому существует натуральное число $\ell$ такое, что $B_{n_k}\subset B_\ell$, а значит, $x\in B_\ell$. Получили противоречие. Так как $\inf\limits_{y\in d+R_n^+}\rho(x,y)>0$, то $\varepsilon>0$, и множество $R^n\setminus B$ открыто.

Пусть $z$ – произвольный элемент $Z$. Покажем, что $f_{A_{nn}}(z)\underset{n}{\to} f_B(z)$. Выберем $\Pi_k$ из условий: $b<d+(k-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ell_i$ и $\{x\in R_n^+ : (z,x)\leq(b,z)+\varepsilon\}\subset\Pi_k$, где $b$ – элемент $B$ такой, что $f_B(z)=(b,z)$. Так как $\lim(A_{nn}\cap\Pi_k)=\lim[(A_{nn}\cap D_k)\cup E_k]=B_k\cup E_k$,

можно найти такое $N$, что $\rho[(A_{nn}\cap\Pi_k), B_k\cup E_k]\leq\varepsilon$ при всех $n\geq N$. В точке $b$ достигается $\inf\limits_{y\in B}(x,y)$, поэтому $b\in B_\ell$ при некотором $\ell$. Реализуем $b$ как предел $a_n$, где $a_n\in A_{nn}\cap D_\ell$. Но $a_n<d+(k-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ell_i$, следовательно, $a_n\in A_{nn}\cap D_k$, то есть $b\in B_k$. Выберем последовательность $\bar a_n$, где $\rho(\bar a_n, b)<\varepsilon$ и $\bar a_n\in A_{nn}\cap\Pi_k$. Тогда

$$f_{A_{nn}}(z)=\inf_{y\in A_{nn}}(y,z)=\min\Big[\inf_{y\in A_{nn}\cap\Pi_k}(y,z),\ \inf_{\substack{y\in A_{nn}\\ y\notin\Pi_k}}(y,z)\Big]\leq$$

$$\inf_{y\in A_{nn}\cap\Pi_n}(y,z)\leq(\bar a_n,z)<(b,z)+\varepsilon.$$

Для произвольного $y$ из $A_{nn}\cap\Pi_k$ найдется $w\in B_k\cup E_k$ такой, что $y\in W+\varepsilon Z_n$. Поэтому $(y,z)\geq(w,z)-\varepsilon\geq\inf\limits_{w\in B}(w,z)-\varepsilon=(b,z)-\varepsilon$, т.е. $\inf\limits_{y\in A_{nn}\cap\Pi_k}(y,z)\geq$

$(b,z)-\varepsilon.$

Но $f_{A_{nn}}(z)\geq\inf\Big[\inf\limits_{y\in A_{nn}\cap\Pi_k}(y,z)\quad(b,z)+\varepsilon\Big]\geq(b,z)-\varepsilon.$

Следовательно, $|f_{\lambda_n n}(z) - f_B(z)| \leq \varepsilon$, что и требовалось доказать.

§ 2. Заметим, что для отображения $B$ справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $x_n \to x$ и $x \neq 0$, то для $y \in B(x) \cap R_n^+$ найдется последовательность $\{y_n\}$ такая, что $y_n \in B(x_n)$ и $y_n \to y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\lambda} \triangleq \inf \{\lambda \geq 0 / \lambda y \in B(x)\}$. Очевидно, $0 < \lambda \leq 1$ и $z = \bar{\lambda} y$ есть элемент $B(x)$. Обозначим $\inf \{\lambda_n \geq 0 / \lambda_n z \in B(x_n)\}$ через $\bar{\lambda}_n$. Так как $z \in \operatorname{int} R_n^+$, то множество $\{\lambda_n \geq 0 / \lambda_n z \in B(x_n)\}$ не пусто и $\bar{\lambda}_n z \in B(x_n)$. Если $\bar{\mu} = \inf \{\mu \geq 0 / \mu z \in B(\sum_{i=1}^n l_i)\}$, то $(1-\varepsilon)x \leq x_n \leq x + \frac{\varepsilon}{\bar{\mu}}(\sum_{i=1}^n l_i)$, начиная с некоторого $n$. Тогда

$$B(x) + \frac{\varepsilon}{\bar{\mu}} B(\sum_{i=1}^n l_i) \subset B(x + \frac{\varepsilon}{\bar{\mu}}(\sum_{i=1}^n l_i)) \subset B(x_n) \subset (1-\varepsilon) B(x).$$

Так как $(1+\varepsilon) z \in B(x) + \frac{\varepsilon}{\bar{\mu}} B(\sum_{i=1}^n l_i)$, то $\bar{\lambda}_n \leq 1+\varepsilon$. С другой стороны, $1-\varepsilon \leq \bar{\lambda}_n$. Следовательно, $\bar{\lambda}_n \to 1$. Учитывая, что $B(x_n)$ есть $R_n^+$ - устойчивое множество, получаем $\frac{\bar{\lambda}_n z}{\bar{\lambda}} \in B(x_n)$ и $\frac{\bar{\lambda}_n z}{\bar{\lambda}} \to y$.

Из предложения 6 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $x_n \to x$, то $f_B(x_n) \to f_B(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n \to 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N$, что $0 \leq x_n \leq \varepsilon(\sum_{i=1}^n l_i)$ при всех $n > N$. Отображение $B$ монотонно, поэтому $\varepsilon B(\sum_{i=1}^n l_i) \subseteq B(x_n) \subset R_n^+$.

Следовательно, $0 \leqslant f_{b(x_n)}(z) \leqslant \varepsilon f_{b(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i)}(z)$,

то есть $\lim f_{b(x_n)}(z)=0$. Множество $\{f_{b(x_n)}\}$ ограничено, так как при $\bar{x}>x$ для всех $n \geqslant N$ справедливо $x_n<\bar{x}$ и $b(\bar{x})\subset b(x_n)$. Рассмотрим $\{f_{b(x_{n_k})}\}$ – сходящуюся подпоследовательность $\{f_{b(x_n)}\}$. Ясно, что $\lim f_{b(x_{n_k})}=f_B$. Если $y\in \operatorname{int} b(x)$, то $y\in R_n^+$. По предложению 6 $y=\lim y_k$, где $y_k\in b(x_{n_k})$. Из предложения 5 следует, что $y\in B$, то есть $b(x)\subset B$. Предположим, что существует $a$ из $\operatorname{int} B$, но $a\bar{\in} b(x)$. Отображение $b$ замкнуто, поэтому по $\varepsilon>0$ и $r$ можно найти сколь угодно большое $k$ такое, что $b(x)+\varepsilon\zeta_n \supset [b(x_{n_k})\cap \Pi_r]$. Пусть $U=\{y: a_2\leqslant y\leqslant a_1\}$ – прямоугольная окрестность точки $a$ такая, что $U\subset B$, но $U\notin b(x)$. Так как $a_1\notin b(x)+\varepsilon\zeta_n$ при некотором $\varepsilon>0$, эти множества можно разделить гиперплоскостью $(a_1,z)<c$, $f_{b(x)+\varepsilon\zeta_n}(z)>c$, где $z\in Z$ (см. доказательство предложения 5). Выберем $r$ так, чтобы $\{y\in R_n^+/(y,z)\leqslant c\}\subset \Pi_r$. Тогда

$$f_{b(x_{n_k})}(z)=\min[\inf_{y\in b(x_{n_k})\cap\Pi_r}(y,z),\ \inf_{\substack{y\in b(x_{n_k})\\ y\bar{\in}\Pi_r}}(y,z)]\geqslant$$

$$\min[\inf_{y\in b(x_{n_k})\cap\Pi_r}(y,z),\ c].$$

Но $b(x_{n_k})\cap\Pi_r\subset b(x)+\varepsilon\zeta_n$, следовательно,

$$\inf_{y\in b(x_{n_k})\cap\Pi_r}(y,z)\geqslant\inf_{y\in b(x)+\varepsilon\zeta_n}(y,z)>c,$$

то есть $f_{b(x_{n_k})}(z)\geqslant c$. Сходимости в точке $z$ не будет, потому что

$$f_B(z)=\inf_{y\in B}(y,z)\leqslant(a_1,z)<c.$$

Полученное противоречие показывает, что $B\subset b(x)$, то есть $f_{b(x_{n_k})}\to f_{b(x)}$. Так как $f_{b(x_{n_k})}$ – произвольная схощаяся подпоследовательность, то и $f_{\mathcal{B}(x_k)} \to f_{\mathcal{B}(x)}$.

Используя точечно-множественную непрерывность отображения $\mathcal{B}$, докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Отображение $\mathcal{B}$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_{\mathcal{A}_n} \to f_{\mathcal{A}}$. Так как $f_{\mathcal{A}_n}(z) \to f_{\mathcal{A}}(z)$ при $z \in Z$, существует $d \in R_n^+$ такой, что $d + R_n^+ \subset \mathcal{A}_k$ для всех $k$ (см. доказательство теоремы I). Тогда $\mathcal{B}(\mathcal{A}_k) \supset \mathcal{B}(d + R_n^+)$ и множество $\{f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_n)}\}$ ограничено.

Если $\mathcal{A} = R_n^+$, то можно выбрать последовательность $a_n$ такую, что $a_n \in \mathcal{A}_n$ и $a_n \to 0$. Тогда $\mathcal{B}(a_n) \subset \mathcal{B}(\mathcal{A}_n) \subset R_n^+$ и $f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_n)} \to 0$, так как $f_{\mathcal{B}(a_n)} \to 0$.

Пусть $\mathcal{A} \neq R_n^+$, $f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_{n_k})}$ – сходящаяся подпоследовательность $\{f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_n)}\}$ и $f_B = \lim f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_{n_k})}$.

Если $y \in \operatorname{int} \mathcal{B}(\mathcal{A})$, то $y \in \mathcal{B}(x) \cap \operatorname{int} R_n^+$ и $x \neq 0$. Можно считать, что $\mathcal{A} = \bigcup_{\ell=1} [\lim (\mathcal{A}_{n_p} \cap \mathcal{D}_\ell)] \cup [d + R_n^+]$, иначе нужно переходить к подпоследовательности последовательности $\{\mathcal{A}_{n_k}\}$ (обозначения те же, что и в теореме I). Реализуем $x$ как предел $x_p : x_p \in \mathcal{A}_p$. Тогда по предложению 6 $y = \lim y_p$, где $y_p \in \mathcal{B}(x_p)$ и $y \in B$ по предложению 5, то есть $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \subset B$. Аналогичным образом всякий $y \in B$ можно представить как предел $y_p$, где $y_p \in \mathcal{B}(\mathcal{A}_{n_p})$. Пусть $\bar{y} \in R_n^+$ такой, что $\bar{y} > y$. Так как $y_p \in \mathcal{B}(x_p)$ при некотором $x_p \in \mathcal{A}_{n_p}$, то $x_p \in \mathcal{a}(y_p) \subset \mathcal{a}(\bar{y})$. Множество $\mathcal{a}(\bar{y})$ компактно. Можно считать, что $x_p \to x$. Ясно, что $x \in \mathcal{A}$ и $y \in \mathcal{B}(x)$, то есть $y \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Мы показали, что $B = \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Последовательность $f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_{n_k})}$ произвольная, поэтому и $f_{\mathcal{B}(\mathcal{A}_n)} \to f_{\mathcal{B}(\mathcal{A})}$.

§ 3. Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Отображение $\mathcal{B}$ имеет собственное множество.

Доказательство аналогично доказательству существования собственного множества у нормального суперлинейного отображения.

Автор благодарит А.М. Рубинова за советы и С.С.Кутателадзе за обсуждение настоящей работы.

## Литература

1. Макаров В.Л., Рубинов А.М., Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики.- УМН 5:155 (1970).

2. Хадвигер Г., Лекции об объёме площади поверхности и изопериметрии. "Наука", М., 1966.

3. Rockafeller R.T., Monotone processes of convex and concave types, Mem.Amer.Math.Soc., 77(1967),1-77.

Поступила в редакцию
15.VI. 1971 г.