УДК 519.8

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ε -СТАЦИОНАРНОСТЬ В ДИСКРЕТНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ

В.Н.Малозёмов

§ 1. Введение

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E_n заданы непрерывно дифференцируемые функции $f_i(X)$, $i\in[0:N]$. Положим

$$\mu = \inf_{X\in E_n} \max_{i\in[0:N]} f_i(X).$$

В дальнейшем будет рассматриваться лишь тот случай, когда

$$\mu > 0 \tag{1.1}$$

(таковы, например, все конечномерные аппроксимационные задачи в равномерной метрике).

Введем обозначения: $$\varphi(X) = \max_{i\in[0:N]} f_i(X);$$

$$R_\varepsilon(X) = \{ i\in[0:N] \mid \varphi(X) - f_i(X) \le \varepsilon\varphi(X)\},\ \varepsilon > 0$$

$$\psi_\varepsilon(X) = \min_{\|g\|=1} \max_{i\in R_\varepsilon(X)} \left(\frac{\partial f_i(X)}{\partial X}, g\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $X^*\in E_n$ называется относительно ε -стационарной точкой функции $\varphi(X)$, если

$$\psi_\varepsilon(X^*) \ge 0.$$

Относительно ноль-стационарную точку будем называть просто стационарной точкой.

В [I], стр. 83, показано, что если $f_i(X)$, $i\in[0:N]$, - выпуклые на E_n функции, то для относительно $\mathcal{E}$ -стационарной точки X^* выполняются неравенства

$$0\leqslant \frac{\varphi(X^*)-\mu}{\varphi(X^*)}\leqslant \mathcal{E}\,. \tag{I.2}$$

Эти неравенства означают, что $\varphi(X^*)$ есть приближенное значение для μ с относительной погрешностью, не превышающей $\mathcal{E}$. В частности, любая стационарная точка является точкой минимума функции $\varphi(X)$ на E_n.

В данной работе описывается метод последовательных приближений для нахождения относительно $\mathcal{E}$ - стационарных точек ($\mathcal{E}>0$) и на его основе развивается метод для нахождения стационарных точек функции $\varphi(X)$. Основные результаты работы были опубликованы без доказательства в [I].

§ 2. Вспомогательные предложения

I. Зафиксируем $X_0\in E_n$. В силу (I.I) $\varphi(X_0)>0$. Перенумеруем числа $f_i=f_i(X_0)$ в порядке убывания:

$$f_{i_{01}}=\ldots=f_{i_{0j_0}}>f_{i_{11}}=\ldots=f_{i_{1j_1}}>\ldots>f_{i_{m1}}=\ldots=f_{i_{mj_m}}\,.$$

Здесь $\sum\limits_{k=0}^{m} j_k=N+1$, причем m, $0\leqslant m\leqslant N$, зависит от X_0.

Введем обозначение:

$$a_k(X_0)=f_{i_{k1}}-f_{i_{01}}\,,\ k\in[0:m].$$

По определению полагаем $a_{m+1}(X_0)=\infty$.

Имеем (см. рис. I)

$$0=a_0(X_0)<a_1(X_0)<\ldots<a_m(X_0)<a_{m+1}(X_0)=\infty\,.$$

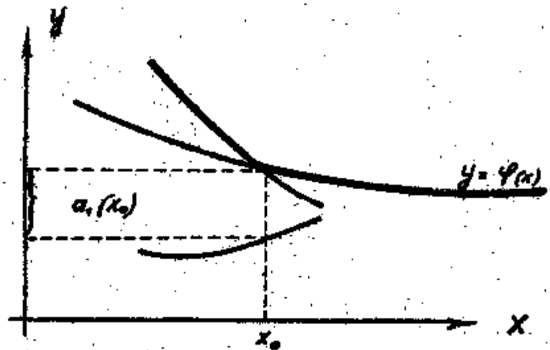

Рис. I

Нетрудно понять, что если

$$a_K(X_0)\leq\varepsilon\varphi(X_0)<a_{K+1}(X_0),$$

или, что то же самое,

$$\frac{a_K(X_0)}{\varphi(X_0)}\leq\varepsilon<\frac{a_{K+1}(X_0)}{\varphi(X_0)},$$

то для индексного множества $R_\varepsilon(X_0)$, введенного в предыдущем параграфе, справедливо равенство

$$R_\varepsilon(X_0)=R_{\theta_K}(X_0),\qquad (2.1)$$

где $\theta_K=a_K(X_0)/\varphi(X_0)$, $K\in[0:m]$. Отсюда, в частности, следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\varepsilon'>\varepsilon$, что

$$R_{\varepsilon'}(X_0)=R_\varepsilon(X_0).\qquad (2.2)$$

ЛЕММА I. Пусть $X_0\in E_n$ и $\varepsilon>0$ фиксированы. Тогда найдется $\delta>0$ такое, что для $X\in E_n$, $\|X-X_0\|<\delta$, будет

$$R_\varepsilon(X)\subset R_\varepsilon(X_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε', $\varepsilon'>\varepsilon$, – число, для которого выполняется равенство (2.2). Положим

$$\xi=\frac{\varepsilon'+\varepsilon'/2}{1+\varepsilon/2}.$$

Очевидно, $\xi>\varepsilon$.

В силу непрерывности функций $f_i(X)$ найдется такое $\delta>0$, что для $X\in E_n$, $\|X-X_0\|<\delta$, и всех $i\in[0:M]$

будет

$$|f_i(X) - f_i(X_0)| \leq \frac{1}{2}(\xi - \varepsilon)\,\varphi(X_0). \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что для тех же X

$$|\varphi(X) - \varphi(X_0)| \leq \frac{1}{2}(\xi - \varepsilon)\,\varphi(X_0). \tag{2.4}$$

Пусть $i \in R_\varepsilon(X)$, $\|X - X_0\| \leq \delta$. В силу (2.3), (2.4) и выбора ξ получим

$$\varphi(X_0) - f_i(X_0) = |[\varphi(X_0) - \varphi(X)] + [\varphi(X) - f_i(X)] +$$
$$+ [f_i(X) - f_i(X_0)]| \leq (\xi - \varepsilon)\,\varphi(X_0) + \varepsilon\,\varphi(X) = \xi\,\varphi(X_0) +$$
$$+ \varepsilon[\varphi(X) - \varphi(X_0)] \leq (\xi + \tfrac{1}{2}(\xi - \varepsilon))\,\varphi(X_0) = \varepsilon'\,\varphi(X_0).$$

Значит, $i \in R_{\varepsilon'}(X_0)$, и в силу (2.I) $i \in R_\varepsilon(X_0)$.

Лемма доказана.

2. Из (2.I) следует, что функция $\psi_\varepsilon(X_0)$, как функция от ε, является кусочно-постоянной:

$$\psi_\varepsilon(X_0) = \psi_{b_k}(X_0) \quad \text{для} \quad b_k \leq \varepsilon < b_{k+1}, \quad k \in [0:m].$$

В частности, для любого $\varepsilon \geq 0$ найдется такое $\varepsilon' > \varepsilon$, что

$$\psi_{\varepsilon'}(X_0) = \psi_\varepsilon(X_0). \tag{2.5}$$

3. Положим

$$H_\varepsilon(X_0) = \left\{ \frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X} \,\middle|\, i \in R_\varepsilon(X_0) \right\}$$

и через $L_\varepsilon(X_0)$ обозначим выпуклую оболочку множества $H_\varepsilon(X_0)$.

Известно (см., например, [I]), что неравенство $\psi_\varepsilon(X_0) \geq 0$ равносильно включению

$$0 \in L_\varepsilon(X_0).$$

Если $\psi_\varepsilon(X_0) < 0$, то

$$\psi_\varepsilon(X_0) = -\min_{Z \in L_\varepsilon(X_0)} \|Z\|. \tag{2.6}$$

§ 3. Описание метода

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и еще два параметра θ_1 , θ_2 из $[0,1]$. Возьмем начальное приближение $X_0 \in E_n$. Будем предполагать, что множество

$$M(X_0) = \{X \in E_n \mid \varphi(X) \leq \varphi(X_0)\}$$

ограничено (в силу непрерывности $\varphi(X)$ это множество является к тому же замкнутым).

Пусть уже найдено k -е приближение $X_k \in M(X_0)$. Если $\psi_\varepsilon(X_k) \geq 0$, то X_k по определению есть относительно ε -стационарная точка функции $\varphi(X)$ и процесс на этом заканчивается.

Если же $\psi_\varepsilon(X_k) < 0$ (в этом случае $0 \bar{\in} L_\varepsilon(X_k)$), то строим следующее приближение X_{k+1} . Для этого возьмем любой вектор $v_k \in L_\varepsilon(X_k)$, для которого

$$\frac{\min\limits_{z \in H_\varepsilon(X_k)} (z, v_k)}{(v_k, v_k)} \geqslant \theta_1 \qquad (3.1)$$

(на рис. 2 отношение, стоящее в левой части (3.1), равно отношению $\frac{B_k 0}{V_k 0}$).

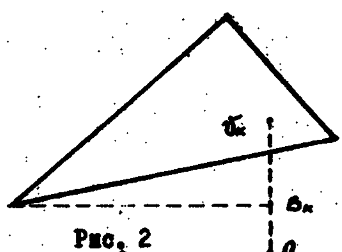

Рис. 2

Положим $g_k = -v_k / \| v_k \|$ и рассмотрим луч

$$X_k(\alpha) = X_k + \alpha g_k, \quad \alpha \geqslant 0.$$

Покажем прежде всего, что

$$\varphi(X_k) > \min_{\alpha \geqslant 0} \varphi(X_k(\alpha)). \qquad (3.2)$$

Для этого заметим, что (3.1) равносильно следующему неравенству

$$\max_{i \in R_\varepsilon(X_k)} \left(\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial X}, g_k\right) \leq -\theta_1 \| v_k \| . \tag{3.3}$$

Теперь имеем для достаточно малых $\alpha > 0$ (см. I):

$$\varphi(X_k(\alpha)) = \varphi(X_k) + \alpha \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial g_k} + o_k(\alpha) =$$

$$= \varphi(X_k) + \alpha \max_{i \in R_0(X_k)} \left(\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial X}, g_k\right) + o_k(\alpha) \leq$$

$$\leq \varphi(X_k) - \alpha \theta_1 \| v_k \| + o_k(\alpha) \leq \varphi(X_k) - \frac{1}{2} \alpha \theta_1 \| v_k \|,$$

откуда и следует (3.2).

Вернемся к описанию метода. В силу (3.2) найдется такое $\alpha_k > 0$, для которого

$$\frac{\varphi(X_k) - \varphi(X_k(\alpha_k))}{\varphi(X_k) - \min\limits_{\alpha > 0} \varphi(X_k(\alpha))} \geq \theta_2 . \tag{3.4}$$

В качестве ($K+1$)-го приближения возьмем $X_k(\alpha_k)$:

$$X_{k+1} = X_k(\alpha_k) .$$

Ясно, что $X_{k+1} \in M(X_0)$ и $\varphi(X_{k+1}) < \varphi(X_k)$. Продолжая аналогично, построим последовательность $\{X_k\}$, причем $X_k \in M(X_0)$, K = 0,1,2,..., и

$$\varphi(X_0) > \varphi(X_1) > \ldots > \varphi(X_k) > \ldots \tag{3.5}$$

§ 4. Доказательство сходимости

Если последовательность $\{X_k\}$, построенная в предыдущем параграфе, конечна, то последний ее элемент по построению является относительно ε -стационарной точкой функции $\varphi(X)$. Поэтому будем считать, что последовательность $\{X_k\}$ бесконечна. Так как $X_k \in M(X_0)$, K = 0,1,2,..., а $M(X_0)$ - ограниченное замкнутое множество, то $\{X_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. Любая предельная точка последовательности $\{X_k\}$ является относительно ε -стационарной точкой функции $\varphi(X)$.

Предварительно докажем одну лемму.

ЛЕММА 2. Имеет место предельное соотношение
$$\varliminf_{k\to\infty} \psi_\varepsilon(X_k) > 0. \tag{4.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда найдутся подпоследовательность $\{X_{k_j}\}$ и число $b>0$ такие, что

$$\psi_\varepsilon(X_{k_j}) \leq -b .$$

Существует столь малое $\alpha_0>0$, что для $\alpha\in[0,\alpha_0]$, $i\in R_\varepsilon(X_{k_j})$ и всех k_j будет

$$f_i(X_{k_j}+\alpha g_{k_j}) \leq \varphi(X_{k_j})-\tfrac{1}{2}\alpha\theta_1 b. \tag{4.2}$$

Действительно, в силу (3.3) и (2.6)

$$f_i(X_{k_j}+\alpha g_{k_j}) = f_i(X_{k_j})+\alpha\left(\frac{\partial f_i(X_{k_j})}{\partial X}, g_{k_j}\right)+o_{ik_j}(\alpha)\leq$$

$$\leq \varphi(X_{k_j})-\alpha\theta_1\|v_k\|+o_{ik_j}(\alpha)\leq \varphi(X_{k_j})-\alpha\theta_1 b+o_{ik_j}(\alpha),$$

откуда и следует (4.2).

Далее, положив

$$C_1=\max_{i\in[0:N]}\ \max_{X\in M(X_0)}\left\|\frac{\partial f_i(X)}{\partial X}\right\|,$$

будем иметь для $i\bar{\in} R_\varepsilon(X_{k_j})$

$$f_i(X_{k_j}+\alpha g_{k_j})\leq \varphi(X_{k_j})-\varepsilon\varphi(X_{k_j})+\alpha C_1+o_{ik_j}(\alpha)\leq$$
$$\leq \varphi(X_{k_j})-\varepsilon\mu+\alpha C_1+o_{ik_j}(\alpha).$$

Поэтому найдется такое $\alpha_1>0$, $\alpha_1\leq\alpha_0$, что для $\alpha\in[0,\alpha_1]$, $i\bar{\in} R_\varepsilon(X_{k_j})$, и всех k_j будет

$$f_i(X_{k_j}+\alpha g_{k_j})\leq \varphi(X_{k_j})-\tfrac{1}{2}\varepsilon\mu. \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, в частности, что равномерно по κ_j

$$\varphi(X_{\kappa_j}+\alpha_1 g_{\kappa_j}) \le \varphi(X_{\kappa_j})-\beta, \qquad (4.4)$$

где $\beta = \min\{\frac{1}{2}\alpha_1\theta_1 b, \frac{1}{2}\varepsilon\mu\}$.

Последнее неравенство немедленно приводит нас к противоречию. Действительно, в силу (3.5) числовая последовательность $\{\varphi(X_\kappa)\}$ имеет предел

$$\varphi(X_\kappa) \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} \varphi^* \ge \min_{X\in M(X_0)} \varphi(X),$$

причем при всех κ = 0,1,2,...

$$\varphi(X_\kappa) \ge \varphi^*. \qquad (4.5)$$

Выберем столь большое κ_j, чтобы

$$\varphi(X_{\kappa_j}) \le \varphi^* + \frac{1}{2}\theta_2\beta.$$

Учитывая (3.4) и (4.4), будем иметь

$$\varphi(X_{\kappa_j}) - \varphi(X_{\kappa_j+1}) \ge \theta_2[\varphi(X_{\kappa_j}) - \min_{\alpha>0}\varphi(X_{\kappa_j}(\alpha))] \ge \theta_2\beta.$$

Поэтому

$$\varphi(X_{\kappa_j+1}) \le \varphi(X_{\kappa_j}) - \theta_2\beta \le \varphi^* - \frac{1}{2}\theta_2\beta,$$

что противоречит (4.5).

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Пусть $X_{\kappa_j} \xrightarrow[\kappa_j\to\infty]{} X^*$. Требуется доказать, что $\psi_\varepsilon(X^*) \ge 0$.

Допустим противное :

$$\psi_\varepsilon(X^*) = -b < 0.$$

В силу леммы I для достаточно больших номеров $\kappa_j > K_1$ будет

$$R_\varepsilon(X_{\kappa_j}) \subset R_\varepsilon(X^*).$$

Поэтому

$$\psi_\varepsilon(X_{\kappa_j}) \le \min_{\|g\|=1} \max_{i\in R_\varepsilon(X^*)} \left(\frac{\partial f_i(X_{\kappa_j})}{\partial X}, g\right).$$

Выберем столь большое натуральное $K > K_1$, чтобы для $\kappa_j > K$ выполнялось неравенство

$$\left|\min_{\|g\|=1}\max_{i\in R_\varepsilon(X^*)}\left(\frac{\partial f_i(X_{k_j})}{\partial x},g\right)-\min_{\|g\|=1}\max_{i\in R_\varepsilon(X^*)}\left(\frac{\partial f_i(X^*)}{\partial x},g\right)\right|\leq\frac{b}{2}.$$

Получим для $k_j>K$

$$\psi_\varepsilon(X_{k_j})\leq-\frac{b}{2},$$

что противоречит (4.I).

Теорема доказана.

§ 5. Вспомогательные задачи

На каждом шаге описанного в § 3 метода при выполнении неравенства $\psi_\varepsilon(X_k)<0$ приходится находить v_k и α_k. Задачу определения v_k будем называть первой вспомогательной задачей, а задачу определения α_k – второй вспомогательной задачей.

ПЕРВАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА. Обозначим через z_k ближайшую к началу координат точку многогранника $L_\varepsilon(X_k)$. Очевидно, в качестве v_k можно взять z_k. В этом случае отношение, стоящее в левой части (3.I), равно единице, так что неравенство (3.I) выполняется.

Однако такой точности, вообще говоря, не требуется. Пусть $0<\theta_1<1$ и $\{z_{k_j}\}$ – любая последовательность точек из $L_\varepsilon(X_k)$, сходящаяся при $j\to\infty$ к z_k. В качестве v_k можно взять первый элемент последовательности $\{z_{k_j}\}$, для которого имеет место (3.I). Поскольку

$$\frac{\min\limits_{z\in H_\varepsilon(X_k)}(z,z_{k_j})}{(z_{k_j},z_{k_j})}\xrightarrow[j\to\infty]{}\frac{\min\limits_{z\in H_\varepsilon(X_k)}(z,z_k)}{(z_k,z_k)}=1,$$

то такой элемент найдется.

Заметим, что неравенство (3.I) легко проверяемо.

ВТОРАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА. Положим

$$\Phi_k(\alpha)=\varphi(X_k(\alpha)),\quad \alpha\geq 0.$$

Функция $\Phi_k(\alpha)$ непрерывна и имеет производные слева и справа в любой точке $\alpha\in(0,+\infty)$, причем

$$\Phi_K'(\alpha+0)=\max_{i\in R_0(X_K(\alpha))}\left(\frac{\partial f_i(X_K(\alpha))}{\partial X},g_K\right), \tag{5.1}$$

$$\Phi_K'(\alpha-0)=\min_{i\in R_0(X_K(\alpha))}\left(\frac{\partial f_i(X_K(\alpha))}{\partial X},g_K\right). \tag{5.2}$$

В силу (3.3)

$$\Phi_K'(+0)=\max_{i\in R_0(X_K)}\left(\frac{\partial f_i(X_K)}{\partial X},g_K\right)\leqslant-\theta_1\|v_K\|<0.$$

Заметим также, что множество $M_K(\alpha)=\{\alpha\in[0,+\infty)/\Phi_K(\alpha)\leqslant\Phi_K(0)\}$ ограничено.

Очевидно, в качестве α_K можно взять точку минимума функции $\Phi_K(\alpha)$ на $M_K(\alpha)$. В общем случае такой точности не требуется.

Пусть $0<\theta_2<1$ и $\Phi_K(\alpha)$ - выпуклая на $[0,+\infty)$ функция. Покажем, как находить в конечное число шагов α_K, удовлетворяющее неравенству (3.4).

Рассмотрим три последовательности $\{\alpha_{Kj}^{(1)}\}$, $\{\alpha_{Kj}^{(2)}\}$, $\{\alpha_{Kj}^{(3)}\}$ со свойствами :

I. $0\leqslant\alpha_{Kj}^{(1)}<\alpha_{Kj}^{(2)}<\alpha_{Kj}^{(3)}$;

II. $\Phi_K(\alpha_{Kj}^{(2)})\leqslant\Phi_K(\alpha_{Kj}^{(1)})$, $\Phi_K(\alpha_{Kj}^{(2)})\leqslant\Phi_K(\alpha_{Kj}^{(3)})$;

III. Все три последовательности имеют при $j\to\infty$ один предел α_K^*.

(Такие последовательности можно построить, например, методом золотого сечения - см. [2]).

Положим

$$\Delta_{Kj}=\max\{\Phi_K'(\alpha_{Kj}^{(2)}+0)(\alpha_{Kj}^{(2)}-\alpha_{Kj}^{(3)}),\Phi_K'(\alpha_{Kj}^{(2)}-0)(\alpha_{Kj}^{(2)}-\alpha_{Kj}^{(1)}),0\}.$$

Очевидно (см. рис. 3),

$$0\leqslant\Phi_K(\alpha_{Kj}^{(2)})-\min_{\alpha\geqslant0}\Phi_K(\alpha)\leqslant\Delta_{Kj}. \tag{5.3}$$

В силу (5.1), (5.2) и Ш

$$\Delta_{kj} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0. \qquad (5.4)$$

Переходя в неравенстве (5.3) к пределу при $j\to\infty$, получим

$$\Phi_k(\alpha_k^*) = \min_{\alpha\geq 0} \Phi_k(\alpha).$$

В качестве α_k можно взять первый элемент последовательности $\{\alpha_{kj}^{(2)}\}$, для которого

$$(\Phi_k(0)-\Phi_k(\alpha_{kj}^{(2)}))(1-\theta_2) > \theta_2\Delta_{kj}$$

(в силу (3.2) и (5.4) такой элемент найдется). В этом случае, как нетрудно проверить, неравенство (3.4) будет выполняться.

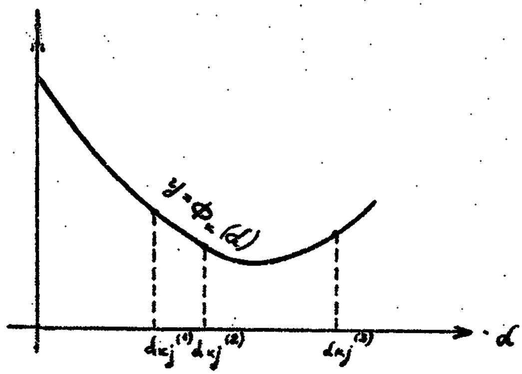

Рис. 3

§ 6. Нахождение стационарных точек

Зафиксируем некоторые $\varepsilon_0>0$, $\rho_0>0$, $\theta_0\in(0,1)$, $\theta_1\in(0,1]$, $\theta_2\in(0,1]$ и возьмем начальное приближение $X_0\in E_n$. Будем считать, что множество $M(X_0)=\{X|\varphi(X)\leq \varphi(X_0)\}$ ограничено.

Применяя ε-метод, описанный в § 3, с начальным приближением X_0 и параметрами ε_0, θ_1, θ_2, в конечное (в силу леммы 2) число шагов, получим точку $X_1\in M(X_0)$, для которой

$$\psi_{\varepsilon_0}(X_1)\geq -\rho_0.$$

Положим $\varepsilon_1 = \theta_0 \varepsilon_0$, $\rho_1 = \theta_0 \rho_0$. Снова применим ε -метод с начальным приближением X_1 и параметрами ε_1 , θ_1 , O_2 . В конечное число шагов получим точку $X_2 \in M(X_1) \subset M(X_0)$, для которой $\psi_{\varepsilon_1}(X_2) \geqslant -\rho_1$. Продолжая аналогично, построим последовательность $\{X_K\}$, причем $X_K \in M(X_0)$, $K = 0,1,2,\ldots,$ и

$$\psi_{\varepsilon_K}(X_{K+1}) \geqslant -\rho_K, \tag{6.1}$$

где $\varepsilon_K = \varepsilon_0 \theta_0^K$, $\rho_K = \rho_0 \theta_0^K$, $K = 0,1,2,\ldots$.

ТЕОРЕМА 2. Любая предельная точка последовательности $\{X_K\}$ является стационарной точкой функции $\varphi(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты будем считать, что сходится вся последовательность $\{X_K\}$:

$$X_K \xrightarrow[K \to \infty]{} X^*.$$

Требуется доказать, что $\psi_0(X^*) \geqslant 0$.

Допустим противное: $\psi_0(X^*) = -b < 0$. В силу (2.5) найдется такое $\varepsilon' > 0$, что

$$\psi_{\varepsilon'}(X^*) = -b.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших номеров K будут выполняться соотношения

$$\psi_{\varepsilon_K}(X_{K+1}) = \psi_{\varepsilon'}(X_{K+1}) \leqslant -\frac{b}{2}.$$

Но это противоречит (6.1).

Теорема доказана.

§ 7. Заключительные замечания

До сих пор предполагалось, что $\mu > 0$. Однако некоторые результаты можно получить и для случая $\mu \leqslant 0$. Для этого нужно взять такую константу $C > 0$, чтобы

$$\inf_{X \in E_n} \max_{i \in [0:N]} (f_i(X) + C) > 0.$$

Любая стационарная точка новой задачи является стационарной точкой и для исходной задачи. Если же X^* – относительно ε -стационарная точка новой задачи, то она является абсолютно $(\varepsilon[\varphi(X^*)+C])$ – стационарной точкой исходной задачи. Напомним, что точка X_0 называется абсолютно ε -стационарной точкой функции $\varphi(X)$, если

$$\min_{\|g\|=1} \max_{i \in R'_\varepsilon(X_0)} \left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X}, g\right) \geq 0,$$

где $R'_\varepsilon(X_0) = \{i \in [0:N] / \varphi(X_0) - f_i(X_0) \leq \varepsilon\}$.

В заключение автор благодарит В.Ф. Демьянова за обсуждение результатов данной работы.

Литература

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н., К теории нелинейных минимаксных задач, УМН, 26:3 (1971), 53-104.
2. Уайлд Д.Дж., Методы поиска экстремума, "Наука", М., 1967.

Поступила в редакцию
12.VI. 1971 г.