УДК 513.88

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

Т.В. Нечаева

Довольно хорошо теперь известный принцип неподвижных точек впервые был сформулирован и применен для доказательства теорем о существовании решений операторных уравнений в 20-х годах нашего века. До этого момента теоремы существования доказывались с помощью метода мажорант Коши или метода последовательных приближений Пикара. Оба этих метода требовали довольно сильных ограничений на функции, входящие в уравнения. Идея неподвижных точек оказалась очень плодотворной и позволила значительно ослабить трудности, связанные с доказательством теорем существования (см. [1],[2],[3]).

Впоследствии теоремы о неподвижных точках нашли себе новое применение, уже не в классическом анализе, а в новой развивающейся области математики – теории игр. С помощью теоремы Брауэра Дж. фон Нейман впервые доказал существование решений в играх двух лиц, а с помощью теоремы Какутани Дж. Нэш доказал теорему о существовании равновесия в бескоалиционных играх "n" лиц (см. [4],[5]).

Последняя теорема неоднократно использовалась различными авторами для исследования игровых моделей равновесия в экономике. А в 50-х годах нашего столетия теорема Какутани была применена для непосредственного доказательства существования равновесия в модели Эрроу-Дебре (без сведения этой модели к игровой ситуации) (см. [6]).

Таким образом, мы видим, что теоремы о неподвижных точках широко используются не только в классической и прикладной математике, но и для анализа экономико-математических моделей.

Сформулируем две наиболее распространенные теоремы о неподвижных точках (см. [2],[7]).

ТЕОРЕМА БРАУЭРА. *При всяком непрерывном отображении $f(x)$ выпуклого замкнутого ограниченного множества S, лежащего в n-мерном евклидовом пространстве E^n, в себя существует неподвижная точка x^* этого отображения, то есть такая точка, что $f(x^*)=x^*$.*

ТЕОРЕМА КАКУТАНИ (является непосредственным обобщением теоремы Брауэра на случай многозначных отображений). *Если $F(x)$ - полунепрерывное сверху отображение выпуклого замкнутого ограниченного множества S, лежащего в n-мерном евклидовом пространстве E^n, в семейство замкнутых и выпуклых подмножеств S, то найдется неподвижная точка этого отображения x^*, такая, что $x^* \in F(x^*)$.*

ПРИМЕЧАНИЕ. Отображение $F(x)$, переводящее точку $x \in S$ в замкнутое выпуклое множество $F(x)$ из $R(S)$ (семейства замкнутых и выпуклых подмножеств S), называется *полунепрерывным сверху*, если из того, что $x_n \to x_0$; $y_n \in F(x_n)$, $y_n \to y_0$, следует, что $y_0 \in F(x_0)$. Легко показать, что полунепрерывность сверху отображения $F(x)$ эквивалентна замкнутости графика этого отображения (то есть тому, что множество точек $\bigcup_{x \in S} x \times F(x)$ есть замкнутое подмножество $S \times S$).

Существуют различные обобщения теорем Брауэра и Какутани на случай, когда множество S лежит в линейном топологическом пространстве (теорема Тихонова, теорема Вилля, теорема Гликсберга, теорема Фана) (см. [8],[9],[10],[11]). Но основные идеи выпуклости S и непрерывности (полунепрерывности сверху) соответствующего отображения в этих обобщениях сохраняются. Поэтому мы не будем приводить здесь формулировки этих теорем (в целях краткости изложения).

Нами предлагаются теоремы о неподвижных точках, не использующие предположений о непрерывности (полунепрерывности сверху) рассматриваемого отображения и выпуклости исходного множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многозначное отображение $\varphi(x)$ некоторого множества S, лежащего в линейном топологическом пространстве, в себя называется <u>конвексным</u> (от слова "*convex*" - выпуклый), если "множество сдвигов" данного отображения, то есть множество $\mathcal{D}=\bigcup_{x\in S}\{\varphi(x)-x\}=\{z/z=y-x;\ x\in S;\ y\in\varphi(x)\}$, является выпуклым.

ПРИМЕЧАНИЕ. По поводу топологических понятий см. [2], [3], [12].

ТЕОРЕМА I. Пусть S - компактное множество в локально выпуклом линейном топологическом пространстве, а $\varphi(x)$ - многозначное конвексное отображение множества S в себя. Пусть, кроме того, множество сдвигов $\mathcal{D}$ является замкнутым. Тогда это отображение имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Отсутствие неподвижной точки эквивалентно тому, что $0\bar{\in}\mathcal{D}$. Тогда по известной теореме об отделяющей гиперплоскости (см. [13], стр. 98) существует непрерывный линейный функционал L, такой что

$$\forall(x/x\in\mathcal{D})\quad L(x)<0. \tag{1}$$

Так как S - компактное множество, то

$$\exists\min_{x\in S}L(x)=L(x_0)=\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{D}}=\mathcal{D}+x_0=\{z/z=x+x_0;\ x\in\mathcal{D}\}$.

Из (1) следует, что

$$\forall(z/z\in\widetilde{\mathcal{D}})\quad L(z)-\alpha=L(x)+L(x_0)-\alpha=L(x)<0. \tag{3}$$

Из (2) следует, что

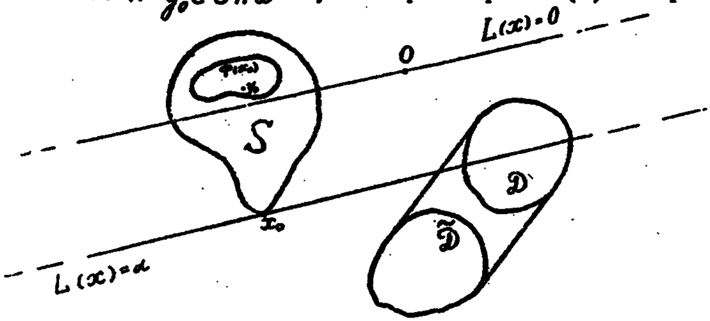
$$\forall(x/x\in S)\quad L(x)-\alpha\geq 0. \tag{4}$$

Таким образом, из (3) и (4) следует, что гиперплоскость $V=\{x/L(x)=\alpha\}$ является разделяющей для множеств S и $\widetilde{\mathcal{D}}$, то есть

$$S\cap\widetilde{\mathcal{D}}=\emptyset. \tag{5}$$

С другой стороны, пусть $y_0 \in \mathcal{P}(x_0) \subset S$. Тогда $y_0 - x_0 \in \mathcal{D}$. Следовательно, $y_0 = (y_0 - x_0) + x_0 \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Отсюда $y_0 \in S \cap \mathcal{D}$, что противоречит (5). Теорема доказана.



ПРИМЕЧАНИЕ. Локальная выпуклость линейного топологического пространства не используется непосредственно в доказательстве теоремы, но требуется для применения теоремы об отделяющей гиперплоскости в той формулировке, которую мы использовали. Существуют другие варианты формулировки теоремы об отделяющей гиперплоскости, которые используются в доказательстве следующих двух теорем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S -компактное множество в линейном топологическом пространстве, а $\mathcal{P}(x)$ - многозначное конвексное отображение множества S в себя. Пусть, кроме того, множество сдвигов $\mathcal{D}$ является открытым. Тогда это отображение имеет неподвижную точку.

ПРИМЕЧАНИЕ. Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы I. Локальная выпуклость пространства здесь не требуется, так как она не требуется в соответствующем варианте формулировки теоремы об отделяющей гиперплоскости (см. [13], стр. 97).

ТЕОРЕМА 3. Пусть S -компактное множество в линейном топологическом пространстве, а $\mathcal{P}(x)$ - многозначное конвексное отображение множества S в себя. Пусть множество сдвигов $\mathcal{D}$ замкнуто и имеет непустую внутренность. Тогда отображение $\varphi(x)$ имеет неподвижную точку.

ПРИМЕЧАНИЕ. См. примечание к теореме 2.

С помощью другого метода, использующего понятие сходимости и ограниченности в линейных топологических пространствах, можно доказать теорему, являющуюся непосредственным обобщением теоремы I (но не теорем 2 и 3).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{S}$ - ограниченное множество в локально выпуклом линейном топологическом пространстве, а $\varphi(x)$ - многозначное конвексное отображение $\mathcal{S}$ в себя. Пусть множество сдвигов $\mathcal{D}$ замкнуто. Тогда отображение имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 - произвольная точка из $\mathcal{S}$. Рассмотрим последовательность $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, построенную по следующему принципу: $y^n=x^n-x_0$, где $x^k\in\varphi(x^{k-1}), k=1,2,\dots,n$. Легко видеть, что

$$y^n=(x^1-x^0)+(x^2-x^1)+\dots+(x^n-x^{n-1}). \qquad (I)$$

Обозначим $d_k=x^k-x^{k-1}$ ($k=1,2,\dots,n$). Так как $x^k\in\varphi(x^{k-1})$, то $d_k\in\mathcal{D}$. Из (I) следует, что $y^n=d_1+d_2+\dots+d_n$. Рассмотрим

$$z^n=\frac{1}{n}y^n=\frac{1}{n}d_1+\frac{1}{n}d_2+\dots+\frac{1}{n}d_n. \qquad (2)$$

Так как $\mathcal{D}$ выпукло, то из (2) следует, что $z^n\in\mathcal{D}$.

Легко показать, что $\{y^n=x^n-x_0\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченное множество, так как $x^n\in\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}$ ограничено.

Пусть $\mathcal{U}(0)$ - произвольная окрестность нуля. В силу локальной выпуклости пространства, найдется выпуклая окрестность нуля $\widetilde{\mathcal{U}}(0)$, такая, что $\widetilde{\mathcal{U}}(0)\subset\mathcal{U}(0)$.

По определению ограниченности в линейных топологических пространствах, $\exists m: \forall n\ y^n\in m\widetilde{\mathcal{U}}(0)$. Отсюда следует, что $\forall n\ \frac{1}{m}y^n\in\widetilde{\mathcal{U}}(0)\subset\mathcal{U}(0)$. Рассмотрим произвольное $n>m$.

Ясно, что $\frac{1}{n}y^n = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{m}y^n$. Так как $n>m$, то $\frac{m}{n}<1$. Поэтому, в силу выпуклости $\tilde{U}(0)$, выполняется $\frac{1}{n}y^n\in\tilde{U}(0)$, так как $\frac{1}{m}y^n\in\tilde{U}(0)$.

Следовательно, для любой окрестности нуля $U(0)\,\exists m:\forall(n/n>m)$ $x^n\in\tilde{U}(0)\subset U(0)$, то есть $x^n\to 0$, и $0\in\mathcal{D}$, так как $\mathcal{D}$ – замкнуто. Теорема доказана.

В формулировке теоремы можно избавиться также и от замкнутости множества $\mathcal{D}$. Но это требует замкнутости множества S, так как легко привести пример, в котором оба множества $\mathcal{D}$ и S не замкнуты и неподвижной точки нет.

ПРИМЕР I. S – полуинтервал $(0;1]$ на числовой оси. $\Phi(x)=\frac{x}{2}$. Тогда $\mathcal{D}=[-\frac{1}{2},0)$, и неподвижной точки не существует.

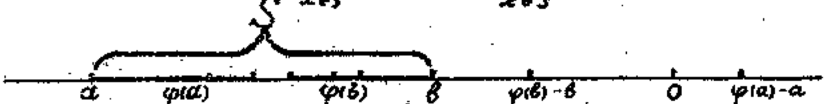
Избавиться от замкнутости множества S пока удалось только для случая, когда S лежит в n-мерном евклидовом пространстве.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\Phi(x)$ – многозначное конвексное отображение, переводящее замкнутое и ограниченное множество S, лежащее в E^n, в себя. Тогда существует неподвижная точка этого отображения.*

При доказательстве теоремы используется следующая лемма.

ЛЕММА. *Пусть $\Phi(x)$ – многозначное отображение замкнутого и ограниченного множества $S\subset E^n$ в себя. Тогда выпуклая оболочка множества сдвигов $\mathcal{D}=\bigcup_{x\in S}\{\Phi(x)-x\}$ содержит нуль.*

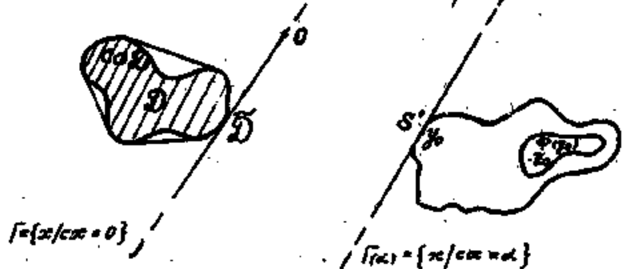
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (проводится индукцией по размерности пространства). Для $n=1$ утверждение леммы выполняется. В самом деле, пусть S – замкнутое и ограниченное множество на прямой. Тогда существует $\min_{x\in S} x=a$ и $\max_{x\in S} x=b$.



Ясно, что $\varphi(a)-a\geq 0$ и $\varphi(b)-b\leq 0$. Так как O всегда можно представить в виде выпуклой линейной комбинации двух точек на прямой, расположенных по разные стороны от O, то $O \in co\,\mathcal{D}$. ($co\,\mathcal{D}$ обозначает выпуклую оболочку множества $\mathcal{D}$).

Предположим теперь, что утверждение леммы выполняется для $n-1$. Докажем, что тогда оно выполняется для n.

Допустим противное, то есть что $O \notin co\,\mathcal{D}$



Проведем опорную гиперплоскость Γ к множеству $co\,\mathcal{D}$, проходящую через O и такую, что

$$\forall (x / x \in co\,\mathcal{D}) \quad cx \geq 0. \tag{I}$$

Так как S замкнуто и ограничено, то существует

$$\max_{x \in S} cx = \alpha. \tag{2}$$

Пусть $S' = \{y / cy = \alpha;\ y \in S\}$ (множество экстремальных точек относительно линейного функционала cx).

Рассмотрим гиперплоскость $\Gamma_{(\alpha)} = \{x / cx = \alpha\}$. Легко видеть, что $S' = S \cap \Gamma_{(\alpha)}$. Ясно, что S' не пусто, замкнуто и ограничено, в силу замкнутости и ограниченности множества S.

Пусть y_0 – произвольная точка из S', то есть $y_0 \in S$ и

$$cy_0 = \alpha. \tag{3}$$

Возьмем $z_0 \in \Phi(y_0)$. Тогда z можно представить как

$$z_0 = y_0 + x_0, \tag{4}$$

где $x_0 = z_0 - y_0 \in \mathcal{D}$. Из (I) следует, что

$$cx_0 \geq 0. \tag{5}$$

Из (4) получаем

$$cz_0 = cy_0 + cx_0. \tag{6}$$

В силу (3), (5) и (6) имеем

$$cz_0 \geq \alpha. \tag{7}$$

С другой стороны, из (2) следует, что

$$cz_0 \leq d\ , \tag{8}$$

так как $z_0 \in S$. Принимая во внимание (7) и (8), имеем $cz_0 = d$, то есть $z_0 \in S'$.

Отсюда $cx_0 = 0$, то есть $x_0 \in co\mathcal{D} \cap \Gamma = \tilde{\mathcal{D}}$. Тем самым показано, что замкнутое и ограниченное множество S' переводится многозначным отображением $\varphi(x)$ в себя, причем $\mathcal{D}' \subset \tilde{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}' = \bigcup_{x \in S'} \{\varphi(x) - x\}$. Поэтому $co\mathcal{D}' \subset \tilde{\mathcal{D}}$, так как $\tilde{\mathcal{D}}$ выпуклое и $\tilde{\mathcal{D}} = co\tilde{\mathcal{D}}$. Так как мы допустили, что $0 \notin co\mathcal{D}$, то $0 \notin co\mathcal{D} \cap \Gamma = \tilde{\mathcal{D}}$ и, следовательно, $0 \notin co\mathcal{D}'$.

Но это противоречит предположению индукции, так как $S' \subset E^{n-1}$ и $\mathcal{D}' \subset E^{n-1}$. Лемма доказана.

Утверждение теоремы следует из нее непосредственно, так как для конвексного отображения $\mathcal{D}$ - выпукло, то есть $\mathcal{D} = co\mathcal{D}$.

Поскольку многозначное отображение более общее понятие, чем однозначное, то все теоремы I - 5 можно соответствующим образом переформулировать для однозначных конвексных отображений. Получим теоремы Iа, 2а, 3а, 4а, 5а.

Легко видеть, что в доказанных теоремах нет требований выпуклости S и полунепрерывности сверху соответствующего отображения.

Требуется лишь компактность или ограниченность S, в случае ограниченности S - замкнутость $\mathcal{D}$. Всегда требуется выпуклость множества сдвигов $\mathcal{D}$ (то есть конвексность соответствующего преобразования).

Имеет смысл проверить, какой ценой досталось избавление от вышеупомянутых условий теорем Брауэра и Какутани.

Легко привести пример многозначного отображения, не являющегося полунепрерывным сверху, но удовлетворяющего условиям теорем I - 5.

ПРИМЕР 2. Пусть $S \subset E^2$ - круг радиуса 2 с центром в нуле. Преобразование φ переводит центр круга в его границу, а любую точку на границе, наоборот, в центр. Все прочие точки также переводятся в центр круга, и какая-нибудь произвольная точка (не центр) переходит и в нуль, и в себя.

Легко проверить, что построенное таким образом отображение не является полунепрерывным сверху, но удовлетворяет условиям теорем I – 5, так как в данном случае множество $\mathcal{D}$ совпадает с множеством S, то есть является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством.

Привести пример однозначного отображения, не являющегося непрерывным, но удовлетворяющего теоремам Iа – 5а, несколько труднее (из-за требования однозначности), но тем не менее это можно сделать.

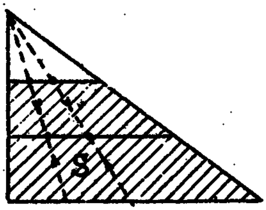
ПРИМЕР 3. Пусть множество $S \subset E^2$ – круг радиуса 3 с центром в нуле. Однозначное отображение S в себя задается следующим образом. Разделим круг S на две области. Первая область – круг S_1 радиуса I (замкнутый). Вторая область – кольцо K с внешним радиусом 3 и внутренним радиусом I (без внутренней границы).

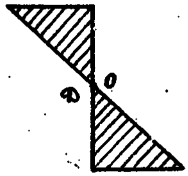
Внутри круга S_1 отображение φ действует, как сжимающее, переводящее каждую точку круга S_1 в точку на том же радиусе, но в 2 раза более близкую к центру. Но центр круга S_1 не остается на месте, а переходит в произвольную внутреннюю точку круга S_1. Граница же круга остается на месте.

На кольце K отображение φ задано так. Каждая точка на внешней границе кольца переходит в точку на том же радиусе, на окружности радиуса 2. Внутренние точки кольца K переходят в совершенно произвольные точки множества S, лишь бы расстояние между образами и прообразами не превышало I. Очевидно, что, вообще говоря, такое отображение не является непрерывным даже в сколь угодно малой окрестности любой из своих неподвижных точек, лежащих на границе круга S_1. Но тем не менее неподвижных точек у этого отображения континуальное множество, и можно проверить, что φ удовлетворяет условиям теорем Iа – 5а. (Множество $\mathcal{D}$ в нашем примере – это замкнутый круг радиуса I).

С другой стороны, можно привести пример однозначного отображения, не удовлетворяющего условиям теорем Iа – 5а, но являющегося непрерывным.

ПРИМЕР 4. Пусть $S \subset E^2$ – трапеция, все точки которой проектируются (из воображаемой вершины) в точки, находящиеся на средней линии данной трапеции.





Легко видеть, что данное преобразование является непрерывным, но не конвексным, так как соответствующее множество $\mathcal{D}$ не является выпуклым. Но $0 \in \mathcal{D}$, и все точки на средней линии трапеции неподвижны.

Существует класс отображений, одновременно удовлетворяющих как теоремам Брауэра и Какутани, так и теоремам I - 5 и Ia-5a (рассматривается выпуклое множество S).

К таким отображениям относятся все непрерывные линейные однозначные отображения, а также все полунепрерывные сверху суперлинейные многозначные отображения, то есть все полунепрерывные сверху многозначные отображения, удовлетворяющие условию :

$$\forall(\alpha/0 \leq \alpha \leq 1)\ \alpha \mathcal{P}(x) + (1-\alpha)\mathcal{P}(y) \subset \mathcal{P}(\alpha x + (1-\alpha)y) \qquad (*)$$

(своеобразное обобщение линейности на многозначный случай). В евклидовых пространствах линейные отображения всегда непрерывны. В линейных топологических пространствах существуют линейные отображения, не являющиеся непрерывными (см. [I4]). Теоремам I - 5 удовлетворяют все суперлинейные отображения, а теоремам Ia - 5a удовлетворяют все линейные отображения.

В самом деле, пусть выполняется (*). Тогда можно показать, что из выпуклости S следует выпуклость $\mathcal{D}$.

Пусть $z_1 \in \mathcal{D}$, то есть $z_1 \in \mathcal{P}(x_1) - x_1$, где $x_1 \in S$, а $z_2 \in \mathcal{D}$, то есть $z_2 \in \mathcal{P}(x_2) - x_2$, где $x_2 \in S$.

Тогда

$$z = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 \in \alpha \mathcal{P}(x_1) + (1-\alpha)\mathcal{P}(x_2) - (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq$$

$$\leq \mathcal{P}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \mathcal{P}(x) - x \quad ,$$

где $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S$ при $0 \leq \alpha \leq 1$.

Но $\mathcal{P}(x) - x \in \mathcal{D}$. Следовательно, $z \in \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D}$ - выпуклое множество. Таким образом, суперлинейные отображения, заданные на выпуклом множестве, автоматически являются конвексными. (Поскольку линейные отображения - частный случай суперлинейных, то аналогичное утверждение справедливо и для них).

Заметим, что в одномерном случае непрерывные отображения являются конвексными, так как тогда выпуклость эквивалентна связности, а множество сдвигов $\mathcal{D}$ для непрерывных отображений всегда связно. Поэтому в качестве любопытного следствия из наших теорем можно получить теорему о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке.

В случае большой размерности, как мы уже показали, непрерывность не является частным случаем конвексности.

Встает естественный вопрос о возможности практического применения наших теорем. Имеются некоторые соображения на этот счет, которые пока недостаточно формализованы для получения точных результатов. Также стоит проблема выяснения возможности распространения теоремы 5 на случай линейных топологических пространств.

Что же касается экономической интерпретации условия конвексности, то этот вопрос до конца еще не решен, хотя некоторые идеи подсказывают, что это условие не намного менее естественно, чем, скажем, условие непрерывности.

Литература

1. Немыцкий В.Н., Принцип неподвижных точек в анализе, УМН, I (1936).
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, "Наука", М., 1968.
4. фон Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, "Наука", М., 1970.
5. Nash G., Equilibrium points in -person games, Proc.Nat. Acad.Sci.USA, 36:1(1950).
6. Arrow K., Debreu J., Existence of an equilibrium for a competetive economy, Econometrica, 22:3(1954).
7. Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Dure Math.J., 8:1(1941).
8. Тихонов А.Н., Ein Fixpunktsats, Math.Ann., III (1935), 767-776.

9. Боненбласт Х.Ф., Карлин С., Об одной теореме Вилля, Бесконечные антагонистические игры, Физматгиз, М., 1963.

10. Гликсберг И.Л., Дальнейшее обобщение теоремы Какутани, В сб. "Бесконечные антагонистические игры", Физматгиз, М., 1963.

11. Fan K., Fixed-point and minimax theprems in locally convex topological linear spaces, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A., 38 (1952),121-126.

12. Бурбаки Н., Общая топология, "Наука", М., 1968.

13. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИИЛ, М., 1962.

14. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.

Поступила в редакцию
9.VIII. 1971 г.