УДК 512.26:513.82

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е.Н.Сокирянская

§ 1. Пусть $N=\{1,2,\dots \nu\}$, $x[N]$,ж) $t[N]$ - ν -мерные векторы, $M=\{1,2,\dots\mu\}$, $y[M], z[M]$ - μ -мерные векторы (там, где это не может вызвать недоразумений, будем векторы $x[N]$, $y[M]$ обозначать иногда просто x и y);

$$\mathcal{X}=\{x[N]\},\ \mathcal{Y}=\{y[M]\},\ \mathcal{Z}=\{z[M]\},\ \mathcal{T}=\{t[N]\}$$

- конечномерные банаховы пространства, причем $\mathcal{Y}=\mathcal{Z}^*$, $\mathcal{T}=\mathcal{X}^*$; A - ненулевой линейный оператор, переводящий $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Z}$, с соответствующей матрицей $a[M,N]$; $A^*\in \mathcal{Y}\to\mathcal{T}$ - сопряженный линейный оператор. Ему соответствует транспонированная матрица $a^*[N,M]$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\|Ax\|_{\mathcal{Z}} \tag{1}$$

и единичные сферы пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$

$$X=\{x[N]:\|x\|_{\mathcal{X}}\le 1\},$$
$$Y=\{y[M]:\|y\|_{\mathcal{Y}}\le 1\} \tag{2}$$

с множествами крайних точек $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ соответственно. Так как $\|A\|=\max\limits_{x\in X}\|Ax\|_{\mathcal{Z}}$ (см., например, [2], стр. 99), то отыскание нормы оператора A представляет собой решение следующей задачи оптимального программирования:

ж) Здесь и дальше используются обозначения векторов, матриц и действий над ними, введенные в [1].

ЗАДАЧА I. Найти максимум функции (I) на множестве (2). Введем функцию

$$G(x,y)=(Ax,y)=y[M]\times a[M,N]\times x[N].$$

Известно (см., например, [2], стр. 279), что

$$\|A\|=\|A^*\|=\max_{\{x,y\}\in X\times Y} G(x,y).$$

Поэтому для отыскания нормы оператора A вместо задачи I могут быть решены

ЗАДАЧА II. Найти $\max\limits_{y\in Y}\|A^*y\|_T$.

ЗАДАЧА III. Найти $\max\limits_{\{x,y\}\in X\times Y} G(x,y)$ являющаяся расширением каждой из предыдущих задач, причем задачи I, II и III имеют оптимальные векторы.

Так как функция цели (I) выпукла, то X содержит оптимальный вектор задачи I, аналогично Y содержит оптимальный вектор задачи II. ([3], стр. 106).

Значит, поставленные задачи можно переформулировать так.

ЗАДАЧА I. Найти $\max\limits_{x\in X}\|Ax\|_Z$.

ЗАДАЧА II. Найти $\max\limits_{y\in Y}\|A^*y\|_T$.

Если $x^0[N]$ – оптимальный вектор задачи I, то по следствию к теореме Хана-Банаха ([2], стр. 135, теорема 2) можно найти такой $y^0[M]$, что $\{x^0,y^0\}$ – оптимальный вектор задачи III, а сам $y^0[M]$ – оптимальный вектор задачи II. Аналогично, зная оптимальный вектор задачи II, можно найти оптимальные векторы задач III и I. Наконец, если $\{x^0,y^0\}$ – оптимальный вектор задачи III, то

$$\|A\|=G(x^0,y^0)\le\|Ax^0\|_Z\cdot\|y^0\|_Y\le\|Ax^0\|_Z,$$
$$\|A^*\|=G(x^0,y^0)\le\|x^0\|_X\cdot\|A^*y^0\|_T\le\|A^*y^0\|_T,$$

так что x^0 и y^0 являются оптимальными векторами задач I и II соответственно. Таким образом, решение любой из задач I, II или III обеспечивает нахождение и $\|A\|=\|A^*\|$, и оптимальных векторов всех этих задач.

Из выпуклости функций цели задач I и II следует многоэкстремальность этих задач, препятствующая применению к их решению методов, основанных на последовательном улучшении плана.

§ 2. I. Пусть $\mathcal{X} = m_\nu$, $\mathcal{Z} = \ell_\mu$. Тогда $\mathcal{Y} = m_\mu$, $\mathcal{T} = \ell_\nu$. В $m_\nu (m_\mu)$ норма определяется равенством

$$\|x\| = \max_{j\in N} |x[j]| \quad \left(\|y\| = \max_{i\in M} |y[i]| \right),$$

а в $\ell_\mu (\ell_\nu)$ - равенством

$$\|z\| = \sum_{i\in M} |z[i]| \quad \left(\|t\| = \sum_{j\in N} |t[j]| \right).$$

Применительно к этому случаю

$$\overline{X} = \{x[N] : x[j] \in \{-1, +1\},\ \forall j \in N\}, \tag{3}$$

$$\overline{Y} = \{y[M] : y[i] \in \{-1, +1\},\ \forall i \in M\}, \tag{4}$$

и задачи I и II конкретизируются следующим образом.

ЗАДАЧА I. Найти максимум $\sum_{i\in M} |a[i,N] \times x[N]|$ на множестве (3).

ЗАДАЧА II. Найти максимум $\sum_{j\in N} |y[M] \times a[M,j]|$ на множестве (4).

Очевидно, что если $x^\circ[N]$ является оптимальным вектором задачи I, то соответствующим оптимальным вектором задачи II является

$$y^\circ[M] = \{\operatorname{sign} a[i,N] \times x^\circ[N]\}\ ^{*)}; \tag{5}$$

а для оптимального вектора задачи II - $y^\circ[M]$ соответствующим оптимальным вектором задачи I является

$$x^\circ[N] = \{\operatorname{sign}\ y^\circ[M] \times a[M,j]\}.^{*)} \tag{6}$$

Так как задача I (II) многоэкстремальна, то возможно существование такого $x^\circ[N]$ ($y^\circ[M]$), что для

$$\Omega_{x^\circ} = \{x^k \in \overline{X} : x^k[j] = x^\circ[j], j \neq k,\ x^k[k] = -x^\circ[k],\ k \in N\}, \tag{7}$$

$$\left(\Omega_{y^\circ} = \{y^s \in \overline{Y} : y^s[i] = y^\circ[i],\ i \neq s,\ y^s[s] = -y^\circ[s],\ s \in M\}\right), \tag{8}$$

---

*) Считаем $\operatorname{sign} 0 = 1$.

$$\max_{x\in\Omega_{x^0}} \|Ax\|_{\ell_\mu} \le \|Ax^0\|_{\ell_\mu} \quad (\max \|A^*y\|_{\ell_\nu} \le \|A^*y^0\|_{\ell_\nu}),$$

тогда как $\|A\| > \|Ax^0\|_{\ell_\mu}$ $(\|A\| > \|A^*y^0\|_{\ell_\nu})$. Такой вектор $x^0[N]$ $(y^0[M])$ будем в дальнейшем называть точкой локального максимума задачи I (П).

Множество (3) ((4)) конечно, значит, задачу I (П) можно, вообще говоря, решить за конечное число шагов. Так как $\|Ax\| = \|A(-x)\|$, $(\|A^*y\| = \|A^*(-y)\|)$ и множество (3) ((4)) симметрично относительно $O[N]$ $(O[M])$, то для этого достаточно перебрать в лексикографическом порядке ([4], стр. 108) элементы множества

$$\hat{X} = \{x \in \overline{X} : x[1] = 1\} \quad (\hat{Y} = \{y \in \overline{Y} : y[1] = 1\}).$$

Этих элементов - $2^{\nu-1}$ $(2^{\mu-1})$, так что практически такой перебор осуществим лишь при небольших значениях ν (μ).

2. Если и ν и μ достаточно велики, обратимся к задаче Ш. Не умаляя общности, считаем $\mu \le \nu$.

Пусть x^0 - фиксированный элемент множества (2). Тогда

$$\max_{y\in Y} G(x^0, y) = G(x^0, y^0), \tag{9}$$

где $y^0[M] \in \overline{Y}$ определяется равенством (5). Аналогично, при фиксированном $y^0 \in Y$

$$\max_{x\in X} G(x, y^0) = G(x^0, y^0), \tag{10}$$

где $x^0[N] \in \overline{X}$ определяется из (6). Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА I. Множество $\overline{X}\times\overline{Y}$ содержит оптимальный вектор задачи Ш $\{x^0, y^0\}$, у которого $x^0[N]$ и $y^0[M]$ связаны соотношениями (5) и (6).

Решая задачу Ш, будем искать именно этот вектор, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь тех значений билинейной функции $G(x, y)$, которые она принимает на множестве $\overline{X}\times\overline{Y}$.

Пусть $\{x^0, y^0\}$ - фиксированный, а $\{x, y\}$ - свободный элементы множества $\overline{X}\times\overline{Y}$. Обозначим

$$M_y = \{ i \in M : y[i] = -y^\circ[i] \}, \tag{11}$$

$$N_x = \{ j \in N : x[j] = x^\circ[j] \}. \tag{12}$$

(В частности, может оказаться, что $M_y = \Lambda$ или $N_x = \Lambda$).

$$G(x,y) - G(x^\circ, y^\circ) = y[M] \times a[M,N] \times x[N] - y^\circ[M] \times a[M,N] \times x^\circ[N] =$$
$$= -y^\circ[M_y] \times a[M_y, N_x] \times x^\circ[N_x] + y^\circ[M_y] \times a[M_y, N \setminus N_x] \times x^\circ[N \setminus N_x] +$$
$$+ y^\circ[M \setminus M_y] \times a[M \setminus M_y, N_x] \times x^\circ[N_x] -$$
$$- y^\circ[M \setminus M_y] \times a[M \setminus M_y, N \setminus N_x] \times x^\circ[N \setminus N_x] - y^\circ[M] \times a[M,N] \times x^\circ[N].$$

Таким образом,

$$G(x,y) - G(x^\circ, y^\circ) = -2y^\circ[M_y] \times a[M_y, N_x] \times x^\circ[N_x] -$$
$$- 2y^\circ[M \setminus M_y] \times a[M \setminus M_y, N \setminus N_x] \times x^\circ[N \setminus N_x].$$

Введем обозначение:

$$\Delta(\bar{M}, \bar{N}) = y^\circ[\bar{M}] \times a[\bar{M}, \bar{N}] \times x^\circ[\bar{N}] + y^\circ[M \setminus \bar{M}] \times a[M \setminus \bar{M}, N \setminus \bar{N}] \times x^\circ[\bar{N}]. \tag{13}$$

Тогда

$$G(x,y) - G(x^\circ, y^\circ) = -2\Delta(M_y, N_x). \tag{14}$$

Отсюда получается следующий критерий оптимальности для $\{x^\circ, y^\circ\} \in \bar{X} \times Y$.

ТЕОРЕМА 2. Чтобы $\{x^\circ[N], y^\circ[M]\}$ был оптимальным вектором задачи Ш, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\min_{\substack{\bar{M} \subset M \\ \bar{N} \subset N}} \Delta(\bar{M}, \bar{N}) = 0. \tag{15}$$

Теперь пусть $x^\circ[N]$ – фиксированный элемент множества (3), $y^\circ[M]$ определяется равенством (5), x^k – некоторый элемент множества (7) и $y^k = \{ \operatorname{sign} a[i,N] \times x^k[N] \}$. Введем

$$M_K=\{i\in M: y^\circ[i]\cdot(a[i,N]\times x^\circ[N]-2a[i,K]\,x^\circ[K])<0\}. \quad (16)$$

Тогда $M_{y^K}=M_K$, $N_{x^K}=N\setminus\{K\}$. Пусть $\xi[N]$ – вектор, у которого $\xi[j]=\Delta(M_j, N\setminus\{j\})$ для всех $j\in N$. На основании (13)

$$\xi[j]=y^\circ[M_j]\times a[M_j,N]\times x^\circ[N]+y^\circ[M]\times a[M,j]\cdot x^\circ[j]-$$
$$-2y^\circ[M_j]\times a[M_j,j]\cdot x^\circ[j], \quad (17)$$

а на основании (14)

$$\|Ax^K\|_{\ell_p}-\|Ax^\circ\|_{\ell_p}=G(x^K,y^K)-G(x^\circ,y^\circ)=-2\xi[K].$$

Из последнего равенства выводится критерий локального максимума задачи I :

ТЕОРЕМА 3. $x^\circ\in\overline{X}$ является точкой локального максимума задачи I тогда и только тогда, когда

$$\xi[N]\geqslant 0[N]. \quad (18)$$

Аналогично, если $y^\circ[M]$ – элемент множества (4), $x^\circ[N]$ определяется равенством (6)

$$N_S=\{j\in N: y^\circ[M]\times a[M,j]\times x^\circ[j]-2a[s,j]\times x^\circ[j]\times y^\circ[s]<0\} \quad (19)$$

и $\eta[M]$ – вектор, у которого

$$\eta[i]=y^\circ[M]\times a[M,N_i]\times x^\circ[N_i]+y^\circ[i]\times a[i,N]\times x^\circ[N]-$$
$$-2y^\circ[i]\times a[i,N_i]\times x^\circ[N_i] \quad (20)$$

для всех $i\in M$, то критерий локального максимума задачи II дает

ТЕОРЕМА 4. $y^\circ\in\overline{Y}$ является точкой локального максимума задачи II тогда и только тогда, когда

$$\eta[M]\geqslant 0[M]. \quad (21)$$

Установим ряд предложений, которые используются в дальнейшем для решения задачи III.

ЛЕММА I. $\Delta(\overline{M},\overline{N})=\Delta(M\setminus\overline{M},N\setminus\overline{N})$.

Доказательство сразу следует из равенства (I3).

ЛЕММА 2. Пусть $\{x^\circ, y^\circ\} \in \overline{X} \times \overline{Y}$ таков, что $x^\circ[N]$ и $y^\circ[M]$ связаны соотношениями (5) и (6) и являются точками локальных максимумов задач I и П соответственно.[ж)] Тогда при выполнении одного из равенств:

1^0. $|\overline{N}| = 0$,

2^0. $|\overline{N}| = 1$,

3^0. $|\overline{N}| = \nu - 1$,

4^0. $|\overline{N}| = \nu$,

5^0. $|\overline{M}| = 0$,

6^0. $|\overline{M}| = 1$,

7^0. $|\overline{M}| = \mu - 1$,

8^0. $|\overline{M}| = \mu$

$$\Delta(\overline{M}, \overline{N}) \geqslant 0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1^0. Если $|\overline{N}| = 0$, то из равенств (I3) и (5) получим

$$\Delta(\overline{M}, \Lambda) = y^\circ[M \setminus \overline{M}] \times a[M \setminus \overline{M}, N] \times x^\circ[N] = \sum_{i \in M \setminus M_0} |a[i, N] \times x^\circ[N]| \geqslant 0$$

3^0. Пусть $|\overline{N}| = \nu - 1$, то есть $\overline{N} = N \setminus \{k\}$, где k - некоторый элемент N. Тогда из (9), (I4) и (I6) следует

$$\Delta(M, N) \geqslant \Delta(M_k, N \setminus \{k\}) = \xi[k].$$

Отсюда на основании теоремы 3 получается $\Delta(\overline{M}, \overline{N}) \geqslant 0$.

2^0. (4^0). Если $|N| = \nu$ ($|N| = 1$), то $|N \setminus \overline{N}| = 0$ ($|N \setminus \overline{N}| = \nu - 1$), и неравенство $\Delta(\overline{M}, \overline{N}) \geqslant 0$ следует из леммы I и пункта 1^0 (3^0). Пункты 5^0, 6^0, 7^0, 8^0 доказываются аналогично, только вместо равенства (5), (9), (I6) и теоремы 3 используются равенства (6), (I0), (I9) и теорема 4.

ж) Существование таких $\{x^\circ, y^\circ\}$ следует из теоремы I.

Таким образом, если $\{x^0, y^0\}$ подчиняется условию леммы 2, то, применяя к нему критерий оптимальности, можно искать минимум только по таким $\bar{M} \subset M$, $\bar{N} \subset N$, для которых выполняются неравенства:

$$2 \leq |\bar{M}| \leq \mu - 2 \ , \ 2 \leq |\bar{N}| \leq \nu - 2 \ . \qquad (22)$$

Введем некоторые обозначения:
Пусть $b[M,N]$ – матрица с элементами

$$b[i,j] = a[i,j] \cdot y^0[i] \cdot x^0[j] \ , \qquad (23)$$

$C[M,N]$ – матрица с элементами

$$c[i,j] = \begin{cases} b[i,j], & (i \in \bar{M}, j \in \bar{N}) \vee (i \in M \setminus \bar{M}, j \in N \setminus \bar{N}) \\ 0 \ , & (i \in \bar{M}, j \in N \setminus \bar{N}) \vee (i \in M \setminus \bar{M}, j \in \bar{N}) \end{cases} ; \qquad (24)$$

$N^-(M_1, N_1)$ множество индексов:

$$N^-(M_1, N_1) = \{ j \in N \setminus N_1 : \mathbb{1}[M_1] \times b[M_1, j] < 0 \}, \qquad (25)$$

$$K_i = \{k_1, k_2\} \subset N : b[i,k_1] + b[i,k_2] = \min \ (b[i,j_1] + b[i,j_2]), i \in M, \ \{j_1, j_2\} \subset N \ . \qquad (26)$$

На основании (23) и (24) равенство (13) можно переписать в виде:

$$\Delta(\bar{M}, \bar{N}) = \mathbb{1}[M] \times C[M,N] \times \mathbb{1}[N]. \qquad (13)$$

Справедлива

ЛЕММА 3. Если $\bar{M}$, $\bar{N}$ удовлетворяют неравенства (22), M_1 – произвольное подмножество M и

$$\delta = \mathbb{1}[M_1] \times b[M_1, N^-(M_1, \Lambda)] \times \mathbb{1}[N^-(M_1, \Lambda)] + \\ + \sum_{i \in M \setminus M_1} b[i, K_i \cup N^-(i, K_i)] \times \mathbb{1}[K_i \cup N^-(i, K_i)], \qquad (27)$$

то $\Delta(\bar{M}, \bar{N}) \geq \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании равенства (13′)

$$\Delta(\bar{M}, \bar{N}) = \mathbb{1}[M_1] \times C[M_1, N] \times \mathbb{1}[N] + \mathbb{1}[M \setminus M_1] \times C[M \setminus M_1, N] \times \mathbb{1}[N] \ .$$

Из определения (24) следует :

$$\mathbb{1}[M_1]\times c[M_1,j]=\begin{cases}\mathbb{1}[M_1]\times b[M_1,j], & j\in\bar{N}\\ 0 & , j\in N\setminus\bar{N}\end{cases}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{1}[M_1]\times c[M_1,j]\geqslant\min\{\mathbb{1}[M_1]\times b[M_1,j],0\}.$$

Поэтому

$$\mathbb{1}[M_1]\times c[M_1,N]\times\mathbb{1}[N]\geqslant\sum_{j\in N^-(M_1,\Lambda)}\mathbb{1}[M]\times b[M_1,j]=$$
$$=\mathbb{1}[M_1]\times b[M_1,N^-(M_1,\Lambda)]\times\mathbb{1}[N^-(M_1,\Lambda)].$$

Из неравенств (22) следует, что для каждого $i\in M$ найдутся такие $j_1,j_2\in N$, что $c[i,j_1]=b[i,j_1]$, $c[i,j_2]=$ $=b[i,j_2]$, значит, для любого $i\in M$

$$c[i,N]\times\mathbb{1}[N]\geqslant b[i,K_i]\times\mathbb{1}[K_i]+b[i,N^-(i,K_i)]\times\mathbb{1}[N^-(i,K_i)],$$

где K_i и $N^-(i,K_i)$ определяются из формул (26) и (25). Но тогда

$$\mathbb{1}[M\setminus M_1]\times c[M\setminus M_1,N]\times\mathbb{1}[N]\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i\in M\setminus M_1}b[i,K_i\cup N^-(i,K_i)]\times\mathbb{1}[K_i\cup N^-(i,K_i)],$$

откуда следует утверждение леммы.

Сходными рассуждениями устанавливается

ЛЕММА 4. Если $\bar{M}$, $\bar{N}$ удовлетворяют неравенства (22), $M_1\subset\bar{M}$, $M_2\subset M\setminus\bar{M}$,

$$\delta=\sum_{j\in N}\min\{\mathbb{1}[M_1]\times b[M_1,j],\mathbb{1}[M_2]\times b[M_2,j]\}+$$
$$+\sum_{i\in M\setminus M_1\setminus M_2}b[i,K_i\cup N^-(i,K_i)]\times\mathbb{1}[K_i\cup N^-(i,K_i)], \tag{28}$$

то $\Delta(\bar{M},\bar{N})\geqslant\delta$.

При доказательстве этой леммы следует учесть, что

$$\mathbb{1}[M_1 \cup M_2] \times c[M_1 \cup M_2, j] = \begin{cases} \mathbb{1}[M_1] \times b[M_1, j], & j \in \overline{N} \\ \mathbb{1}[M_2] \times b[M_2, j], & j \in N \setminus \overline{N} \end{cases}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\overline{M}$ - некоторое фиксированное подмножество M. Тогда $\min\limits_{N_1 < N} \Delta(\overline{M}, N_1) = \Delta(\overline{M}, \overline{N})$, где

$$\overline{N} = \{ j \in N : \mathbb{1}[\overline{M}] \times b[\overline{M}, j] \leq \mathbb{1}[M \setminus \overline{M}] \times b[M \setminus \overline{M}, j] \}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме $M_1 = \overline{M}$, $M_2 = M \setminus \overline{M}$. Тогда второе слагаемое в равенстве (28) исчезнет и окажется для любого $N_1 < N$

$$\Delta(\overline{M}, N_1) = \sum_{j \in N} \min\{\mathbb{1}[\overline{M}] \times b[\overline{M}, j], \mathbb{1}[M \setminus \overline{M}] \times b[M \setminus \overline{M}, j]\} =$$

$$= \sum_{j \in \overline{N}} \mathbb{1}[\overline{M}] \times b[\overline{M}, j] + \sum_{j \in N \setminus \overline{N}} \mathbb{1}[M \setminus \overline{M}] \times b[M \setminus \overline{M}, j] = \Delta(\overline{M}, \overline{N}),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, применяя к какому-нибудь вектору критерий оптимальности, можно вместо всевозможных пар подмножеств $(\overline{M}, \overline{N})$ рассматривать только всевозможные подмножества $\overline{M} < M$, так как "лучшее" $\overline{N}$ для каждого $\overline{M}$ однозначно определяется формулой (29).

3. Для решения задачи III предлагается алгорифм, состоящий из двух частей. В 1 части находится вектор, удовлетворяющий условию леммы 2; во 2 части к нему применяется критерий оптимальности и, если он оказывается не оптимальным, находится "лучший" вектор.

I часть. Запись*) содержит $\{x^\circ[N], y^\circ[M]\}$, где x° - некоторый вектор из множества (3), а y° определяется соотношением (5). Начальная запись, например, такова:

$$\{x^\circ[N] = \mathbb{1}[N], \; y^\circ[M] = \{\operatorname{sign} a[i, N] \times \mathbb{1}[N]\}\}.$$

Правила перехода от одной записи к другой:

I°. Найти $x = x^\circ$ из равенства (6), где y° - вектор, фигурирующий в записи. а/ Если x° из записи не равен найденному x, положить x° равным x, определить новое y° из равенства (5) и вернуться к пункту I°.

---

*) Информация о состоянии вычислительного процесса [I], стр.19).

б) В противном случае (x^0 и y^0 связаны соотношениями (5) и (6)) перейти к пункту 2^0.

2^0. Применение критерия локального максимума задачи I. По формулам (I6) и (I7) найти $M_1, \ldots, M_\nu; \xi[N]$; проверить выполнение условия (I8). а) Если оно не выполняется, перейти к пункту 3^0. б) Если оно выполняется (по теореме 3 $x^0[N]$ – точка локального максимума задачи I), перейти к пункту 4^0.

3^0. Найти какой-нибудь K, для которого $\xi[K] = \min\limits_{j\in N} \xi[j]$ положить x^0 равным x^K из множества (7); найти новое y^0 по формуле (5); вернуться к пункту I^0.

4^0. Применение критерия локального максимума задачи II. По формулам (I9) и (20) найти $N_1, \ldots, N_\mu, \eta[M]$; проверить выполнение условия (2I). а) Если оно не выполняется, перейти к пункту 5^0. б) Если оно выполняется (по теореме 4 $y^0[M]$ – точка локального максимума задачи II), то $\{x^0, y^0\}$ – искомый вектор. I-ю часть закончить, перейти ко II-й части, предварительно выработав матрицу $B[M,N]$ по формуле (23).

5^0. Определить какой-нибудь S, для которого $\eta[S] = \min\limits_{i\in M} \eta[i]$; найти y^S из множества (8); определить x^0 из равенства (6), полагая в нем $y^0 = y^S$; найти новое y^0 из (5); вернуться к пункту I^0.

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе применения I части алгорифма новые записи $\{x^0, y^0\}$ появляются в пунктах 3^0, 5^0 и в случае а) пункта I^0. Новая запись, сменившая старую в пунктах 3^0 или 5^0, содержит вектор, обеспечивающий по сравнению с вектором из старой записи строго большее значение функции $G(x,y)$. Если новая запись появилась в пункте I^0, то из формул (9) и (I0) следует, что соответствующее новое значение функции $G(x,y)$ не меньше старого. Предположим, что оно равно старому значению. Пусть $\{x^0, y^0\}$ – старая запись, а $\{x, y\}$ – новая. Тогда $G(x,y) = G(x,y^0) = G(x^0,y^0)$.
Если N_x – множество (I2), то из предыдущего равенства вытекает: $G(x,y^0) = \sum\limits_{j\in N} |y^0[M] \times a[M,j]| = G(x^0,y^0) =$

$$= \sum_{j\in N_x} |y^0[M] \times a[M,j]| - \sum_{j\in N \setminus N_x} |y^0[M] \times a[M,j]|.$$

Отсюда следует, что

$$y^{\circ}[M] \times a[M, N \setminus N_x] = 0[N \setminus N_x]; \quad x^{\circ}[N \setminus N_x] = -1[N \setminus N_x].^{*)}$$

Таким образом, в случае сохранения величины $G(x^{\circ}, y^{\circ})$ при переходе от $x^{\circ}[N]$ к $x[N]$ происходит только замена некоторых координат, равных - I, координатами, равными I. Поэтому невозможно зацикливание процесса. Тогда из теоремы I следует, что искомый вектор, подчиняющийся условию леммы 2, будет найден через конечное число шагов.

П часть. Идея второй части алгорифма состоит в том, что для применения к найденному вектору критерия оптимальности (теоремы 2) методом ветвей и границ осуществляется неявный перебор всевозможных пар подмножеств индексов вида $(\overline{M}, M \setminus \overline{M})$ и находится $\Delta(\overline{M}, \overline{N})$ ($\overline{N}$ определяется из формулы /29/), или его нижняя граница. На основании леммы 2 $\Delta(\overline{M}, \overline{N})$ ищется только в том случае, когда $\overline{M}$ подчиняется условиям (22). Воспользуемся терминами: решение, частичное решение, продолжение частичного решения из [I]. Множество решений, продолжающих данное частичное решение (M_1, M_2), обозначается $\mathcal{P}(M_1, M_2)$. В качестве множеств, подвергающихся ветвлению, как и в [I], будут фигурировать $\mathcal{P}(M_1, M_2)$, а в качестве способа ветвления - включение некоторого индекса $i \in M \setminus M_1 \setminus M_2$ в M_1 или M_2. Принимается схема одностороннего ветвления, подобная схеме, предложенной в [I] для реализации аддитивного алгорифма Балаша [5], причем при построении продолжений частичных решений рассматриваются, пока возможно, продолжения с увеличением длины множества M_1. На каждом полученном в результате ветвления множестве решений $\mathcal{P}(M_1, M_2)$ ищется нижняя граница для $\min\limits_{(\overline{M}, M \setminus \overline{M}) \in \mathcal{P}(M_1, M_2)} \Delta(\overline{M}, \overline{N})$ (применяются леммы 3 и 4). Если она оказывается неотрицательной, множество $\mathcal{P}(M_1, M_2)$ из дальнейшего рассмотрения исключается.

Если множество решений $\mathcal{P}(M_1, M_2)$ получилось в результате ветвления при переходе к продолжению частичного решения с увеличением длины M_1, ищется $\Delta(M_1, N_1)$, где N_1 определяется из (29) при $\overline{M} = M_1$. Если $\Delta(M_1, N_1) < 0$, то перебор прекращается.

ж) См. примечание на стр. I24

Имея в виду в случае существования решения $(\overline{M}, M\setminus\overline{M})$, для которого $\Delta(\overline{M}, \overline{N})<0$, как можно скорее найти это решение, а в противном случае как можно скорее убедиться в его отсутствии, целесообразно упорядочить элементы следующим образом: Для каждого $i\in M$ по формуле (25) определить $N^{-}(i,\Lambda)$. Пусть

$$M^{-}=\{i\in M: N^{-}(i,\Lambda)\neq\Lambda\}\neq\Lambda .$$

(В противном случае $\{x^{\circ}, y^{\circ}\}$ – безусловно оптимальный вектор задачи Ш). Нужно найти какое-нибудь $i^{\circ}\in M^{-}$, для которого

$$b[i^{\circ}, N^{-}(i^{\circ},\Lambda)]\times 1[N^{-}(i^{\circ},\Lambda)]=\min_{i\in M^{-}} b[i, N^{-}(i,\Lambda)]\times 1[N^{-}(i,\Lambda)],$$

и положить $i_1=i^{0}$. Если $i_1, i_2,\ldots, i_\lambda$ уже выбраны и $|M^{-}|>\lambda$, то следует найти какое-нибудь i', для которого

$$b[i', N^{-}(i',\Lambda)]\times 1[N^{-}(i',\Lambda)]=\min_{i\in M^{-}\setminus\{i_1,\ldots,i_\lambda\}} b[i, N^{-}(i,\Lambda)]\times 1[N^{-}(i,\Lambda)],$$

и положить $i_{\lambda+1}=i'$. Если же $|M^{-}|\leq\lambda$, то найти i'', для которого

$$b[i'', K_{i''}]\times 1[K_{i''}]=\min_{i\in M\setminus\{i_1,\ldots,i_\lambda\}} b[i, K_i]\times 1[K_i],$$

и положить $i_{\lambda+1}=i''$. (K_i определяется формулой (26)). На основании леммы I в алгорифме перебираются только те решения $(\overline{M}, M\setminus\overline{M})$, для которых $i_1\in\overline{M}$.

Запись во второй части алгорифма содержит

$$M_1=\{i_1, i_{\ell_2},\ldots, i_{\ell_\lambda}\},\quad \lambda=|M_1|,\quad M_2=\bigcup_{q=1}^{\lambda} M_{2q},$$

где $M_{2q}=\{i_\ell\in M_2: \ell_q<\ell<\ell_{q+1}\}$, $\gamma=|M_1|+|M_2|$, $\Delta(M_1,N_1)$ (N_1 определяется формулой (29) при $\overline{M}=M_1$) и δ – нижнюю границу для $\min\limits_{(\overline{M}, M\setminus\overline{M})\in\mathcal{P}(M_1,M_2)}\Delta(\overline{M},\overline{N})$, которая определяется из (27) или (28). Начальная запись содержит

$$M_1=\{i_1\},\ \lambda=1,\ M_2=M_{21}=\Lambda,\ \gamma=1,\ \Delta(M_1,N_1)=1.$$

$$\delta=b[i_1, N^{-}(i_1,\Lambda)]\times 1[N^{-}(i_1,\Lambda)]+$$

$$+\sum_{i\in M\setminus\{i_1\}} b[i, K_i\cup N^{-}(i,K_i)]\times 1[K_i\cup N^{-}(i,K_i)],$$

где $N(i, K_i)$, K_i определяются равенствами (25) и (26), а δ – равенством (27). $\Delta(M_1, N_1)$ не вычисляется, а просто полагается равным любому неотрицательному числу, так как $|M_1|=1$.

Правила перехода от одной записи к другой.

I^0. а) Если $\Delta(M_1, N_1)<0$, перейти к пункту 4^0.

б) Если $\Delta(M_1, N_1)\geqslant 0$, $\delta<0$, перейти к пункту 2^0.

в) Если $\Delta(M_1, N_1)\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$, перейти к пункту 3^0.

2^0. Если $\lambda<\mu-2$, включить в M_1 $i_{\gamma+1}$, т.е. положить $i_{\ell_{\lambda+1}}=i_{\gamma+1}$; образовать $M_{2\lambda+1}=\Lambda$; найти новое значение $\Delta(M_1, N_1)$; вычислить новое δ по формуле (27), если $i_{\ell_\lambda}=i_\lambda$, и по формуле (28) в противном случае; положить λ равным $\lambda+1$, $\gamma-\gamma+1$; вернуться к пункту I^0.

б) Если $\lambda=\mu-2$, перейти к пункту 3^0. (Так как в этом случае $\mathcal{P}(M_1, M_2)$, кроме $(M_1, M\setminus M_1)$, может содержать лишь такие решения $(\bar{M}, M\setminus\bar{M})$, в которых $\bar{M}$ не удовлетворяет неравенствам (22), то есть по лемме 2

3^0. а) Если $\lambda>1$, то из M_1 изъять i_{ℓ_λ}; множество $M_{2\lambda}$ аннулировать; в $M_{2\lambda-1}$ добавить i_{ℓ_λ}; положить λ равным $\lambda-1$; найти новое γ; новое δ вычислить по формуле (28); вернуться к пункту I^0.

б) Если $\lambda=1$, $\{x^\circ[N], y^\circ[M]\}$ – оптимальный вектор;

$$\|A\|=\|Ax^\circ\|_{\ell_\mu}=1[M]\times b[M,N]\times 1[N].$$

4^0. Выработка "лучшего" вектора. Найти x, для которого $N_1=N_x$ из формулы (I2), то есть положить

$$x[N_1]=x^\circ[N_1], \quad x[N\setminus N_1]=-x^\circ[N\setminus N_1],$$

положить $x^\circ[N]$ равным найденному $x[N]$; $y^\circ[M]$ определить из равенства (5); вернуться к пункту I^0 первой части.

Из (9) следует, что полученный вектор обеспечивает $\max\limits_{y\in Y} G(x^\circ; y)$, а вектор $\{x^\circ; y\}$, где y таков, что $M_1=M_y$ из равенства (II) "лучше" старого вектора $\{x^\circ; y^\circ\}$ на основании равенства (I4).

§ 3. Нормы линейных операторов, переводящих m_ν в R_μ и R_ν в ℓ_μ.

I. Пусть по-прежнему $\mathcal{X}=m_\nu$, но $\mathcal{Y}=R_\mu$ – евклидово пространство. Тогда $\mathcal{Z}=R_\mu$, $\mathcal{T}=\ell_\nu$. В этом случае получается следующая

ЗАДАЧА I. Найти максимум $\sqrt{\sum_{i\in M}(a[i,N]\times x[N])^2}$ на множестве (3).

Если ν невелико, то задачу I можно решить, осуществив перебор элементов множества X, как предлагалось в первом пункте предыдущего параграфа.

Если ν велико, то воспользуемся очевидным равенством

$$\|Ax\|_{R_\mu}=\sqrt{(Ax,Ax)}=\sqrt{(A^*Ax,x)},$$

из которого следует

$$\|A\|=\sqrt{\max_{x\in X}(A^*Ax,x)}\,. \tag{30}$$

Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{D}=A^*A$ и обозначим соответствующую ему матрицу $d[N,N]$.

$$\mathcal{D}\in m_\nu\to\ell_\nu \qquad d[i,j]=a[M,i]\times a[M,j].$$

На основании равенства (30) заключаем, что вместо задачи I может быть решена

ЗАДАЧА IУ. Найти максимум $x[N]\times d[N,N]\times x[N]$ на множестве (3). Но $d[N,N]$ – симметричная положительная матрица, поэтому ([6], стр. 145)

$$\max_{x\in X} x[N]\times d[N,N]\times x[N]=\max_{\{x,y\}\in X\times X} y[N]\times d[N,N]\times x[N],$$

причем если

$$\max_{\{x,y\}\in X\times X} y[N]\times d[N,N]\times x[N]=y^\circ[N]\times d[N,N]\times x^\circ[N],$$

то $x^\circ[N]$ и $y^\circ[N]$ являются оптимальными векторами задачи IУ.

Таким образом, решение задачи I свелось к решению задачи III из предыдущего параграфа, в которой роль матрицы $a[M,N]$ играет матрица $d[N,N]$.

2. Положим теперь $\mathcal{X}=R_\nu$, $\mathcal{Z}=\ell_\mu$. Тогда $\mathcal{Y}=m_\mu$, $\mathcal{T}=R_\nu$, $A\in R_\nu\to\ell_\mu$. В этом случае ставятся следующим образом

ЗАДАЧА I. Найти максимум $\sum_{i\in M} |a[i,N] \times x[N]|$ на множестве

$$X = \left\{ x[N] : \sum_{j\in N} x^2[j] \le 1 \right\}$$

и

ЗАДАЧА II. Найти максимум $\sqrt{\sum_{j\in N} |y[M] \times a[M,j]|^2}$ на множестве (4).

Но решение задачи II описано в предыдущем пункте, только теперь в случае обращения к задаче III роль матрицы $a[M,N]$ играет положительная симметричная $e[M,M]$, у которой

$$e[i,j] = a[i,N] \times a[j,N].$$

Решив задачу II, находим $\|A^*\| = \|A\|$ и оптимальный вектор задачи II $y^\circ[M]$. Тогда оптимальный вектор задачи I – $x^\circ[N]$ таков:

$$x^\circ[j] = \frac{y^\circ[M] \times a[M,j]}{\|A\|}.$$

3. Пусть у оператора $A \in m_\nu \to R_\mu$ есть обратный. Тогда $Ax \neq O[M]$ при $x[N] \neq O[N]$, то есть симметричная положительная матрица $d[N,N]$ из п.I неособенная, так что

$$x[N] \times d[N,N] \times x[N] > 0$$

при $x[N] \neq O[N]$ и ([6], стр.145), если $\{x^\circ[N], y^\circ[N]\}$ – оптимальный вектор задачи III, то $x^\circ[N] = y^\circ[N]$ – оптимальный вектор задачи I. В этом случае из теоремы I вытекает

ТЕОРЕМА I'. Множество (3) содержит оптимальный вектор задачи IУ $x^\circ[N]$, для которого выполняется соотношение

$$x^\circ[N] = \{\operatorname{sign} a[i,N] \times x^\circ[N]\}. \tag{31}$$

Так как оптимальный вектор задачи III, к которой свелась задача I имеет теперь вид $\{x^\circ, x^\circ\}$, то для проверки оптимальности вектора $\{x^\circ, x^\circ\}$ можно ограничиваться рассмотрением лишь таких множеств (II) и (I2), в которых $M_y = N \setminus N_x$. Для них из (I3)

$$\Delta(N\setminus N_x, N_x) = 2x^\circ[N_x]\times d[N_x, N\setminus N_x]\times x^\circ[N\setminus N_x].$$

Введем

$$\Delta_1(\bar N) = x^\circ[\bar N]\times d[\bar N, N\setminus \bar N]\times x^\circ[N\setminus \bar N]. \tag{32}$$

Тогда равенство (14) заменяется равенством

$$G(x,x) - G(x^\circ, x^\circ) = -4\Delta_1(N_x),$$

и критерий оптимальности вектора $x^\circ[N]$ дает

ТЕОРЕМА 2. Чтобы x° был оптимальным вектором задачи IУ, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\min_{\bar N\subset N} \Delta_1(\bar N) = 0 .$$

Теперь лемма I из предыдущего параграфа заменяется леммой I$'$:

$$\Delta_1(\bar N) = \Delta_1(N\setminus \bar N) .$$

Назовем $(\mathcal{D}x^\circ, x^\circ)$ локальным максимумом задачи IУ, если $(\mathcal{D}x^\circ, x^\circ) \geqslant (\mathcal{D}x^\kappa, x^\kappa)$ для всех x^κ из множества (7). Введем в рассмотрение вектор $\xi[N]$, у которого

$$\xi[j] = \Delta_1(\{j\}), \quad j\in N . \tag{33}$$

Тогда критерий локального максимума задачи IУ дает

ТЕОРЕМА 3. Чтобы x° был точкой локального максимума задачи IУ, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\xi[N] \geqslant O[N] . \tag{34}$$

Пусть $B[N,N]$ – матрица, определяемая из (23), где положено $a[M,N]=d[N,N]$, $y^\circ[M]=x^\circ[N]$. Справедливы

ЛЕММА 3$'$. Пусть N_1 – произвольное подмножество N, $N^-(N_1,N_1)$ определяется из (25),

$$\delta = \mathbb{1}[N_1]\times B[N_1, N^-(N_1,N_1)]\times \mathbb{1}[N^-(N_1,N_1)] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i\in N-N_1} b[i, N^-(i, N_1)] \times 1\!\!1[N^-(i, N_1)]. \qquad (35)$$

Тогда $\Delta_1(N) \geq \delta$.

и

ЛЕММА 4'. Пусть $N_1 \subset \bar{N}$, $N_2 \subset N \setminus \bar{N}$,

$$\delta = 1\!\!1[N_1] \times b[N_1, N_2] \times 1\!\!1[N_2] +$$

$$+\sum_{j\in N\setminus N_1\setminus N_2} \min\{1\!\!1[N_1] \times b[N_1, j],\ 1\!\!1[N_2] \times b[N_2, j]\} + \qquad (36)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i\in N\setminus N_1\setminus N_2} b[i, N^-(i, N_1\cup N_2)] \times 1\!\!1[N^-(i, N_1\cup N_2)].$$

Тогда $\Delta_1(\bar{N}) \geq \delta$.

Наконец, имеет место используемая в дальнейшем

ТЕОРЕМА 5. Если $d[N,N]$ - симметричная положительная неособенная матрица, то для любых x^0, $y^0 \in \bar{X}$, $x^0 \neq y^0$ справедливо неравенство:

$$(\mathcal{D}x^0, y^0) < \max\{(\mathcal{D}x^0, x^0), (\mathcal{D}y^0, y^0)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{N} = \{j \in N : y^0[j] = x^0[j]\}$
Тогда $y^0[N\setminus\bar{N}] = -x^0[N\setminus\bar{N}] \neq 0[N\setminus\bar{N}]$;

$$(\mathcal{D}x^0, y^0) = y^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, \bar{N}] \times x^0[\bar{N}] +$$

$$+ y^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, N\setminus\bar{N}] \times x^0[N\setminus\bar{N}] + y^0[N\setminus\bar{N}] \times d[N\setminus\bar{N}, \bar{N}] \times$$

$$\times x^0[\bar{N}] + y^0[N\setminus\bar{N}] \times d[N\setminus\bar{N}, N\setminus\bar{N}] \times x^0[N\setminus\bar{N}].$$

При этом $y^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, \bar{N}] \times x^0[\bar{N}] =$

$$= x^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, \bar{N}] \times x^0[\bar{N}] = y^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, \bar{N}] \times y^0[\bar{N}];$$

$$y^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, N\setminus\bar{N}] \times x^0[N\setminus\bar{N}] + y^0[N\setminus\bar{N}] \times d[N\setminus\bar{N}, \bar{N}] \times x^0[\bar{N}] = 0$$

$$x^0[\bar{N}] \times d[\bar{N}, N\setminus\bar{N}] \times x^0[N\setminus\bar{N}] + x^0[N\setminus\bar{N}] \times d[N\setminus\bar{N}, \bar{N}] \times x^0[\bar{N}] =$$

$$=2x^\circ[\bar N]\times d[\bar N, N\setminus\bar N]\times x^\circ[N\setminus\bar N]=2y^\circ[\bar N]\times d[\bar N, N\setminus\bar N]\times y^\circ[N\setminus\bar N].$$

Таким образом,

$$y^\circ[\bar N]\times d[\bar N, N\setminus\bar N]\times x^\circ[N\setminus\bar N]+y^\circ[N\setminus\bar N]\times d[N\setminus\bar N,\bar N]\times x^\circ[\bar N]\le$$

$$\le\max\{x^\circ[\bar N]\times d[\bar N, N\setminus\bar N]\times x^\circ[N\setminus\bar N]+x^\circ[N\setminus\bar N]\times d[N\setminus\bar N,\bar N]\times$$

$$\times x^\circ[\bar N], y^\circ[\bar N]\times d[\bar N, N\setminus\bar N]\times y^\circ[N\setminus\bar N]+y^\circ[N\setminus\bar N]\times d[N\setminus\bar N,\bar N]\times$$

$$\times y^\circ[\bar N]\}.$$

Наконец,

$$y^\circ[N\setminus\bar N]\times d[N\setminus\bar N, N\setminus\bar N]\times x^\circ[N\setminus\bar N]=$$

$$=-x^\circ[N\setminus\bar N]\times d[N\setminus\bar N, N\setminus\bar N]\times x^\circ[N\setminus\bar N]=$$

$$=-y^\circ[N\setminus\bar N]\times d[N\setminus\bar N, N\setminus\bar N]\times y^\circ[N\setminus\bar N]<0,$$

так как для $x[\bar N]=0[\bar N]$, $x[N\setminus\bar N]=x^\circ[N\setminus\bar N]$,

$$(\mathcal{D}x,x)>0.$$

Значит, действительно

$$(\mathcal{D}x^\circ,y^\circ)\le\max\{(\mathcal{D}x^\circ;x^\circ),(\mathcal{D}y^\circ,y^\circ)\}.$$

4. Алгорифм решения задачи IУ в случае неособенной матрицы $d[N,N]$ представляет собой незначительную модификацию алгорифма решения задачи Ш, изложенного в предыдущем параграфе. Теперь в I части алгорифма находится вектор $x^\circ[N]\in X$, подчиняющийся соотношению (3I), в котором функция цели задачи IУ достигает локального максимума, а во второй части к этому вектору применяется критерий оптимальности – теорема 2'.

I часть. Запись содержит $x^\circ[N]$.
Начальная запись – $x^\circ[N]=1[N]$.
Правила перехода от одной записи к другой.

I$^\circ$. Найти y° по формуле (5). а) Если $y^\circ\ne x^\circ$, положить x° равным y° и вернуться к пункту I$^\circ$. (Из неравенства (9) и теоремы 5 при этом получим:

$$x^{\circ}[N] \times d[N,N] \times x^{\circ}[N] < y^{\circ}[N] \times d[N,N] \times x^{\circ}[N] <$$
$$< y^{\circ}[N] \times d[N,N] \times y^{\circ}[N],$$

значит, новая запись обеспечивает строго большее значение функции цели по сравнению со старой записью).

б) Если $y^{\circ}[N] = x^{\circ}[N]$, перейти к пункту 2^0.

2^0. Определить $\xi[N]$ из (33); проверить выполнение условия (34).

а) Если оно не выполняется, перейти к пункту 3^0. б) Если оно выполняется, $x^{\circ}[N]$ – искомый. I-ю часть закончить; перейти к 2-й части алгоритма, предварительно выработав матрицу $b[N,N]$, у которой $b[i,j] = x^{\circ}[i]\, d[i,j]\, x^{\circ}[j]$.

3^0. Найти какой-нибудь K, для которого $\xi[K] = \min \xi[j], j \in N$; положить x° равным x^{K} из множества (7); вернуться к пункту 1^0. (В новой записи появился вектор, обеспечивающий строго большее значение целевой функции по сравнению с вектором из старой записи).

Так как каждая новая запись обеспечивает строго большее значение $(\mathcal{D}x, x)$, то на основании теоремы I' искомый вектор $x^{\circ}[N]$ находится при применении I части алгорифма за конечное число шагов.

II часть. По сравнению с пунктом 3 из § 2 изменяется способ упорядочивания элементов множества N. Сначала нужно найти $i_0, j_0 \in N$, для которых

$$b[i_0, j_0] = \min_{i,j \in N} b[i,j] ,$$

и положить $j_1 = i_0$, $j_2 = j_0$.
Если $N_1 = \{j_1, \ldots, j_\lambda\}$ уже выбрано, найти

$$\min_{\substack{i \in N \setminus N_1 \\ j \in N_1}} b[i,j] = b[i', j_\ell]$$

и положить $j_{\lambda+1} = i'$.

На основании лемм I и 2 в алгорифме опять перебираются лишь те решения $(\bar{N}, N \setminus \bar{N})$, для которых $\bar{N}$ содержит j_1 и подчиняется неравенствам (22).

Запись содержит

$$N_1=\{j_1, j_{\ell_2}, \dots, j_{\ell_\lambda}\},\ \lambda=|N_1|,\quad N_2=\bigcup_{q=1}^{\lambda} N_{2q},$$

$$(N_{2q}=\{j_\ell \in N_2 : \ell_q < \ell < \ell_{q+1}\}),\quad \gamma=|N_1|+|N_2|,$$

$\Delta_1(N_1)$, определяемое формулой (32), и нижнюю границу для

$$\min_{(\bar N, N\setminus\bar N)\in P(N_1,N_2)} \Delta_1(\bar N)-\delta ,$$

определяемую из равенства (35) или (36).

Начальная запись:

$$N_1=\{j_1\},\ \lambda=1,\quad N_2=N_{21}=\Lambda,\ \gamma=1,\ \Delta_1(N_1)=1,$$

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{i\in N} b[i, N^-(i,\Lambda)]\times \mathbb{1}[N^-(i,\Lambda)].$$

Правила перехода от одной записи к другой аналогичны соответствующим правилам алгорифма из предыдущего параграфа, а именно

1^0. а) Если $\Delta_1(N_1)<0$, перейти к пункту 4^0.

б) Если $\Delta_1(N_1)\geqslant 0,\ \delta<0$, перейти к пункту 2^0.

в) Если $\Delta_1(N_1)\geqslant 0,\ \delta\geqslant 0$, перейти к пункту 3^0.

2^0. а) Если $\lambda<\vartheta-2$, включить $j_{\gamma+1}$ в N_1 ; образовать $N_{2\lambda+1}=\Lambda$, найти новое значение $\Delta_1(N_1)$ из (32); определить δ из равенства (35), если $j_{\ell_\lambda}=j_\lambda$, и из равенства (36) в противном случае; положить λ равным $\lambda+1$, γ равным $\gamma+1$; вернуться к пункту 1^0.

б) Если $\lambda=\vartheta-2$, перейти к пункту 3^0.

3^0. а) Если $\lambda>1$, то изъять из N_1 j_{ℓ_λ} ; множество $N_{2\lambda}$ аннулировать; в $N_{2\lambda-1}$ добавить j_{ℓ_λ} ; положить λ равным $\lambda-1$; найти новое γ ; новое δ вычислить по формуле (36); вернуться к пункту 1^0.

б) Если $\lambda=1$, применение алгорифма закончить, $x^0[N]$ — оптимальный вектор, $\|A\|=\sqrt{\mathbb{1}[N]\times b[N,N]\times\mathbb{1}[N]}$.

4^0. Найти x , для которого $N_1=N_x$ из формулы (12); положить x^0 равным этому x ; вернуться к пункту 1^0 1 части алгорифма.

§ 4. Нормы линейных операторов, переводящих m_ϑ в ℓ_μ^p и ℓ_ϑ^p в ℓ_μ .

I. Рассмотрим обобщение задач из § 2 и пункта I § 3, а именно положим $\mathcal{X}=m_\nu$, а $Z=\ell_\mu^p$.
Норма в ℓ_μ^p, как обычно, определяется равенством

$$\|z\| = \left\{\sum_{i\in M} |z[i]|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Применительно к этому случаю

ЗАДАЧА I такова. Найти максимум $\left\{\sum_{i\in M} |a[i,N]\times x[N]|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ на множестве (3).

При небольшом значении ν эту задачу легко решить, осуществив полный перебор элементов множества X из 1 пункта § 2 в лексикографическом порядке.

Если ν велико, можно решать задачу I, осуществляя неявный перебор элементов множества (3) с помощью метода ветвей и границ. Каждый $x[N]\in X$ характеризуется разбиением множества N на непересекающиеся подмножества

$$N_+=\{j\in N : x[j]=1\} \quad \text{и} \quad N_-=\{j\in N : x[j]=-1\}, \tag{37}$$

то есть решением (N_+, N_-). В качестве множеств, подвергающихся ветвлению в методе ветвей и границ, здесь опять будут фигурировать множества решений $\mathcal{P}(N_1, N_2)$, продолжающих данное частичное решение (N_1, N_2):

$$\mathcal{P}(N_1,N_2)=\{(N_+,N_-) : N_+\supset N_1,\ N_-\supset N_2,\ N_+\cup N_-=N\}.$$

В качестве способа ветвления снова выбирается включение некоторого $j\in N\setminus N_1\setminus N_2$ в N_1 или в N_2. Как и прежде, принимается схема одностороннего ветвления, причем при построении продолжений частичного решения рассматриваются, пока возможно, продолжения с увеличением длины множества N_1. На каждом полученном в результате ветвления множества решений $\mathcal{P}(N_1,N_2)$ ищется верхняя граница для функции цели задачи I - оценка σ. Если она оказывается меньше ранее найденного "рекорда" ([I], стр.20), множество $\mathcal{P}(N_1;N_2)$ из дальнейшего рассмотрения исключается.

Пусть $a_{\overline{N}}[M,N]$ - матрицы, у которых

$$a_{\overline{N}}[M,j]=\begin{cases} a[M,j], & j\in\overline{N}, \\ 0[M], & j\in N\setminus\overline{N} \end{cases}. \tag{38}$$

Им соответствуют операторы $A_{\overline{N}} \in m_\nu \to \ell^p_\mu$. Если $N_1, \dots, N_\lambda$ – непересекающиеся подмножества N и $N = \bigcup_{s=1} N_s$, то имеем очевидное равенство

$$A = \sum_{s=1}^{\lambda} A_{N_s} .$$

Процедура упорядочивания элементов множества N проводится следующим образом:

I) Найти какой-нибудь j^o, для которого

$$\|a[M,j^o]\|_{\ell^p_\mu} = \max_{j \in N} \|a[M,j]\|_{\ell^p_\mu} ;$$

найти какой-нибудь $j' \in N \setminus \{j^o\}$, для которого

$$\| A_{\{j^o,j'\}} \| = \max_{j \in N \setminus \{j^o\}} \| A_{\{j^o,j\}} \| ,$$

где $A_{\{j^o,j\}}$ определяются формулой (38), а

$$\| A_{\{j^o,j\}} \| = \max \left\{ \left(\sum_{i \in M} |a[i,j^o] + a[i,j]|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sum_{i \in M} |a[i,j^o] - a[i,j]|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}, \tag{40}$$

положить $j_1 = j^o$, $j_2 = j'$

2) Найти $j'' \in N \setminus \{j_1, j_2\}$, для которого

$$\|a[M,j'']\|_{\ell^p_\mu} = \min_{j \in N \setminus \{j_1,j_2\}} \|a[M,j]\|_{\ell^p_\mu} ,$$

найти $j''' \in N \setminus \{j_1, j_2, j''\}$, для которого

$$\| A_{\{j'',j'''\}} \| = \min_{j \in N \setminus \{j_1,j_2,j''\}} \| A_{\{j'',j\}} \| ,$$

положить $K_1 = j''$, $K_2 = j'''$ и образовать $\mathfrak{p} = \{K_1, K_2\}$.

Когда $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_\alpha$ образованы, найти $\overline{j} \in N \setminus \bigcup_{s=1}^{\alpha} \mathfrak{p}_s \setminus \{j_1, j_2\}$, для которого

$$\|a[M,\overline{j}]\|_{\ell^p_\mu} = \min_{j \in N \setminus \bigcup_{s=1}^{\alpha} \mathfrak{p}_s \setminus \{j_1,j_2\}} \|a[M,j]\|_{\ell^p_\mu} ,$$

найти $\overline{\overline{j}} \in N \setminus \bigcup_{s=1}^{\alpha} \mathfrak{p}_s \setminus \{j_1, j_2, \overline{j}\}$, для которого

$$\| A_{\{\overline{j},\overline{\overline{j}}\}} \| = \min_{j \in N \setminus \bigcup_{s=1}^{\alpha} \mathfrak{p}_s \setminus \{j_1,j_2,\overline{j}\}} \| A_{\{\overline{j},j\}} \| ,$$

где $\| A\{\bar{j}, j\} \|$ определяются формулой (40), положить $k_{2\alpha+1} = \bar{j}$, $k_{2\alpha+2} = \bar{\bar{j}}$; образовать $K^{\alpha+1} = \{k_{2\alpha+1}, k_{2\alpha+2}\}$

Процесс закончить, когда множество N будет исчерпано; при этом в случае нечетного ν последнее образованное подмножество множества $N - K^{\lambda}$ содержит только один элемент – $k_{\nu-2}$.

3) Положить $j_3 = k_{\nu-2}, j_4 = k_{\nu-3}, \ldots, j_\nu = k_1$.

На основании равенства (39), (38), определения и свойств нормы линейного оператора справедливы

ЛЕММА 5. Пусть $x \in N]$ - элемент множества (3), $\overset{\circ}{N}_+$ и N_- - определяются формулами (37),

$$N_1 \subset \overset{\circ}{N}_+, \; N_2 \subset N_-, \; N_1 \cup N_2 = \{j_1, j_2\} \cup \bigcup_{s=\alpha+1}^{\lambda} K^s,$$

где K^s - множества, полученные в процессе упорядочивания N,

$$\sigma = \Big\{ \sum_{i \in M} |a[i, N_1] \times 1\!\!1[N_1] - a[i, N_2] \times 1\!\!1[N_2]|^p \Big\}^{\frac{1}{p}} + \sum_{s=1}^{\alpha} \| A_{K^s} \| .$$

Тогда $\| Ax \|_{\ell_\mu^p} \leq \sigma$.

ЛЕММА 6. Если при сохранении прочих условий леммы 5

$$N_1 \cup N_2 = \{j_1, j_2, j_{\nu-2\alpha+1}\} \cup \bigcup_{s=\alpha+1}^{\lambda} K^s;$$

$$\sigma = \Big\{ \sum_{i \in M} |a[i, N_1] \times 1\!\!1[N_1] - a[i, N_2] \times 1\!\!1[N_2]|^p \Big\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\alpha-1} \| A_{K^s} \| + \| a[M, j_{\nu-2\alpha+2}] \|_{\ell_\mu^p},$$

то $\| Ax \|_{\ell_\mu^p} \leq \sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $N_1 \cup N_2 = N$, то $\sigma = \| A\bar{x} \|_{\ell_\mu^p}$, где $\bar{x} \in \bar{X}$ таков, что N_1 и N_2 являются для него N_+ и N_- из (37).

Так как множество (3) симметрично относительно $O \in N]$, а $\| Ax \|_{\ell_\mu^p} = \| A(-x) \|_{\ell_\mu^p}$, можно ограничиваться перебором только таких решений (N_+, N_-), для которых $j_1 \in N_+$.

2. В предлагаемом алгорифме запись содержит

$$N_1 = \{j_1, j_{\ell_2}, \ldots, j_{\ell_\lambda}\}, \quad \lambda = |N_1|,$$

$$N_2 = \bigcup_{q=1}^{\lambda} N_{2q}, \quad \text{где} \quad N_{2q} = \{j_\ell \in N_2 : \ell_q < \ell < \ell_{q+1}\},$$

$\gamma = |N_1| + |N_2|$; σ , определяемую из равенств (42) или (4I), и информацию о рекорде - лучший из найденных пока векторов $x^\circ[N]$ и норму его образа $\|Ax^\circ\|$.

Начальная запись:

$$N_1 = \{j_1, j_2, \ldots, j_\nu\}, \ \lambda = \nu, \ N_{2q} = \Lambda \ (q = 1, \ldots, \nu), \ \gamma = \nu,$$

$$\sigma = 0, \ x^\circ[N] = \mathbb{1}[N], \ \|Ax^\circ\| = \Big\{\sum_{i \in M} |a[i,N] \times \mathbb{1}[N]|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

Правила перехода от одной записи к другой.

I^0. а) Если $\sigma > \|Ax^\circ\|$, перейти к пункту 2^0.

б) Если $\sigma \le \|Ax^\circ\|$, перейти к пункту 3^0.

2^0. а) Если $\gamma < \nu$, включить $j_{\gamma+1}$ в N_1 ; образовать $N_{2\lambda+1}$; найти новое значение σ из равенства (4I), если γ имеет ту же четность, что и ν , и из равенства (42) в противном случае; положить λ равным $\lambda+1$; положить γ равным $\gamma+1$; вернуться к пункту I^0.

б) Если $\gamma = \nu$, то есть частичное решение (N_1 , N_2) является решением, образовать новый рекорд, положив

$$x^\circ[N_1] = \mathbb{1}[N_1], \ x^\circ[N_2] = -\mathbb{1}[N_2], \ \|Ax^\circ\| = \sigma,$$

перейти к пункту 3^0.

3^0. а) Если $\lambda > 1$, то изъять j_{ℓ_λ} из N_1 ; множество $N_{2\lambda}$ аннулировать; в $N_{2\lambda-1}$ добавить j_{ℓ_λ} ; положить λ равным $\lambda - 1$; вычислить новое γ , найти новое значение σ из равенства (4I), если γ имеет ту же четность, что и ν , и из равенства (42) в противном случае; вернуться к пункту I^0.

б) Если $\lambda = 1$, перебор закончить. $x^\circ[N]$, фигурирующий в записи оптимальный вектор, $\|A\| = \|Ax^\circ\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Исключение из рассмотрения возможно большего числа множеств существенно зависит от качества очередного рекорда, фигурирующего в записи. Поэтому целесообразно в случае, когда в (40)

$$\| A_{\{j^\circ, j'\}} \| = \left\{ \sum_{i \in M} | a[i, j^\circ] - a[i, j'] |^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

заменить матрицу $a[M, N]$ матрицей $\bar{a}[M, N]$, у которой

$$\bar{a}[M, j] = \begin{cases} a[M, j], & j \neq j' \\ -a[M, j'], & j = j' \end{cases}.$$

У соответствующего этой новой матрице оператора $\bar{A} : m_\nu \to \ell_\mu^p$ норма равна норме оператора A, а новый оптимальный вектор отличается от искомого лишь знаком одной координаты – $x[j']$.

3. Теперь положим $\mathcal{X} = \ell_\nu^p$, $\mathcal{Z} = \ell_\mu$. Тогда $A \in \ell_\nu^p - \ell_\mu$, $\mathcal{Y} = m_\mu$, $\mathcal{T} = \ell_\nu^{p'}$, где p' таков, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и $A^* \in m_\mu \to \ell_\nu^{p'}$. В этом случае множество (2) приобретает вид

$$X = \left\{ x[N] : \sum_{j \in N} | x[j] |^p \leq 1 \right\}, \tag{2'}$$

функция (I) –

$$f(x) = \sum_{i \in M} | a[i, N] \times x[N] |. \tag{I'}$$

ЗАДАЧА I, представляющая собой обобщение задачи I из пункта 2, § 3, формулируется следующим образом :
Найти максимум функции (I') на множестве (2').

ЗАДАЧА II. Найти максимум $\left\{ \sum_{j \in N} | y[M] \times a[M, j] |^{p'} \right\}^{\frac{1}{p'}}$ на множестве (4). Но это задача I из пункта I, в которой матрица $a[M, N]$ заменена транспонированной, и множество (3) – множеством (4). Если $y^\circ[M]$ – оптимальный вектор этой задачи, то

$$\| A \| = \| A^* y^\circ \|_{\ell_\nu^{p'}} = \| A x^\circ \|_{\ell_\mu},$$

где $x^\circ[N]$ – оптимальный вектор задачи I – имеет координаты

$$x^\circ[j] = \frac{| y^\circ[M] \times a[M, j] |^{p'-1} \cdot \operatorname{sign}(y^\circ[M] \times a[M, j])}{\| A \|^{\frac{p'}{p}}}.$$

Литература

1. Романовский И.В., Методы неявного перебора для решения задач целочисленного программирования с бивалентными переменами, Известия высших учебных заведений, математика, 4 (1970), 17-29.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1955.
3. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. "Мир", М., 1967.
4. Финкельштейн Ю.Ю., Корбут А.А. Дискретное программирование. "Наука", М., 1969.
5. Balas E., An additive algorithm for solving linear programms with zero-one variables, Oper. Res., 13:4(1965), 517-546.
6. Altman M., Bilinear programming, Bull. acad. pol. sci., 16:9(1968), 741-745.

Поступила в редакцию
15.V. 1971 г.