УДК 512.25/26

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

А.Б.Певный

Ниже предлагается численный метод решения матричных игр, сходящийся со скоростью геометрической прогрессии к некоторому ε - решению.

Пусть $A=(a_{ij})$ - матрица размера $m\times n$, $\Omega=S_n\times S_m$,

$$S_n=\{x\in E^n \mid \sum_{i=1}^{n}x_i=1,\ x_i\geq 0\},\quad S_m=\{y\in E^m \mid \sum_{j=1}^{m}y_j=1,\ y_j\geq 0\}.$$

Точка (ситуация) $[x^*,y^*]\in\Omega$ называется решением матричной игры $\Gamma(A)$ (см., например, [1]), если

$$(Ax,y^*)\leq(Ax^*,y^*)\leq(Ax^*,y),\quad [x,y]\in\Omega,$$

и ε -решением, если

$$(Ax,y^*)-\varepsilon\leq(Ax^*,y^*)\leq(Ax^*,y)+\varepsilon,\quad [x,y]\in\Omega.$$

Наряду с игрой $\Gamma(A)$ будем рассматривать также игру Γ_ε с функцией выигрыша

$$f(x,y)=(Ax,y)-\varepsilon\|x\|^2+\varepsilon\|y\|^2.$$

Точка $[x^*,y^*]$ называется решением игры Γ_ε, если

$$f(x,y^*)\leq f(x^*,y^*)\leq f(x^*,y),\quad [x,y]\in\Omega. \qquad (1)$$

Решение $[x^*,y^*]$ игры Γ_ε существует, единственно и является, как нетрудно проверить, ε -решением игры $\Gamma(A)$.

Положим $z=[x,y]$, $w=[u,v]$, $z^*=[x^*y^*]$,

$$F(z,w)=f(u,y)-f(x,v)=(Bz,w)+\varepsilon\|z\|^2-\varepsilon\|w\|^2;$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & A'\\ -A & 0\end{bmatrix};\ h(z)=F'_w(z,z)=Bz-2\varepsilon z=Cz;\ C=B-2\varepsilon I,$$

где штрих обозначает транспонирование, а I – единичная матрица. Нетрудно видеть, что условие (I) равносильно условию

$$\max_{w\in\Omega} F(z^*,w)=F(z^*,z^*). \qquad (2)$$

Пусть P – оператор проектирования на Ω :

$$Pz\in\Omega,\ \|Pz-z\|=\min_{w\in\Omega}\|w-z\|.$$

Поскольку задача (2) является задачей вогнутого программирования, то справедлива следующая теорема (см., например, 2,3).

ТЕОРЕМА I. *Для того, чтобы точка $z^*\in\Omega$ была решением игры Γ_ε, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\alpha>0$*

$$P(z^*+\alpha h(z^*))=z^*. \qquad (3)$$

Для нахождения z^* можно применить следующий метод:

$$z_{k+1}=P(z_k+\alpha\, h(z_k)), \qquad (4)$$

где точка z_0 произвольна, а $\alpha>0$ достаточно мало.

Аналогичный метод для минимизации – метод проекции градиента – был рассмотрен, например, в [2,3]. Близкий метод для нахождения седловых точек функции Лагранжа $F(x,\lambda)$ при $x\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$ был рассмотрен Удзавой в [4], гл.10 .

Прежде чем доказывать, что $\{z_k\}$ сходится к z^* со скоростью геометрической прогрессии, покажем, как вычислять значения оператора P .

Ясно, что $Pz=[P_1x,P_2y]$, где P_1 и P_2 – операторы проектирования на S_n и S_m. Покажем, как вычислять $x=P_1u$. По определению

$$\min_{u'\in S_n}\frac{1}{2}\|u'-u\|^2=\frac{1}{2}\|x-u\|^2. \qquad (5)$$

По теореме Куна-Таккера (см., например, [4,5]) для того, чтобы x был решением задачи (5), необходимо и достаточно, чтобы

$$u - x + \lambda J + v = 0\,;$$
$$(J, x) = 1\,; \tag{6}$$
$$(x, v) = 0;\ x, v \geq 0\,,$$

где J – вектор, все компоненты которого равны единице. Найдем λ из условия

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \max\{u_i + \lambda, 0\} = 1\,.$$

Так как функция $\varphi(\lambda)$ кусочно-линейна, то такое λ найти нетрудно. Положим теперь

$$x_i = \max\{u_i + \lambda, 0\},\quad v_i = -\min\{u_i + \lambda, 0\},\ i = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно проверить, что полученные x, v, λ удовлетворяют системе (6). Поэтому x есть решение задачи (5), т.е. $x = P_1 u$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha > 0$ удовлетворяет неравенству

$$q = \sqrt{1 - 4\varepsilon\alpha + \alpha^2(4\varepsilon^2 + \|A\|^2)} < 1\,, \tag{7}$$

то $\{z_k\}$ сходится к решению z^* игры Γ_ε со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|z_k - z^*\| \leq K q^k,\quad K = const\,. \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство

$$(w - Pw, z - Pw) \leq 0\,,\ w \in E^{n+m},\ z \in \Omega\,,$$

для $\Delta_k = z_{k+1} - z_k$ получим

$$\|\Delta_k\|^2 = (z_k + \alpha h(z_k) - z_{k+1}, z_k - z_{k+1}) + \alpha(h(z_k), \Delta_k) \leq$$
$$\leq \alpha(h(z_k), \Delta_k) = \alpha(h(z_{k-1}) + C\Delta_{k-1}, \Delta_k) =$$

$$=(z_{k-1}+\alpha h(z_{k-1})-z_k,\ z_{k-1}-z_k)+(\Delta_{k-1}+\alpha C\Delta_{k-1},\Delta_k)\le$$

$$((I+\alpha C)\Delta_{k-1},\Delta_k),\qquad \|\Delta_k\|\le\|I+\alpha C\|\cdot\|\Delta_{k-1}\|$$

Докажем, что $\|I+\alpha C\|\le q$. Действительно,

$$I+\alpha C=\begin{bmatrix}(1-2\varepsilon\alpha)I & \alpha A' \\ -\alpha A & (1-2\varepsilon\alpha)I\end{bmatrix};$$

$$\|(I+\alpha C)w\|^2=\|(1-2\varepsilon\alpha)u+\alpha A'v\|^2+\|-\alpha Au+(1-2\varepsilon\alpha)v\|^2=$$

$$=(1-2\varepsilon\alpha)^2\|u\|^2+\alpha^2\|A'v\|^2+\alpha^2\|Au\|^2+(1-2\varepsilon\alpha)^2\|v\|^2\le$$

$$\le(1-2\varepsilon\alpha)^2\|w\|^2+\alpha^2\|A\|^2\|w\|^2=q^2\|w\|^2.$$

Окончательно имеем $\|\Delta_k\|\le q\|\Delta_{k-1}\|$, $q<1$; при $k<p$

$$\|z_k-z_p\|\le Kq^k.$$

Отсюда следует, что $\{z_p\}$ сходится к некоторой точке z^*, причем выполняется (8). Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (4), получим (3), т.е. z^* – решение игры Γ_ε.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для нахождения z^* можно также применить метод В.Ф.Демьянова [6]. Можно показать, что он тоже сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Литература

1. Воробьев Н.Н., Конечные бескоалиционные игры. Успехи матем. наук, 1959, 14, 4, 21-56.
2. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М., Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., Из-во ЛГУ, 1968.
3. Левитин Е.С., Поляк Б.Т., Методы минимизации при наличии ограничений. Ж. вычисл.матем. матем.физ., 1966, 6,5, 787-823.
4. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., Исследование по линейному и нелинейному программированию. М., Из-во ин.лит., 1962.
5. Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование. М., "Мир", 1967.
6. Демьянов В.Ф., Нахождение седловых точек на многогранниках. Докл. АН СССР, 1970, 192, 1, 13-15.

Поступила в редакцию

16.VII. 1971 г.