1971 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 4(21)

УДК 513.83

ОБ ε-ЭНТРОПИИ ПРОСТРАНСТВА МЕР В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА-РУБИНШТЕЙНА

Ю.В.Олемской

Обозначим через $V(K)$ множество неотрицательных мер заданных на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств метрического компакта K с полным изменением, равным единице. На $V(K)$ можно определить метрику Канторовича-Рубинштейна [1]:

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\inf_{\Psi}\int_K\int_K r(x,y)\,\Psi(de,de'),$$

где $r(x,y)$ -метрика в K, Ψ - неотрицательная мера, заданная на $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ и удовлетворяющая условию:

$$\Psi(e,K)-\Psi(K,e)=\varphi_1(e)-\varphi_2(e).$$

Множество $V_0(K)=(V(K),\rho)$ компактно [1]. А.М.Вершиком было высказано предположение об экспоненциальном характере зависимости ε-энтропии компакта $V_0(K)$ от ε-энтропии компакта K. (Сведения об ε-энтропии и её свойствах читатель может найти в работе [2]).

В настоящей заметке получен близкий к этому предположению результат.

Обозначим через h_ε и H_ε ε-энтропии компактов K и $V_0(K)$ соответственно.

Пусть $f(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ - функции от $\varepsilon>0$, тогда $f\preceq g$ и $g\succeq f$ обозначают тот факт, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\leq 1.$$

Основной результат заметки сформулирован в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА. Пусть K - метрический линейно-связный компакт, тогда имеет место следующая зависимость между ε -энтропиями K и $V_0(K)$:

$$A_\lambda \cdot 2^{h_{2\lambda\varepsilon}} \leq H_\varepsilon \leq B_s \cdot 2^{h_{s\varepsilon}},$$

где параметры $\lambda > 4$ и $0 < s < \frac{1}{2}$, A_λ, B_s - положительные постоянные (зависящие от λ, s) такие, что

$$\lim_{\lambda \to 4+0} A_\lambda = 0 \qquad \lim_{s \to \frac{1}{2}-0} B_s = \infty .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. A_λ, B_s вычисляются в процессе доказательства теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Для линейно-связного компакта K ненулевого объёма в n-мерном координатном пространстве $h_\varepsilon \sim n \log_2 \frac{1}{2\varepsilon}$, поэтому

$$C_1 \cdot 2^{h_\varepsilon} \leq H_\varepsilon \leq C_2 \cdot 2^{h_\varepsilon} .$$

Ю.Б. Фарфоровская получила такой результат для того случая, когда K -куб в n -мерном координатном пространстве, причём постоянные C_1, C_2 вычисляются более точно, чем в общем случае.

Предварительно сформулируем вспомогательные утверждения для получения оценки H_ε сверху. Пусть Γ - покрытие компакта K наименьшим числом $n = n_{s\varepsilon}$ (параметр $s > 0$) непересекающихся множеств X_i диаметра, не большего $2\varepsilon s$. Установим следующее отношение между множествами X_i покрытия Γ.

Считаем, что $X_i \sim X_j$, если $\tau(X_i, X_j) = 0$

$$(X_i \sim X_i,\ X_i \sim X_j \equiv X_j \sim X_i).$$

В силу линейной связности компакта K это отношение удовлетворяет условию:

для любых X_p, $X_q \in \Gamma$ существуют $X_n, X_s, \dots, X_s \in \Gamma$ такие, что:

$$X_p \sim X_n \sim X_s \sim \dots \sim X_s \sim X_q . \qquad (*)$$

Следующая лемма описывает некоторое упорядочивание множества Γ.

ЛЕММА I. Пусть Γ — конечное множество не менее чем с двумя элементами, с отношением между элементами $X_i \sim X_j$, удовлетворяющим условию ($*$), и X_1 — фиксированный элемент из Γ; тогда между элементами Γ можно установить такое отношение $X_i \ll X_j$, что:

1) для любого $X_j \in \Gamma$, $X_j \neq X_1$, существует единственный элемент $X_i \in \Gamma$ такой, что $X_i \ll X_j$; $X_i \neq X_j$, $X_i \sim X_j$;

2) для любого $X_q \in \Gamma$ существуют элементы $X_p, \dots, X_r$, X_s такие, что

$$X_1 \ll X_p \ll \dots \ll X_r \ll X_s \ll X_q .$$

Доказательство леммы легко проводится индукцией по числу элементов множества Γ и числу пар отношений между элементами.

Нам понадобятся некоторые следствия из этой леммы.

СЛЕДСТВИЕ I. Для установленного в лемме отношения $X_i \ll X_j$ не существует элемента X_i такого, что

$$X_i \ll X_n \ll \dots X_s \ll X_i .$$

Назовём элемент $X_p \in \Gamma$ граничным для установленного отношения $X_i \ll X_j$, если не существует элемента $X_q \in \Gamma$ такого, что $X_p \ll X_q$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любую цепь $X_s \ll \dots \ll X_z \ll X_p$ можно продолжить (вверх) до граничного элемента $X_q \in \Gamma$.

Теперь выберем для каждого из множеств $X_j \in \Gamma$ точку $x_j \in \bar{X}_i \cap \bar{X}_j$ при условии, что $X_i \ll X_j$. В X_1 выберем произвольную точку x_1. На множество C точек x_j перенесём отношение, устанавливаемое леммой I в покрытии Γ : $x_i \ll x_j$ тогда и только тогда, когда $X_i \ll X_j$. Ясно, что если $x_i \ll x_j$, то $r(x_i, x_j) \leq 2\varepsilon\cdot s$. "Стянем" меры $\varphi \in V_o(K)$ в точки $x_i \in C$, тогда справедлива

ЛЕММА 2. Для любой меры $\varphi \in V_o(K)$

$$\rho(\varphi, \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)\varphi_i) \leq 2\varepsilon\cdot s ,$$

где φ_i – δ-мера, сосредоточенная в точке x_i.

Доказательство этой леммы можно найти в работе [I].

Далее, мы приближаем меры

$$\overline{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)\varphi_i$$

мерами

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{np}\varphi_i , \quad \varphi_\varepsilon \in V_o(K) ,$$

где K_i – целые неотрицательные числа, а p – положительный целый параметр.

ЛЕММА 3. Для любой меры

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)\varphi_i$$

существует мера

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{np}\varphi_i$$

такая, что

$$\rho(\varphi, \varphi_\varepsilon) < \frac{2\varepsilon\cdot s}{p} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть во множестве C установлено отношение $x_i \ll x_j$, существование которого утверждается в лемме I.

Пусть x_i – граничный элемент, тогда K_i определится из неравенства:

$$\frac{K_i}{np} \leq \varphi(X_i) \leq \frac{K_i+1}{np} .$$

Определим также число σ_i :

$$\sigma_i = \varphi(X_i) - \frac{K_i}{np} .$$

Если теперь $x_i \neq x_1$ не является граничным элементом, то K_i определяется из неравенства:

$$\frac{K_i}{np} \leq \varphi(X_i) + \sum_{x_i \ll x_j} \sigma_j < \frac{K_i+1}{np} ,$$

а σ_i определится как

$$\sigma_i = \varphi(X_i) + \sum_{x_i \ll x_j} \sigma_j - \frac{K_i}{np} .$$

Определим K_1 . Очевидно, что (согласно утверждению 2 леммы 2) :

$$\varphi(X_1) + \sum \quad = \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) - \sum_{i=2}^{n} \frac{K_i}{np} = 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{K_i}{np} \geq 0.$$

Поэтому положим

$$\frac{K_1}{np} = 1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{K_i}{np} .$$

Таким образом, построена мера:

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{np} \cdot \varphi_i \quad , \quad \varphi_\varepsilon(K) = 1 .$$

Очевидно, что все K_i , σ_i определяются единственным образом, согласно следствиям I и 2 леммы 2.

Покажем, что

$$\rho(\bar{\varphi}, \varphi_\varepsilon) \leq \frac{2\varepsilon \cdot s}{p} .$$

Укажем меру Ψ_0, гарантирующую выполнение такого неравенства.

Пусть $\Psi_{(i,j)}$ — δ - мера, сосредоточенная в точке (x_i, x_j), тогда

$$\Psi_0(e,e') = \sum_{x_i \ll x_j} \sigma_j \; \Psi_{(i,j)}(e,e') \quad ,$$

Ψ_0 – неотрицательная мера, сосредоточенная в $n-1$ точке, так как каждому $x_j \neq x_1$ соответствует единственное x_i такое, что $x_i \ll x_j$.

Проверим, что :

$$\Psi_0(K,e) - \Psi_0(e,K) = \overline{\varphi}(e) - \varphi_\varepsilon(e) \; .$$

Действительно,

$$\Psi_0(K,e) = \sum_{x_i \in e} \sigma_i \quad ; \qquad \Psi_0(e,K) = \sum_{x_i \in e} \sum_{x_i \ll x_j} \sigma_j \; ;$$

$$\Psi_0(K,e) - \Psi_0(e,K) = \sum_{x_i \in e} (\sigma_i - \sum_{x_i \ll x_j} \sigma_j) = \sum_{x_i \in e} \varphi(X_i) - \sum_{x_i \in e} \frac{K_i}{np} \; .$$

Таким образом,

$$\rho(\overline{\varphi}, \varphi_\varepsilon) \le \int_K \int_K r(x,y) \; \Psi_0(de, de') = \sum_{j=2}^{n} \sigma_j \, r(x_i, x_j) \le \frac{2\varepsilon s}{p} ,$$

так как $\sigma_j \le \frac{1}{np}$ и $r(x_i, x_j) \le 2\varepsilon \cdot s$ при $x_i \ll x_j$.

Лемма доказана.

Получим оценку H_ε сверху. Пусть $\varphi \in V_0(K)$. Тогда по доказанным леммам существует мера

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{np} \varphi_i$$

такая, что

$$\rho(\varphi, \varphi_\varepsilon) \le \rho(\varphi, \overset{\circ}{\overline{\varphi}}) + \rho(\overline{\varphi}, \varphi_\varepsilon) \le 2s \cdot \varepsilon + \frac{2s\varepsilon}{p} \; .$$

Для того, чтобы φ_ε образовывали в $V_0(K)$ ε-сеть, достаточно выполнение неравенства:

$$2s \cdot \varepsilon + \frac{2s \cdot \varepsilon}{p} \le \varepsilon \; .$$

Откуда следует неравенство для p :

$$\frac{2s}{1-2s} \le p \; ,$$

N_ε – наименьшее число множеств диаметра, не большего 2ε, покрывающих компакт $V_o(K)$, очевидно, меньше числа C^{n-1}_{np+n-1} неотрицательных целочисленных решений уравнения [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = np .$$

Асимптотика C^{n-1}_{np+n-1} даёт следующую оценку H_ε :

$$H_\varepsilon = \log_2 N_\varepsilon \leq 2^{h\varepsilon s} \cdot \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} \log_2 \frac{1}{2\varepsilon} + \log_2 \frac{2(1-\varepsilon)}{1-2\varepsilon}\right) .$$

Параметр δ , естественно, предполагаем принадлежащим интервалу $(0, \frac{1}{2})$.

Оценим H_ε снизу. Пусть E — максимальное $2\varepsilon\cdot\lambda$ - различимое множество (параметр $\lambda > \rho$) точек в K и $m = m_{2\varepsilon\cdot\lambda}$ - число точек в нём.

Рассмотрим совокупность $S \subset V_o(K)$ мер $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{mp} \varphi_i$, где k_i - целые неотрицательные числа, p - целый положительный параметр, φ_i - δ-мера, сосредоточенная в точке $x_i \in E$, C^{m-1}_{mp+m-1} - число мер в S .

Подсчитаем число мер $\varphi \in S$, попадающих в 2ε -окрестность произвольной меры $\varphi_o \in S$.

Так как для $\varphi, \varphi_o \in S$

$$\rho(\varphi, \varphi_o) \geq 2\varepsilon\cdot\lambda(\varphi - \varphi_o)^+$$

(здесь $(\varphi - \varphi_o)^+$ - положительная часть меры $\varphi - \varphi_o$), то число мер, удовлетворяющих неравенству $\rho(\varphi, \varphi_o) \leq 2\varepsilon$, не больше числа мер, удовлетворяющих неравенству $2\varepsilon\cdot\lambda\cdot(\varphi - \varphi_o)^+ \leq 2\varepsilon$, а это неравенство эквивалентно следующим уравнению и неравенству (решение $\{c_i\}$ - целые положительные и отрицательные числа):

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{mp} = 0 , \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{mp}\right)^+ \leq \frac{1}{\lambda} .$$

Будем считать, что $k = \frac{p}{\lambda}$ - целое число.

Число целочисленных решений этой системы не превосходит [3]:

$$1 + \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{z=n}^{mk} C^{n}_{m} \cdot C^{n-1}_{z-1} \cdot C^{m-n-1}_{z+m-n-1} \leq m(mk - n_o + 1) \cdot C^{n_o}_{m} \cdot C^{n_o-1}_{mk} \cdot C^{m-n_o-1}_{mk+m-n_o-1}$$

где $1 \leq n_0 \leq m-1$.

Обовначим через M_ε максимальное число точек в ε -различимом подмножестве $V_0(K)$, тогда:

$$N_\varepsilon \geq M_{2\varepsilon} \geq \lim_{p \to \infty} \frac{C^{m-1}_{mp+m-1}}{m(mk-n_0+1) \cdot C_m^{n_0} \cdot C_{mk-1}^{n_0-1} \cdot C_{mk+m-n_0-1}^{m-n_0-1}} .$$

Отсюда получаем асимптотическое неравенство для N_ε :

$$N_\varepsilon \geq \frac{2\pi}{m_{2\varepsilon \cdot \lambda} \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{m_{2\varepsilon \cdot \lambda}} \geq \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{m_{2\varepsilon \cdot \lambda}} ,$$

и так как $n_{2\varepsilon \cdot \lambda} \leq m_{2\varepsilon \cdot \lambda}$, то окончательно получаем оценку снизу для H_ε :

$$H_\varepsilon = \log_2 N_\varepsilon \geq 2^{h_{2\lambda\varepsilon}} \cdot \log_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2} .$$

При значениях параметра $\lambda > 4$ $A_\lambda > 0$.
Заметим, что в качестве A_λ можно брать любое значение $\log_2 \left(\frac{\lambda}{4}\right)^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$, в вышеприведённой оценке $\alpha = \frac{1}{2}$.

Теорема доказана.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою признательность А.М.Вершику, под руководством которого была выполнена эта работа, и Ю.Б.Фарфоровской за ценные замечания, сделанные при обсуждении этой статьи.

Литература

1. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш., Об одном пространстве вполне аддитивных функций. Вестник ЛГУ, 7, 1958.
2. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М., ε -энтропия и ε -ёмкость множеств в функциональных пространствах. УМН, 14, 2 (1959).
3. Яглом А.М., Яглом И.М., Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Гостехиздат, М., 1954.

Поступила в редакцию
26.VI. 1971 г.