УДК 513.88

О ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Е.Д. Посицельский

Пусть E – банахово пространство и $V=V(E)$ – множество всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств E. На множестве V может быть определена метрика

$$\rho(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|,\ \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}\|x-y\|\right\},$$

превращающая V в полное метрическое пространство [1].

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании такого отображения φ из V в E, что $\varphi(A)\in A$ и

$$\|\varphi(A)-\varphi(B)\|_E\le C\,\rho(A,B), \tag{1}$$

где C не зависит от A, B из V.

Мы докажем, что для конечномерных гильбертовых пространств ответ на этот вопрос положителен, и найдем наилучшее значение константы C в (1), для бесконечномерных банаховых пространств ответ отрицателен.

1^0. В дальнейшем нам понадобится переформулировать поставленную выше задачу в терминах двойственности Минковского. Опорной функцией множества $A\in V$ называют функцию

$$H_A(f)=\sup_{x\in A}f(x),$$

определенную на сопряженном пространстве E^*.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства опорных функций:

1. $H_A(f+g)\le H_A(f)+H_A(g)$; $H_A(\alpha f)=\alpha H_A(f)$; $(\alpha>0)$;

2. $H_{A+B}(f)=H_A(f)+H_B(f)$, где $A+B=\{z=x+y;\ x\in A,\ y\in B\}$;

3. $H_{\alpha A}(f)=H_A(\alpha\cdot f)$, где $\alpha A=\{z=\alpha x;\ x\in A\}$;

4. если $A\subset B$, то $H_A(f)\leq H_B(f)$;

5. $H_A(f)\neq H_B(f)$ для $A\neq B$;

6. $\rho(A,B)=\sup\limits_{\|f\|_{E^*}=1}|H_A(f)-H_B(f)|$;$(A,B\in V)$. (2)

2^0. Пусть E^n - n -мерное евклидово пространство, $S^{n-1}=\{z:\|z\|=1\}$ - единичная сфера, m - лебегова мера на S^{n-1}. Обозначим через $F(A)$ точку в E^n, на которой функционал

$$\Phi_A(x)=\int_{S^{n-1}}[H_A(f)-(x,f)]^2\,dm(f) \tag{3}$$

достигает своего минимума. Ниже будет показано, что отображение $A\mapsto F(A)$ удовлетворяет условию (I).

Покажем, что

$$\int_{S^{n-1}}(u,y)(u,x)\,dm(u)=C_n(x,y), \tag{4}$$

где C_n зависит только от n .

Пусть $e_1, e_2,\dots, e_n$ - ортонормированный базис в E^n . Без ограничения общности можно предполагать, что $x=e_1$. Обозначим $S^+=S^{n-1}\cap\{u=(u_1,u_2,\dots,u_n);\ u_n>0\}$ и $\bar{u}=(u_1,-u_2,\dots,-u_n)$, где $(u_1,u_2,\dots,u_n)=u$. Легко видеть, что $u(x,u)+\bar{u}(x,\bar{u})=2(x,u)^2\cdot x$. Отсюда

$$\int_{S^{n-1}}u(x,u)\,dm(u)=\int_{S^+}[u(x,u)+\bar{u}(x,\bar{u})]\,dm(u)=$$
$$=2x\int_{S^+}(x,u)^2\,dm(u)=x\int_{S^{n-1}}(x,u)^2\,dm(u).$$

В силу инвариантности меры m относительно вращений сферы S^{n-1}, C_n не зависит от x . Следовательно,

$$\int_{S^{n-1}}u(x,u)\,dm(u)=C_n\cdot x.$$

Умножая скалярно на $y\in E^n$ левую и правую части, получаем (4).

ЛЕММА I. Для каждого $A\in V(E^n)$ имеет место равенство:

$$F(A)=\frac{1}{C_n}\int_{S^{n-1}}u\cdot H_A(u)\,dm(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$X_A = F(A) - \frac{1}{c_n}\int_{S^{n-1}} u H_A(u)\,dm(u)$$

и покажем, что $X_A = 0$. Согласно определению $F(A)$, имеет место неравенство

$$\int_{S^{n-1}} [H_A(f) - ([F(A)-X_A], f)]^2 dm(f) \geq \int_{S^{n-1}} [H_A(f) - (F(A), f)]^2 dm(f).$$

Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\int_{S^{n-1}} [H_A(f) - \frac{1}{c_n}\int_{S^{n-1}} (u,f) H_A(u)\,dm(u)]^2 dm(f) \geq$$

$$\geq \int_{S^{n-1}} [H_A(f) - \frac{1}{c_n}\int_{S^{n-1}} (u,f) H_A(u)\,dm(u)]^2 dm(f) + \int_{S^{n-1}} (X_A, f)^2 dm(f) -$$

$$-2\int_{S^{n-1}} H_A(f)(X_A, f)\,dm(f) + \frac{2}{c_n}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} (u,f)(X_A, f) H_A(u)\,dm(u)\,dm(f).$$

Меняя в последнем слагаемом порядок интегрирования и пользуясь (4), имеем

$$\int_{S^{n-1}} H_A(f)(X_A, f)\,dm(f) = \frac{1}{c_n}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} (u,f)(X_A, f) H_A(u)\,dm(u)\,dm(f).$$

С учетом полученного равенства из (5) вытекает, что

$$\int_{S^{n-1}} (X_A, f)^2 dm(f) \leq 0.$$

Это возможно только в случае $X_A = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. *Для всех $A, B \in V(E^n)$ справедлива оценка*

$$\|F(A) - F(B)\|_{E^n} \leq \frac{2V_{n-1}}{V_n}\rho(A,B). \qquad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись леммой I и неравенством (2), получаем

$$\|F(A) - F(B)\|_{E^n} = \sup_{\|y\|=1} ([F(A) - F(B)], y) =$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \frac{1}{c_n}\int (u,y)(H_A(u) - H_B(u))\,dm(u) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_n}\sup_{\|y\|=1}\int_{S^{n-1}} |(u,y)|\,|H_A(u) - H_B(u)|\,dm(u) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_n}\sup_{\|y\|=1}\int_{S^{n-1}} |(u,y)|\,dm(u)\cdot\rho(A,B) =$$

$$= \frac{1}{C_n}\int_{S^{n-1}} |u_1|\, dm(u)\cdot \rho(A,B).$$

Пусть $U_{E^{n-1}}(0,1)=\{u: \|u\|\le 1, u_1=0\}$, μ – лебегова мера в $U_{E^{n-1}}(0,1)$, V_n – объем единичного шара в E^n. Нетрудно подсчитать, что

$$\int_{S^{n-1}} |u_1|\, dm(u) = 2\int_{U_{E^{n-1}}(0,1)} d\mu(u) = 2V_{n-1}$$

$$C_n = \int_{S^{n-1}} |u_1|^2\, dm(u) = 2\int_{U_{E^{n-1}}(0,1)} \sqrt{1-\|u\|^2}\, d\mu(u) = V_n .$$

Теорема доказана.

Покажем, что оценка (6) точна. Пусть

$$A_\varepsilon = conv(S^+(0,1+\varepsilon)\cup[-S^+(0,1)]),\ B_\varepsilon = -A_\varepsilon .$$

Тогда $\|F(A_\varepsilon)-F(B_\varepsilon)\|_{E^n} \ge ([F(A_\varepsilon)-F(B_\varepsilon)], e_n) =$

$$= \frac{1}{C_n}\int_{S^{n-1}} u_n [H_{A_\varepsilon}(u)-H_{B_\varepsilon}(u)]\, dm(u).$$

Очевидно $H_{A_\varepsilon}(u)-H_{B_\varepsilon}(u)\ge 0$, когда $u_n \ge 0$ и $H_{A_\varepsilon}(u)-H_{B_\varepsilon}(u)\le 0$, когда $u_n\le 0$. Кроме того, $H_{A_\varepsilon}(u)-H_{B_\varepsilon}(u)=\varepsilon$ при $u\in Q_\varepsilon$, где $Q_\varepsilon=\{u:\|u\|=1;\ u_n\ge \frac{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}{1+\varepsilon}\}$. Поэтому

$$\|F(A_\varepsilon)-F(B_\varepsilon)\|_{E^n} \ge \frac{1}{C_n}\int_{S^{n-1}} |u_n|\cdot|H_{A_\varepsilon}(u)-H_{B_\varepsilon}(u)|\, dm(u) \ge$$

$$\ge \frac{2\varepsilon}{C_n}\int_{Q_\varepsilon} u_n\, dm(u) = \frac{2}{C_n}\int_{Q} u_n\, dm(u)\cdot\rho(A_\varepsilon,B_\varepsilon).$$

Так как $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{C_n}\int_{Q_\varepsilon} u_n\, dm(u) = \frac{2V_{n-1}}{V_n}$, то оценка (6) точна, т.е.

$$\|F\| = \frac{2V_{n-1}}{V_n}, \tag{7}$$

где

$$\|F\| = \sup_{A,B\in V(E)} \frac{\|F(A)-F(B)\|_E}{\rho(A,B)} .$$

ТЕОРЕМА 2. $F(A)\in A$ для любого $A\in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $F(A)\bar\in A$ для некоторого $A\in V$. Тогда существует такое $B\in V$, что $0\bar\in B, F(B)=0$ и $x_n\ge 1$ для всех $x\in B$. Обозначим через $\bar u$ вектор, симметричный u относительно подпространства $x_n=0$. Тогда

$$\int_{S^{n-1}} uH_B(u)\,dm(u)=\int_{S^+}[uH_B(u)+\bar{u}H_B(\bar{u})]\,dm(u).$$

Так как $H_B(u)\geqslant H_B(\bar{u})$ для $u\in S^+$ и $H_B(e_n)>H_B(\bar{e}_n)$, то последняя координата вектора $\int_{S^{n-1}} uH_B(u)\,dm(u)$ положительна. С другой стороны, $\int_{S^{n-1}} uH_B(u)\,dm(u)=C_n\cdot F(B)=0$. Полученное противоречие доказывает теорему. Точку

$$\frac{1}{V_n}\int_{S^{n-1}} uH_A(u)\,dm(u)$$

называют штейнеровской точкой [7] выпуклого множества A, а отображение $A\longrightarrow F(A)$ – штейнеровским проектором.

Пусть B^n – n-мерное нормированное пространство. Хорошо известно [5], что существует изоморфизм T пространства B^n на E^n, для которого $\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\leqslant\sqrt{n}$. Из теорем I и 2 следует, что отображение $P=T^{-1}FT$ есть липшицев проектор из $V(B^n)$ на B^n, удовлетворяющий условиям $P(A)\in A$, $\|P\|\leqslant\frac{2V_{n-1}}{V_n}\sqrt{n}$.

Заметим, что правая часть полученного неравенства зависит только от n и не зависит от пространства.

3^0. Покажем, что на штейнеровском проекторе F достигается наименьшая возможная константа C в (I), для случая $E=E^n$ – евклидово пространство. Точнее говоря, имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varPhi$ – липшицев проектор из $V(E^n)$ на E^n. Тогда $\|\varPhi\|\geqslant\|F\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения Линденштраусса [4], убеждаемся, что

$$\varPhi_1 x=\int_{V(E^n)}\int_{E^n}[\varPhi(x+y+z)-\varPhi(y+z)]\,dm(z)\,dm(y),$$

где интегралы нужно понимать так же, как в [4], есть линейный ограниченный проектор из $V(E)$ на E^n и $\|\varPhi_1\|\leqslant\|\varPhi\|$.

Пусть G_n – группа изометрий пространства E^n, μ – нормированная, правоинвариантная мера на G^n [3], $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}\in G^n$. Рассмотрим оператор $\varPhi_2$, определенный равенством

$$\varPhi_2 x=\int_{G^n}\mathcal{Y}^{-1}\varPhi_1\mathcal{Y}x\,dm(\mathcal{Y}).$$

Очевидно, $\varPhi_2$ есть линейный проектор из $V(E^n)$ на и $\|\varPhi_2\|\leqslant\|\varPhi_1\|$. Кроме того,

$$\varphi_2(\gamma x)=\int_{G^n} \mathcal{Y}^{-1}\varphi_1 \mathcal{Y}\gamma x\, dm(\mathcal{Y})=\int_{G^n} \gamma\gamma^{-1}\mathcal{Y}^{-1}\varphi_1 \mathcal{Y}\gamma x\, dm(\mathcal{Y})=$$
$$=\gamma\int_{G^n} \gamma^{-1}\mathcal{Y}^{-1}\varphi_1 \mathcal{Y}\gamma\, dm(\mathcal{Y}\gamma)=\gamma\varphi_2 x.$$

В работе К.Шмита [7] показано, что непрерывный линейный проектор из $V(E^n)$ на E^n, коммутирующий с изометриями, есть штейнеровский проектор. Таким образом, $\varphi_2=F$ и, следовательно, $\|\varphi\|\geqslant\|F\|$. Теорема доказана.

Теперь перейдем к изучению бесконечномерного случая.

ТЕОРЕМА 4. Пусть E - бесконечномерное банахово пространство и φ - такое отображение $V(E)$ на E, что $\varphi(A)\in A$. Тогда φ не липшицево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Согласно теореме Дворецкого [6], для любого $\varepsilon>0$ и натурального n существует n-мерное подпространство $B^n\subset E$, ε - изометричное евклидовому E^n. Тогда φ_n - сужение φ на $V(B^n)$ есть липшицев проектор $V(B^n)$ на B^n. Очевидно, что $\|\varphi\|\geqslant\|\varphi_n\|$. В силу ε-изометричности пространств B^n и E^n, теоремы 3 и (7)

$$\|\varphi\|\geqslant\|\varphi_n\|\geqslant\frac{2V_{n-1}}{V_n(1+\varepsilon)}$$

для любого n. Но нетрудно подсчитать, что

$$\frac{V_{n-1}}{V_n}\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi}},$$

то есть $\|\varphi_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. Это противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

Интересно отметить, что для справедливости теоремы 4 условие $\varphi(A)\in A$ существенно. Действительно, отображение φ из $V(m)$ на m, определенное следующим образом

$$(\varphi(A))_i=\frac{\sup\limits_{x\in A} x_i+\inf\limits_{x\in A} x_i}{2},$$

где m - пространство ограниченных последовательностей, есть ограниченный линейный проектор с нормой I. С другой стороны, в случае евклидового пространства, теорема 3 доказана без предположения $\varphi(A)\in A$.

4°. Теоремы I и 2 могут быть применены для изучения многозначных отображений с выпуклыми образами. Как отмечалось во введении, в множестве $V(E^n)$ существует естественная метрика, позволяющая ввести понятия непрерывности, липшицевости, почти - периодичности [2] отображения f из E^1 в $V(E^1)$. Из теорем I, 2 непосредственно вытекает следующее утверждение: если f - отображение из E^1 в $V(E^n)$, обладающее одним из перечисленных выше свойств, то существует однозначная ветвь отображения f с тем же свойством. Это утверждение дополняет один из результатов монографии [2].

5^0. В заключение выражаю искреннюю благодарность А.В.Покровскому за постановку задачи и полезные обсуждения, Е.М. Семенову за ценные указания и советы, которые значительно улучшили многие доказательства.

Литература

I. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ГИТТЛ, М.-Л., 1934.

2. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С., Нелинейные почти периодические колебания. "Наука", М., 1970.

3. Бурбаки Н., Интегрирование (векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления), Наука, М., 1970.

4. Lindenstrauss J., On non-linear projections in Banach spaces, Mich.Math.J.,II(1964), 268-287.

5. John F., Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Courant Anniv. vol., N.Y.,1948,187-204.

6. Dvoretzky A., Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc.Int.Symp.Lin.Spaces, J.,1961,123-160.

7. Schmitt K., Kennzeichnung des Steinerpunktes konvexer Körper, Math.Z.,105:5(1968),387-392.

Поступила в редакцию
30.XI 1971 г.