УДК 513.08

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А. Родин

Пусть $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ – ограниченная последовательность действительных чисел. Мультипликатором называют оператор, переводящий функцию

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

в функцию

$$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

В настоящей работе изучается последовательность в некотором смысле простейших мультипликаторов T_N, соответствующих последовательностям

$$\lambda^N = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{N+1}, 0, 0, \ldots).$$

Мультипликаторы T_N рассматриваются как операторы из L_2 в некоторые функциональные пространства, оцениваются их нормы. В терминах норм мультипликаторов T_N находится характеристическое свойство пространства $L_{1,\infty}$.

Пусть $\varphi(t)$ – возрастающая вогнутая на $[0, 2\pi]$ функция, $\varphi(0)=0$, $\varphi(2\pi)=1$. Через $\Lambda(\varphi)$ обозначим пространство Лоренца [1] измеримых на $[0, 2\pi]$ функций с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^{2\pi} x^*(t)\, d\varphi(t),$$

где $x^*(t)$ – перестановка в убывающем порядке функции [2], т.I, стр. 54.

ТЕОРЕМА I. Справедливы следующие неравенства:

$$C\Big[\sum_{K=1}^{N} \varphi^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \leq \|T_N\|_{L_2\to\Lambda(\varphi)} \leq A\Big[\sum_{K=1}^{N} \varphi^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}, \quad (\mathrm{I})$$

где A, C – абсолютные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала левую часть неравенства. Обозначим через Ω множество финитных выпуклых последовательностей, $\varkappa_{[\alpha,\beta]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[\alpha,\beta]$.

В силу монотонности нормы в $\Lambda(\varphi)$ имеем

$$\|T_N\|_{L_2\to\Lambda(\varphi)} \geq \sup_{\Omega}\Big\|\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{N}(a_K\cos Kt + a_K\sin Kt)\Big\|_{\Lambda(\varphi)} \geq$$
$$\geq \sup\Big\|\Big(\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{N} a_K\cos Kt\Big)\varkappa_{(0,\pi]}(t)+\Big(\sum_{K=1}^{N} a_K \sin Kt\Big)\varkappa_{(0,\pi]}(t)\Big\|_{\Lambda(\varphi)}. \quad (2)$$

Рассмотрим выпуклую, стремящуюся к нулю последовательность c_K. Функции $f(t)=\big(c_0/2+\sum_{K=1}^{\infty} c_K\cos Kt\big)\varkappa_{(0,\pi]}(t)$ и $g(t)=\big(\sum_{K=1}^{\infty} c_K\sin Kt\big)\varkappa_{(0,\pi]}(t)$ неотрицательны([2] т.I, стр. 294). Поэтому справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}[f^*(t)+g^*(t)] \leq [f(t)+g(t)]^* \quad (3)$$

для любых $t\in[0,2\pi]$. Пусть функция $c(t)$ – монотонно убывает и $c(K)=c_K$. Имеют место следующие два утверждения [3].

I) Пусть $g(t)=\sum_{K=1}^{\infty} c_K\sin Kt,\ c_K\downarrow 0$ и

$$\eta(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}c\big(\frac{1}{t}\big), & 0<t\leq 1\\ c_1, & 1\leq t\leq\pi\end{cases}.$$

Существуют положительные, не зависящие от t константы α_1, α_2, α_3, α_4 и $y_0>0$, такие, что

$$mes(t:\alpha_1|g(t)|>y)\leq\alpha_2\, mes(t:\eta(t)>y),$$

$$mes(t:\alpha_3|g(t)|>y)\geq\alpha_4\, mes(t:\eta(t)>y)$$

при $y>y_0$.

2) Пусть $f(t)=c_0/2+\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \cos kt,\ c_k\downarrow 0,\ \Delta^2 c_k\geq 0,$

$$\xi(t)=\int\limits_0^{1/t} s[c(s)-c(s+1)]\,ds.$$

Существуют положительные, не зависящие от t константы β_1, β_2, β_3, β_4 такие, что

$$mes(t:\beta_1|f(t)|>y)\leq\beta_2\, mes(t:\xi(t)>y),$$

$$mes(t:\beta_3|f(t)|>y)\geq\beta_4\, mes(t:\xi(t)>y)$$

при $y>a_0$.

Из этих утверждений вытекают следующие неравенства :

$$\begin{aligned} &f^*(t)\geq m_1\left[\frac{1}{\gamma_1 t}\, c\left(\frac{1}{\gamma_1 t}\right)\right],\\ &g^*(t)\geq m_2\int\limits_1^{1/\gamma_2 t} s[c(s)-c(s+1)]\,ds \end{aligned} \tag{4}$$

для $t\in(0,1]$, m_1, m_2, γ_1, γ_2 - константы не зависящие от t .

Положим $\tau=\max(\gamma_1,\gamma_2,1)$, $B=\min(m_1,m_2)$ и $q=\left[\frac{1}{\tau t}\right]$. Тогда из выпуклости и монотонности функции $c(t)$ и неравенств (4) получаем

$$\begin{aligned} f^*(t)+g^*(t)&\geq B\left\{\frac{1}{\tau t}\, c\left(\frac{1}{\tau t}\right)+\int\limits_1^{\frac{1}{\tau t}} s[c(s)-c(s+1)]\,ds\right\}\geq\\ &\geq B\left\{q c_q+\int\limits_1^{q} s[c(s)-c(s+1)]\,ds\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

для $t\in[0,1]$. Из (5) находим, что при $1/\tau(p+1)<t\leq 1/\tau p$, где p = 1,2,3,.... ;

$$f^*(t)+g^*(t)\geq B\cdot\sum_{k=1}^{p} c_k .$$

Таким образом,

$$f^*(t)+g^*(t)\geqslant B\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{p}c_k\Big)\cdot\varkappa_{\left(\frac{1}{2(p+1)},\frac{1}{2p}\right]}(t). \qquad (6)$$

Используя оценки (2), (3), (6), имеем

$$\|T_N\|_{L_2\to\Lambda(\varphi)}\geqslant\frac{1}{2}\sup_{\Omega}\Big\|\Big[\Big(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos kt\Big)\varkappa_{(0,\pi]}(t)\Big]^*+$$

$$+\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N}a_k\sin kt\Big)\varkappa_{(0,\pi]}(t)\Big]^*\Big\|_{\Lambda(\varphi)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{B}{2}\sup_{\Omega}\Big\|\sum_{p=1}^{N}\Big(\sum_{k=1}^{p}a_k\Big)\varkappa_{\left(\frac{1}{2(p+1)},\frac{1}{2p}\right]}(t)+\Big(\sum_{p=1}^{N}a_p\Big)\varkappa_{\left(0,\frac{1}{2(N+1)}\right]}(t)\Big\|_{\Lambda(\varphi)}=$$

$$=\frac{B}{2}\sup_{\Omega}\sum_{p=1}^{N}a_p\,\varphi\Big(\frac{1}{2p}\Big).$$

Как обычно, две функции или последовательности будем называть эквивалентными, если существуют константы d_1, d_2 такие, что $d_1\leqslant x(t)/y(t)\leqslant d_2$, соответственно $d_1\leqslant x_n/y_n\leqslant d_2$. Последовательность $\{\varphi(1/2p)\}$, вообще говоря, не является выпуклой, однако она эквивалентна выпуклой последовательности. Действительно, функция $h(t)=\varphi(1/2t)$ не убывает, а $h(t)/t$ не возрастает при $t\geqslant 1/2$. Хорошо известно, что в этом случае $h(t)$ эквивалентна некоторой возрастающей вогнутой функции $h_1(t)$, более точно,

$$h(t)\leqslant h_1(t)\leqslant 2h(t).$$

Тогда $\varphi(1/2t)$ будет эквивалентна невозрастающей выпуклой функции $h_2(t)=1/h_1(t)$.

Пусть

$$e_k=\frac{h_2(k)}{\Big[\sum_{i=1}^{N}h_2^2(i)\Big]^{\frac{1}{2}}},\quad k=1,2,3,\dots N.$$

Найдется такой номер $N_1<N$, что $e_{N_1}(i-N)/(N_1-N)\leqslant e_i$

для любого $1\leqslant i\leqslant N$. Положим

$$\bar e_k=\begin{cases}e_k, & 1\leqslant n\leqslant N_1,\\ e_{N_1}(k-N)/(N_1-N), & N_1<k\leqslant N,\\ 0, & k>N.\end{cases}$$

Очевидно, $\{\bar{e}_K\}_1^\infty \in \Omega$. Имеем

$$\sup_\Omega \sum_{K=1}^{N} a_K h_2(K) \geq \sum_{K=1}^{N} \bar{e}_K h_2(K) = \sum_{K=1}^{N_1-1} e_K h_2(K) + \sum_{K=N_1}^{N} \bar{e}_K h_2(K) =$$

$$= \sum_{K=1}^{N_1-1} \frac{h_2^2(K)}{\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}}} + \sum_{K=N_1}^{N} \bar{e}_K h_2(K). \tag{8}$$

Так как $\bar{e}_K \leq e_K = h_2(K)/\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}}$, то

$$\sum_{K=N_1}^{N} \bar{e}_K h_2(K) \geq \left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{K=N_1}^{N} (\bar{e}_K)^2 =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{K=N_1}^{N} \frac{e_{N_1}^2 (K-N)^2}{(N_1-N)^2} \geq \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}} e_{N_1}^2 (N-N_1) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot h_2^2(N_1)(N-N_1) \geq \frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{K=N_1}^{N} h_2^2(K).$$

Таким образом,

$$\sup_\Omega \sum_{K=1}^{N} a_K h_2(K) \geq \sum_{K=1}^{N_1-1} \frac{h_2^2(K)}{\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3} \sum_{K=N_1}^{N} \frac{h_2^2(K)}{\left[\sum_{i=1}^{N} h_2^2(i)\right]^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{3}\left[\sum_{K=1}^{N} h_2^2(K)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Используя эквивалентность последовательностей $\{h_2(K)\}$ и $\varphi(\frac{2\pi}{K})$ и неравенство (9), получаем

$$\|T_N\|_{L_2 \to \Lambda(\varphi)} \geq C\left[\sum_{K=1}^{N} \varphi^2\left(\frac{2\pi}{K}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим теперь $\|T_N\|_{L_2 \to \Lambda(\varphi)}$ сверху. Пусть $\|x\|_{L_2} = 1$ и $y = T_N x$. В силу равенства Парсеваля и неравенства Гёльдера $\|y\|_{L_2} \leq 1$, $\|y\|_{L_\infty} \leq \sqrt{N}$. Для вогнутой возрастающей функции справедливо неравенство $t \cdot \varphi'(t) \leq \varphi(t)$ для почти всех $t \in [0, 2\pi]$. Используя эту оценку и неравенство Гёльдера, имеем

$$\|y\|_{\Lambda(\varphi)}=\varphi(+0)\cdot\|y\|_{L_\infty}+\int_0^{2\pi/N} y^*(t)\varphi'(t)\,dt+\int_{\frac{2\pi}{N}}^{2\pi} y^*(t)\varphi'(t)\,dt \le$$

$$\le \varphi(+0)\sqrt{N}+\sqrt{N}\int_0^{\frac{2\pi}{N}}\varphi'(t)\,dt+\|y\|_{L_2}\Big(\int_{\frac{2\pi}{N}}^{2\pi}[\varphi'(t)]^2dt\Big)^{\frac12}\le$$

$$\le 2\Big[\sum_{K=1}^{N}\varphi^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac12}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\int_1^N\varphi^2\Big(\frac{2\pi}{s}\Big)ds\Big]^{\frac12}=$$

$$=2\Big[\sum_{K=1}^{N}\varphi^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac12}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\sum_{K=1}^{N-1}\int_K^{K+1}\varphi^2\Big(\frac{2\pi}{s}\Big)ds\Big)^{\frac12}\le A\cdot\Big[\sum_{K=1}^{N}\varphi^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac12}.$$

Таким образом,

$$\|T_N\|_{L_2\to\Lambda(\varphi)}\le A\cdot\Big[\sum_{K=1}^{N}\varphi^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac12}.$$

Теорема доказана.

Банахово пространство E измеримых на $[0,2\pi]$ функций называется симметричным, если

1) из $y(t)\in E$, $|x(t)|\le|y(t)|$ почти всюду на $[0,2\pi]$ вытекает $x(t)\in E$ и $\|x\|_E\le\|y\|_E$;
2) из $y(t)\in E$ и равноизмеримости функций $|x(t)|$ и $|y(t)|$ вытекает $x(t)\in E$ и $\|x\|_E=\|y\|_E$ [5].

Два банаховых пространства будем считать равными, если они совпадают, как множества, и имеют эквивалентные нормы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть E - симметричное пространство. Последовательность $\|T_N\|_{L_2\to E}$ эквивалентна последовательности $\sqrt{N}$ тогда и только тогда, когда $E=L_\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{D}_m(t)$ ядро Дирихле порядка m. Нетрудно показать, что для $2<p<\infty$

$$\|\mathcal{D}_N\|_{L_p}\asymp N^{\frac12-\frac1p}. \tag{10}$$

Достаточность условия следует из соотношения (10) и неравенства Гёльдера. Докажем необходимость. Согласно предположению существует константа C, не зависящая от N, такая

что
$$\|T_N\|_{L_2\to E}\geq C\sqrt{N}. \qquad (11)$$

Для симметричного пространства E справедливо вложение $\Lambda(\varphi_E)\subset E$, где $\varphi_E(t)=\|\chi_{[0,t]}(\tau)\|_E$ [4]. Известно, что норма в пространстве E слабее нормы пространства L_∞ тогда и только тогда, когда функция $\varphi_E(t)$ непрерывна в нуле [5]. Предположим, что нормы пространств E и L_∞ не эквивалентны, тогда норма в пространстве E слабее нормы L_∞ [4] и $\lim\limits_{t\to+0}\varphi_E(t)=0$. Из теоремы 1 и отмеченного выше вложения пространств вытекает

$$\|T_N\|_{L_2\to E}\leq\|T_N\|_{L_2\to\Lambda(\varphi_E)}\leq A\cdot\Big[\sum_{K=1}^{N}\varphi_E^2\Big(\frac{2\pi}{K}\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}=o(\sqrt{N}),$$

что противоречит неравенству (11). Полученное противоречие доказывает теорему.

Для оператора T_N, действующего из L_2 в L_p, $2\leq p<\infty$, имеет место утверждение, аналогичное теореме (4.4) [2] т.1, стр. 390.

Справедлива следующая оценка
$$C_1N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\leq\|T_N\|_{L_2\to L_p}\leq A_1N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, \qquad (12)$$

где C_1, A_1 – абсолютные константы. Для $p\geq 2$ правая часть следует из теоремы 1 и неравенства Гёльдера. Положим $x(t)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{K=1}^{N-1}\cos Kt$; тогда $\|x\|_{L_2}\leq\sqrt{N}$ и левая часть неравенства вытекает из соотношения (10).

Автор приносит благодарность Е.М.Семенову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Lorentz G.G., Some new functional spaces, Ann. Math., 51(1950) 35-55.

2. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т.1,2. "Наука", М., 1965.

3. Гулисашвили А.Б., Сообщ. АН Груз. ССР, 58 : 1 (1970).

4. Семенов Е.М., Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. ДАН СССР, 156, № 6 (1964).

5. Семенов Е.М., Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Доктор. диссертация. Воронеж, 1968.

Поступила в редакцию
28.УП. 1971 г.