УДК 513.88

# СЛАБАЯ $H$ -ВЫПУКЛОСТЬ

С.С. Кутателадзе

Известно, что "хорошие" выпуклые функции или "хорошие" классы выпуклых функций имеют два способа задания: с помощью неравенств Иенсена и как верхние огибающие аффинных функций или их подклассов. Вообще говоря, классы функций, определяемые этими двумя способами, не обязаны совпадать. При этом известны задачи, легко редуцируемые к вопросу о совпадении таких классов.

В настоящей заметке вводится понятие слабой $H$ -выпуклой функции, т.е. функции, задаваемой с помощью неравенств "$H$ -выпуклости", и устанавливается связь этого понятия с понятием $H$ -выпуклой функции [1], т.е. верхней огибающей некоторого подмножества функций из класса $H$ . Оказывается, что различие таких классов функций исчерпывается тем обстоятельством, что неравенства "устойчивы" относительно предельного перехода, а супремальные конструкции, вообще говоря, нет.

Итак, пусть $X$ – некоторое множество и $R^X$ – векторное пространство вещественных функций на $X$ . Пусть, далее, $E$ – векторное подпространство $R^X$ , являющееся одновременно $K$ -линеалом при упорядочении с помощью конуса неотрицательных функций (причем $sup$ двух элементов, вычисленные в $E$ и $R^X$ , совпадают), а $H$ – некоторый выпуклый конус в $E$ . Как известно, элемент $f$ из $E$ называется $H$ -выпуклой функцией, если для каждого $x \in X$ имеет место представление

$$f(x) = \sup_{h \in H, h \leq x} h(x)$$

Совокупность всех $H$ -выпуклых функций из $E$ обозначается через $P(H,E)$, или просто через $P(H)$, если не вызывает сомнений, о каком пространстве $E$ идет речь.

Функция $f$ из $E$ называется слабой $H$ -выпуклой функцией, если для любых точек $x, x_1,\dots,x_n$ из $X$ и неотрицательных чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(x_k) \geq h(x) \qquad (h \in H),$$

выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \geq f(x).$$

Множество всех слабых $H$ -выпуклых функций обозначается через $P_w(H,E)$, или просто $P_w(H)$.

Очевидно, что $P(H) \subset P_w(H)$. Обратное, вообще говоря, не верно, как показывает следующий пример, сообщенный автору В.А. Булавским.

ПРИМЕР I. Пусть $X$ является множеством последовательностей $x=(\xi_n)$ таких, что $0 \leq \xi_n \leq \frac{1}{n}$, а $E=R^X$. Через $H$ обозначим совокупность аффинных, непрерывных в топологии координатной сходимости функций на $X$, и пусть

$$f: x \mapsto \overline{\lim_n}\, n\xi_n.$$

Очевидно, что $f$ является слабой $H$ -выпуклой функцией. С другой стороны, для каждого $h \in H$ такого, что $h \leq f$, на элементах $X$, лишь конечное число членов которых отлично от нуля, функция $h$ неположительна. Так как последнее множество плотно в $X$, то $h \leq 0$. Однако на элементе $\bar{x}=(\frac{1}{n})$ функция $f$ равна I. Следовательно, $f \bar{\in} P(H)$.

Различие классов $H$ -выпуклых и слабых $H$ -выпуклых функций очевидно: второй класс замкнут в топологии простой сходимости, а первый, в общем случае, нет. Следующая теорема показывает, что это обстоятельство исчерпывающее.

ТЕОРЕМА I. Пусть $E$ – векторное подпространство $R^X$. Тогда

$$P_w(H,E) = \overline{P(\bar{H},E)},$$

где черта означает замыкание в топологии простой сходимости

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить включение

$$\overline{P(\bar{H})} \supset P_w(H).$$

Пусть $\bar{E}$ есть пространство, сопряженное к пространству $E$, наделенному топологией простой сходимости. Тогда

$$f \in \overline{P(\bar{H})} \Leftrightarrow \mu(f) \geqslant 0 \quad \forall \mu \in [P(\bar{H})]^*,$$

где $*$, как обычно, означает сопряженный конус. Заметим, что множество $\widetilde{P}$ супремумов конечных подмножеств $H$ плотно в $\sigma(E,E')$ в $P(H)$. Таким образом, $\mu \in [P(\bar{H})]^*$ в том и только том случае, если $\mu \in \widetilde{P}^*$.

Для каждого $\nu \in E'$, $\nu \geqslant 0$, конический отрезок $\langle 0, \nu \rangle$ компактен в $\sigma(E',E)$ и, кроме того, для всяких $h_1, \ldots h_n \in H$, очевидно, существует разбиение $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ функционала $\nu$, являющегося "мерой с конечным носителем", такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k(h_k) = \nu(h_1 \vee \ldots \vee h_n).$$

Следовательно, применима теорема декомпозиции [I], и $\mu \in \widetilde{P}^*$ в том и только том случае, если для всякого разбиения $\{\mu_1^-, \ldots, \mu_n^-\}$ функционала $\mu^-$ найдется разбиение $\{\mu_1^+, \ldots, \mu_n^+\}$ функционала $\mu^+$ такое, что $\mu_k^+(h) \geqslant \mu_k^-(h)$ для всех $h \in H$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Элементы $\nu \in E'$ имеют вид $f \mapsto \sum_{s=1}^{m} \gamma_s f(x_s)$. Таким образом, функционал $\mu$ представляется в форме $\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$, где

$$\mu_k : f \longmapsto \sum_{s=1}^{m} \alpha_k^s f(x_k^s) - \beta_k f(z_k),$$

здесь $x_k^s, z_k \in X$, $\alpha_k^s, \beta_k \geqslant 0$ $(k=1,\ldots,n;\ s=1,\ldots,m)$. При этом $\mu_k \in H^*$.

По условию $\mu_k(f) \geqslant 0$ $(k=1,\ldots,n)$. Значит, $\mu(f) \geqslant 0$. В силу произвольности $\mu$ функция $f$ является предельной точкой множества $H$-выпуклых функций. Теорема доказана.

Приведем один пример применения этой теоремы.

ПРИМЕР 2. Пусть $K$ является выпуклым замкнутым конусом в локально выпуклом пространстве $X$. Через $P_+(K)$ обозначается совокупность определенных на конусе $K$ сублинейных монотонных функционалов, а через $P^m(K)$ – совокупность вполне положительных сублинейных функционалов, определенных на конусе $K$ (см. [3]).

Обозначим через $E$ минковсковское пространство разностей $[P_+(K)]$, а через $H(K)$ – совокупность следов элементов сопряженного конуса $K^*$ на $K$. Тогда $P^m(K)$, по определению, совпадает с $P(H(K))$, т.е. с множеством $H(K)$ – выпуклых функций. Множество $P_+(K)$, в свою очередь, является множеством $P_w(H(K))$ слабых $H(K)$ -выпуклых функций. В самом деле, если

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa h(x_\kappa) \geq h(z) \qquad (h \in H(K)),$$

где $\alpha_\kappa > 0$ и $x_\kappa, z \in K$ $(\kappa=1,\dots,n)$, то $\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa x_\kappa - z \in K$.
Таким образом, всякая слабая $H(K)$ -выпуклая функция удовлетворяет неравенствам

$$P(x_1+x_2) \leq P(x_1)+P(x_2) \qquad (x_1,x_2 \in K);$$

$$P(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad (\alpha \geq 0,\ x \in K);$$

$$P(x) \geq P(y) \qquad (x, y \in K,\ x-y \in K),$$

т.е. входит в $P_+(K)$. Слабая же $H(K)$ -выпуклость монотонной сублинейной функции на $K$ очевидна.

В [3] поставлен вопрос о связи множеств $P_+(K)$ и $P^m(K)$. Теорема I дает в описанной ситуации следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Для каждого конуса $K$

$$\overline{P(H(K))} = P(H(K)).$$

Особенный интерес представляет вопрос о связи непрерывных $H$ -выпуклых и слабых $H$ -выпуклых функций. В этом случае справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть $H$ – выпуклый замкнутый конус в пространстве $C(Q)$ функций, непрерывных на компактном топологическом пространстве $Q$. Каждая слабая $H$ -выпуклая функция является равномерным пределом последовательности $H$ -выпуклых функций в том и только том случае, если меры с конечным носителем плотны в поляре конуса $H$ -выпуклых функций.

Необходимость. Если равномерное замыкание $P(H)$ совпадает с $P_w(H)$, то $[P(H)]^*=[P_w(H)]^*$ (поляра, понятно, берется в пространстве радоновских мер $C^*(Q)$ ). Положим

$$\mathcal{N}=\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_{x_k}-\varepsilon_x:\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k h(x_k)\geq h(x)\ \forall h\in H\right\}$$

(здесь $\varepsilon_x$, как обычно, мера Дирака $\varepsilon_x: f\mapsto f(x)$ ). Проверим, что $[P_w(H)]^*$ является широким (т.е. в топологии $\sigma(C^*(Q),C(Q))$ ) замыканием конической выпуклой оболочки $K(\mathcal{N})$ множества $\mathcal{N}$. В самом деле, в противном случае найдется мера $\mu_0\in[P_w(H)]^*$, не входящая в широкое замыкание $K(\mathcal{N})$. Применяя теорему отделимости Эйдельгайта, найдем непрерывную функцию $f$ такую, что $\mu_0(f)<0$ и $\mu(f)$ для всех $\mu\in K(\mathcal{N})$. Так как последнее означает, что $f$ является слабой $H$-выпуклой функцией, то приходим к противоречию. Ввиду того, что $K(\mathcal{N})$ состоит из мер с конечным носителем, получаем требуемое.

Достаточность. Пусть $S$ является широко плотным в $[P(H)]^*$ множеством мер с конечным носителем и $f$ - произвольная слабая $H$-выпуклая функция. Тогда $f$ является пределом $H$-выпуклых функций в том и только том случае, если $\mu(f)\geq 0$ для всех $\mu\in S$.

Конус $H$, как и всякий выпуклый замкнутый конус в $C(Q)$, обладает свойством Решетняка-Лэмиса [I]. Таким образом, для каждой меры $\mu$ из $S$

$$\mu=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\varepsilon_{x_k}-\sum_{s=1}^{m}\beta_s\,\varepsilon_{y_s},$$

где $\alpha_k>0$, $\beta_s>0$, $x_k,y_s\in X$ $(k=1,\dots,n;\ s=1,\dots,m)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_{x_k}\underset{H}{\gg}\sum_{s=1}^{m}\beta_s\,\varepsilon_{y_s}\ .$$

В частности, для разбиения $\{\beta_1\varepsilon_{y_1},\dots,\beta_m\varepsilon_{y_m}\}$ найдется разбиение $\left\{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^1\varepsilon_{x_k},\dots,\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^m\varepsilon_{x_k}\right\}$, где

$$\gamma_k^s\geq 0\ \ (k=1,\dots,n;\ s=1,\dots,m),\ \ \sum_{s=1}^{m}\gamma_k^s=\alpha_k\ ,$$

такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^s h(x_k) \geq \beta_s h(y_s) \quad (s=1,\dots,m).$$

Так как $f$ является слабой $H$ -выпуклой функцией, то

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^s f(x_k) \geq \beta_s f(y_s) \quad (s=1,\dots,m),$$

или, производя суммирование, $\mu(f) \geq 0$. В силу произвольности $\mu \in S$ получаем требуемое. Теорема полностью доказана.

ПРИМЕР 3. Приведем один полезный факт, применяемый в геометрии выпуклых поверхностей.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $H$ – замкнутый выпуклый конус в полулинеале выпуклых компактов числового пространства $R^n$ (см. [1],[4]). Каждая слабая $H$ -выпуклая функция является равномерным пределом $H$ -выпуклых функций.*

Эта теорема мгновенно следует из теоремы 3 и следующего факта, практически использованного, например, в [5], [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $H$ – выпуклый конус в полулинеале выпуклых компактов числового пространства $R^n$. Множество мер с конечным носителем широко плотно в $H^*$.*

## Литература


1. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., К теории структурной двойственности функций и множеств. Оптимальное планирование, 17 (1970), 96-144.
2. Буземан Г., Выпуклые поверхности. "Наука", М., 1964.
3. Рубинов А.М., Сублинейные функционалы, определенные на конусе. Сиб.мат.журн., 11:2 (1970), 429-441.
4. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М., Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел. Оптимальное планирование, 14 (1969), 61-79.
5. Кутателадзе С.С., Положительные линейные по Минковскому функционалы над выпуклыми поверхностями. ДАН СССР, 192, 5 (1970), 984-986.

6. Кутателадзе С.С., Пример на декомпозицию. Оптимальное планирование, I7 (1970), I45–I48.

Поступила в редакцию
I5.VIII. I97I г.