Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 517.98

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУБОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА СЛЕДЯЩИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б.С.Дарховский, Г.Г.Магарил-Ильяев

§ 1. Введение

Рассматривается следующая задача оптимального управления динамической системой с дискретным временем:

$$\mathcal{J}=\sum_{t=1}^{T}|x_t-x_t^*|\to\inf; \tag{1.1}$$

$$x_{t+1}=F_t(x_t)+G_t(u_t),\quad x_0=a; \tag{1.2}$$

$$u_t\in\Omega_t, \tag{1.3}$$

где $t=0,1,2,\ldots$ и при каждом $t\geq 0$ x_t, x_t^* и u_t - элементы вещественных гильбертовых пространств X и U соответственно, x_t - фазовый вектор, u_t - вектор управления, $\{x_t^*\}_{t\geq 0}$ - заданная последовательность векторов, $F_t:X\to X$, $G_t:U\to X$.

Задача (1.1)-(1.3), представляющая собой задачу наилучшего слежения за последовательностью $\{x_t^*\}_{t\geq 0}$, заключается в нахождении такого набора векторов $\hat{u}_0,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{T-1}$ (оптимального управления), который удовлетворяет ограничениям (1.2), (1.3) и доставляет минимум функционалу $\mathcal{J}$.

Сформулированная задача нередко возникает при синтезе систем управления. Однако ее точное решение (даже в случае, когда X и U конечномерны) представляет значительные трудности, в связи с чем возникает необходимость использовать различные приближенные методы. По-видимому, один из первых и широко известных приемов подобного рода заключается в следующем. Рассмотрим задачу

$$\|x_1 - x_1^*\| = \|F_0(a) + G_0(u) - x_1^*\| \to \inf, \quad u \in Q_0,$$

и пусть $\tilde{u}_0$ - какое-либо ее решение. Положим $\tilde{x}_1 = F_0(a) + G_0(\tilde{u}_0)$ и рассмотрим следующую задачу:

$$\|x_2 - x_2^*\| = \|F_1(\tilde{x}_1) + G_1(u) - x_2^*\| \to \inf, \quad u \in Q_1,$$

решение которой обозначим через $\tilde{u}_1$. Продолжая этот процесс далее, получим последовательность управлений $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{T-1}$, которую можно рассматривать как приближенное решение задачи (I.I)-(I.3).

Различные аспекты такого метода управления изучались многими авторами (см., например, [I-3]). Следуя [2,3], будем называть указанный приближенный метод решения задачи (I.I)-(I.3) методом локальной оптимизации (МЛО).

Целью работы является исследование устойчивости системы (I.2), замкнутой МОЛ-управлением, оценка разности между нижней гранью функционала J в задаче (I.I)-(I.3) и его значением при МЛО-управлении, а также описание класса задач, для которых подобный метод управления оптимален. Ряд результатов настоящей работы анонсирован в [4].

§ 2. Исследование устойчивости

В этом параграфе ограничимся случаем, когда $U = X$ и рассмотрим систему вида

$$x_{t+1} = F(x_t) + u_t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.I}$$

Будем считать, что последовательность $\{x_t^*\}_{t \geq 0}$ такова, что найдется последовательность управлений $u_t^* \in Q_t$, $t \geq 0$, для которой выполняется соотношение

$$x_{t+1}^* = F(x_t^*) + u_t^*, \tag{2.2}$$

т.е. желаемая траектория $\{x_t^*\}_{t \geq 0}$ реализуема системой (2.I), (I.3).

Скажем, что МЛО-слежение является устойчивым, если для любого решения $\{x_t\}_{t \geq 0}$ с начальным условием x_0 системы (2.I), замкнутой МЛО-управлением, из того, что $\|x_0 - x_0^*\| < \varepsilon$, следует $\sup_t \|x_t - x_t^*\| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть выполнены следующие условия:

a) $F: X \to X$ дифференцируема по Фреше и существует $M > 0$ такое, что

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

b) $\Omega_t = \Omega = \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$, где $f: X \to R$ – выпуклый дифференцируемый по Фреше функционал, и существуют $L > 0$ и $m > 0$ такие, что

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in X,$$

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \|f'(x)\| = m > 0,$$

где $\partial\Omega = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

c) $\sup_{t \geq 0} \|F'(x_t^*)\| = C < \infty$.

Пусть $E = \{t \geq 0 \mid u_t^* \in \operatorname{int} \Omega\}$ и $t_0 = \inf E < +\infty$.

d) Если $t_0 \neq 0$, то положим $X_t = \ker f'(u_t^*)$, $X_t^\perp$ – ортогональное дополнение к X_t, $P_t: X^t \to X_t$, $P_t^\perp: X \to X_t^\perp$ – соответствующие ортогональные проекторы, $t = 0, 1, \ldots, t_0 - 1$. Будем предполагать, что

$$\sup_{t \leq t_0 - 1} \|P_t^\perp f'(x_t^*)(x_t - x_t^*)\| = \theta < 1.$$

ТЕОРЕМА I.I. В предположениях a) – d) слежение за последовательностью $\{x_t^*\}_{t \geq 0}$ при помощи МЛО-управления в системе (2.I) устойчиво.

Сделаем несколько замечаний по поводу условий теоремы.

I) Вследствие выпуклости и замкнутости Ω МЛО-управление системой (2.I)) всегда существует.

2) Условие b) означает, что поверхность $\partial\Omega$ обладает определенной "регулярностью". В частности, в конечномерном случае, если Ω ограничено, то это условие равносильно тому, что Ω – выпуклое гладкое n-мерное многообразие.

3) Покажем, что условие d) существенно. Рассмотрим следующий пример:

$$x_{t+1} = Ax_t + u_t, \quad u_t \in \Omega,$$

где $X = R^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,$$

$$\Omega = \{(u^1, u^2) \mid (u^1)^2 + (u^2+1)^2 \leq 1\},$$

$$x_0 = (0, -\varepsilon), \ \varepsilon > 0; \quad x_t^* = 0, \quad t \geq 0.$$

Тогда $u_t^* = 0$, $t \geq 0$, $X_0 = Ker\, f'(0,0) = \{(x^1, x^2) \mid x^2 = 0\}$. Легко убедиться, что $\|P_0^{\perp} A\| \geq 1+\alpha > 1$ и, следовательно, условие α) не выполнено. По определению МЛО-управления имеем

$$\|x_1\| = \min_{u \in \Omega} \|Ax_0 + u\| = \min_{u \in \Omega} ((u^1)^2 + (u^2 - \varepsilon(1+\alpha))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда сразу следует, что $\tilde{u}_1 = 0$, и поэтому $\|x_1\| = \varepsilon(1+\alpha)$. Продолжая эти вычисления, получаем, что $\|x_t\| = \varepsilon(1+\alpha)^t \to \infty$ при $t \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Таким образом, система, замкнутая МЛО-управлением, может оказаться неустойчивой, если не выполнено условие α). Отметим, что в рассмотренном примере система управляема (для проверки можно воспользоваться, например, критерием из [5]).

Доказательству теорему I.I предпошлем следующее утверждение, представляющее, возможно, и самостоятельный интерес.

ЛЕММА ("глобальный"вариант теоремы Люстерника). Пусть X - вещественное гильбертово пространство, $f: X \to R$ - выпуклый дифференцируемый по Фреше функционал такой, что

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и некоторого $L > 0$ и

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \|f'(x)\| = m > 0,$$

где $\partial\Omega = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, $\Omega = \{x \in X \mid f(x) \leq 0\}$.

Тогда если $\rho(x, Q)$ - расстояние от x до Q и $B=\{x\in X / \|x\|< 1\}$, то

$$\rho(x, Q) \leq \frac{2}{m} f_+(x), \text{ если } x \in Q + \frac{m}{7L} B,$$

$$f_+(x) = max(f(x), 0).$$

Доказательство леммы можно получить на том же пути, что и классическую теорему Люстерника (см., например, [6]), и поэтому мы его не приводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.I. Предположим сначала, что $t_0 < +\infty$. По определению МЛО-управления и в силу (2.2) имеем

$$\|x_{t_0+1} - x^*_{t_0+1}\| = \min_{u\in Q} \|F(x_{t_0}) + u - x^*_{t_0+1}\| = \min \|F(x_{t_0}) -$$

$$- F(x^*_{t_0}) + F(x^*_{t_0}) + u - u^*_{t_0} + u^*_{t_0} - x^*_{t_0+1}\| = \tag{2.3}$$

$$= \min_{u\in Q} \|F(x_{t_0}) - F(x^*_{t_0}) + u - u^*_{t_0}\|.$$

Если $t_0 = 0$, то, выбирая x_0 так, чтобы величина $\|F(x_0) - F(x^*_0)$ была достаточно мала, получаем, что $\|x_1 - x^*_1\| = 0$, т.е. $x_1 = x^*_1$. Отсюда в силу предположения (2.2) следует, что $x_t = x^*_t$, $t \geq 0$, и в этом случае теорема доказана.

Пусть $t_0 > 0$. Покажем, что существует такое $0 < \hat{\delta} < 1$ (не зависящее от последовательности $\{x^*_t\}_{t\geq 0}$), что справедлива оценка

$$\|x_{t_0} - x^*_{t_0}\| \leq \hat{\delta}^{t_0} \|x_0 - x^*_0\|. \tag{2.4}$$

В силу условия a)

$$F(x_0) = F(x^*_0) + F'(x^*_0)(x_0 - x^*_0) + z_1(x_0 - x^*_0),$$

где $z_1 = (\|x_0 - x^*_0\|)$. Отсюда и из (2.I) (см. также условие α)) имеем

$$\|x_1 - x^*_1\| = \min_{u\in Q} \|F(x^*_0) + F'(x^*_0)(x_0 - x^*_0) + z_1(x_0 - x^*_0) + u - u^*_0 +$$

$$+ u^*_0 - x^*_1\| = \min_{u\in Q} \|F'(x^*_0)(x_0 - x^*_0) - u^*_0 + u + z_1(x_0 - x^*_0)\| =$$

$$=\min_{u\in\Omega}\|P_0^\perp F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+u-u_0^*+r_1(x_0-x_0^*)\|\le$$

$$\le\|P_0^\perp F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)\|+\min_{v\in-u_0^*+\Omega}\|P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+v+r_1(x_0-x_0^*)\|.$$

Легко видеть, что функция $f_0(x)=f(x+u_0^*)$ и множество $\Omega_0=-u_0^*+\Omega=\{x\mid f_0(x)\le 0\}$ удовлетворяют условиям леммы. Пусть $\delta<\hat\delta<1$. Выберем x_0 из условия

$$\|x_0-x_0^*\|\le\min\left(\frac{m}{7CL},\ \frac{m(\hat\delta-\delta)}{Mm+2LC^2}\right).$$

Тогда вектор $P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)\in\Omega_0+\frac{m}{7L}B$, и если v_0 - проекция этого вектора на Ω_0, то по лемме

$$\|P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+v_0\|\le\frac{2}{m}f(-P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+u_0^*)=$$

$$=\frac{2}{m}(f(u_0^*)-\langle f'(u_0^*),P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)\rangle+r_2(-P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)))=$$

$$=\frac{2}{m}r_2(-P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)).$$

По условию b)

$$|r_2(-P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*))|\le L\|P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)\|^2\le$$

$$\le LC^2\|x_0-x_0^*\|.$$

Учитывая аналогичную оценку для $r_1(x_0-x_0^*)$ и условие d), получим

$$\min_{v\in\Omega}\|P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+v+r_1(x_0-x_0^*)\|\le\|P_0F'(x_0^*)(x_0-x_0^*)+$$

$$+v_0+r_1(x_0-x_0^*)\|\le\frac{2}{m}LC^2\|x_0-x_0^*\|^2+M\|x_0-x_0^*\|^2.$$

Следовательно,

$$\|x_1-x_1^*\|\le\|x_0-x_0^*\|\left(\delta+\left(M+\frac{2LC^2}{m}\right)\|x_0-x_0^*\|\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$\|x_1 - x_1^*\| \le \hat{\delta} \|x_0 - x_0^*\| < \|x_0 - x_0^*\|.$$

Продолжая этот процесс по индукции, устанавливаем формулу (2.4). Отсюда, уменьшая, если необходимо, величину $\|x_0 - x_0^*\|$ и используя (2.3), получаем, как и для случая $t_0 = 0$, что $x_t = x_t^*$ при $t > t_0$, т.е. теорема доказана при $t_0 < +\infty$.

Если $t_0 = +\infty$, то, как и ранее, доказывается по индукции оценка (2.4) для всех $t \geq 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Отметим, что таким же путем может быть доказана теорема об устойчивости для систем и ограничений более общего вида, чем рассмотренные (см., например, формулировку соответствующей теоремы в [4]). Здесь мы ограничились наиболее простым случаем, чтобы не усложнять изложение.

§ 3. Оценка потерь по функционалу при МЛО-управлении

В этом параграфе рассматривается задача (I.I)-(I.3) в предположении, что выполнено условие (2.2). Проводя простые преобразования, нетрудно показать, что эта задача может быть переписана в виде

$$J = \sum_{t=1}^{T} \|x_t\| \to \inf, \tag{3.I}$$

$$x_{t+1} = \Phi(x_t) + v_t, \quad x_0 = a, \tag{3.2}$$

$$v_t \in V_t, \tag{3.3}$$

где $\Phi_t(0) = 0, \quad 0 \in V_t \subset X, \quad t = 0, 1, 2, \ldots$

Далее будем предполагать, что существуют такие неубывающие функции $\varphi_t(\cdot)$ и $\psi_t(\cdot)$ на $[0, +\infty)$, $t = 1, 2, \ldots$, что

$$\varphi_t(\|x\|) \le \|\Phi_t(x)\| \le \psi_t(\|x\|) \tag{3.4}$$

для всех $x \in X$.

Заметим, что какая-либо оценка слева в (3.4) существует всегда (например, $\varphi_t \equiv 0$). Не останавливаясь на условиях, гарантирующих существование оценки справа, отметим лишь, что в линейном случае ($\Phi_t(x) = A_t x$, где A_t - линейный непрерывный оператор) $\psi_t(\theta) = \|A_t\| \theta$.

Введем обозначения, необходимые для формулировки теоремы. Пусть $B_\rho=\{x\in X\,/\,\|x\|\leq\rho\}$, $\rho>0$ и $M\subset X$ - множество, содержащее ноль. Положим

$$r(M)=\sup\{r\geq 0\,/\,B_r\subset M\},$$

$$R(M)=\inf\{R\geq 0\,/\,M\subset B_R\}=\sup\{\|x\|\,/\,x\in M\}.$$

Пусть $r_t\leq r(V_t)$, $R_t\geq R(V_t)$, $t=0,1,2,\ldots$ Рассмотрим две последовательности неотрицательных чисел $\{\xi_t\}_0^{T-1}$, $\{\eta_t\}_0^{T-1}$, определенные следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases}\xi_0=(\|\Phi_0(a)\|-r_0)_+\,;\\ \xi_t=(\psi_t(\xi_{t-1})-r_t)_+\,,\quad t=1,\ldots,T-1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\eta_0=(\|\Phi_0(a)\|-R_0)_+\,,\\ \eta_t=(\varphi_t(\eta_{t-1})-R_t)_+\,,\quad t=1,\ldots,T-1.\end{cases}$$

Здесь $b_+=\max(0,b)$, если b конечно и $(-\infty)_+=0$.

Далее будем предполагать, что МЛО-управление в задаче (3.I)-(3.3) существует, т.е. задача

$$\|\Phi_t(x_t)+v\|\to\inf,\qquad v\in V_t, \tag{3.5}$$

имеет решение при всех $t\geq 0$. Если это предположение не выполняется, то можно рассматривать ε-решение задачи (3.5), при этом последующие рассуждения очевидным образом модифицируются.

ТЕОРЕМА. 3.I. Пусть $J^{loc}(a)$ - значение функционала J в задаче (3.I) - (3.3) при МЛО-управлении и $\hat{J}(a)$ - минимальное значение этого функционала. Тогда справедлива оценка

$$J^{loc}(a)-\hat{J}(a)\leq\sum_{t=1}^{T}(\xi_{t-1}-\eta_{t-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$d(x,B_\rho)=(\|x\|-\rho)_+ \tag{3.6}$$

для всякого $x \in X$, где $d(x, B_\rho)$ - расстояние от x до шара B_ρ . Действительно, если $\|x\| \leq \rho$, то $d(x, B_\rho)=0=(\|x\|-\rho)_+$. Пусть $\|x\| > \rho$ и $y \in B_\rho$. Тогда $\|x-y\| \geq \|x\|-\|y\| \geq \|x\|-\rho$, т.е. $d(x, B_\rho) \geq \|x\|-\rho$. Но на векторе $\hat{x}=(\rho/\|x\|)x \in B_\rho$ имеем, что $\|x-\hat{x}\|=\|x\|-\rho$. Следовательно, $d(x, B_\rho) \leq \|x\|-\rho$, т.е. справедливо (3.6).

Оценим снизу величину $\hat{\mathcal{J}}(a)$. Пусть $v_t \in V_t$, $t=0,1,\ldots, T-1$, - некоторый фиксированный набор управлений и $\{x_t\}_1^T$ - соответствующая траектория. Докажем по индукции, что $\|x_t\| \geq \eta_{t-1}$, $t=1,\ldots,T$. Пусть $t=1$. Тогда

$$\|x_1\|=\|\varphi_0(a)+v_0\| \geq \min_{v \in V_0} \|\varphi_0(a)+v\| \geq \min_{v \in B_{R_0}} \|\varphi_0(a)+v\|=$$

$$=d(-\varphi_0(a), B_{R_0})=(\|\varphi_0(a)\|-R_0)_+=\eta_0 .$$

Пусть неравенства доказаны для $t=1,\ldots,k$. Покажем, что $\|x_{k+1}\| \geq \eta_k$. Аналогично предыдущему проверяется, что

$$\|x_{k+1}\| \geq (\|\varphi_k(x_k)\|-R_k)_+ .$$

Используя теперь (3.4), монотонность функции $(t-\alpha)_+$ при $t \geq 0$ и определение последовательности $\{\eta_t\}$, имеем

$$\|x_{k+1}\| \geq (\varphi_k(\|x_k\|)-R_k)_+ \geq (\varphi_k(\eta_{k-1})-R_k)_+=\eta_k .$$

Складывая установленные неравенства, получим

$$\mathcal{J}(a; v_0,\ldots,v_{T-1}) \geq \sum_{t=1}^{T} \eta_{t-1} .$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\mathcal{J}}(a) \geq \sum_{t=1}^{T} \eta_{t-1} .$$

Оценим теперь сверху величину $\mathcal{J}^{loc}(a)$. Пусть $v_t \in V_t$, $t=0,1,\ldots,T-1$, - МЛО-управление (отвечающее начальному значению a) и $\{x_t\}_1^T$ - соответствующая траектория. Докажем, что $\|x_t\| \leq \xi_{t-1}$, $t=1,\ldots,T$. Пусть $t=1$. Тогда

$$\|x_1\|=\|\varphi_0(a)+v_0\|=\min_{v \in V_0} \|\varphi_0(a)+v\| \leq \min_{v \in B_{r_0}} \|\varphi_0(a)+$$

$$+v\| = d(-\Phi_0(a), B_{r_0}) = (\|\Phi_0(a)\| - r_0)_+ = \xi_0 .$$

Пусть оценка установлена для $t = 1,\dots,k$. Имеем, аналогично предыдущему,

$$\|x_{k+1}\| \le (\|\Phi_k(x_k)\| - r_k)_+ \le (\psi_k(\xi_{k-1}) - r_k)_+ = \xi_k .$$

Складывая полученные неравенства, приходим к соотношению

$$J^{loc}(a) \le \sum_{t=1}^{T} \xi_{t-1},$$

которое вместе с оценкой для $\hat{J}(a)$ доказывает теорему.

§ 4. Условия оптимальности МЛО-управления

Сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности МЛО-управления для одного класса задач вида (3.I)-(3.3). Рассмотрим задачу

$$J = \sum_{t=1}^{T} \|x_t\| \to inf, \tag{4.I}$$

$$x_{t+1} = A_t x_t + v_t, \quad x_0 = a, \tag{4.2}$$

$$|v_t| \le \rho_t, \tag{4.3}$$

где $A_t : X \to X$ - линейные непрерывные обратимые операторы, $t \ge 0^t$.

ТЕОРЕМА 4.I. Для оптимальности МЛО-управления в задаче (4.I) - (4.3) при любом начальном векторе $a \in X$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие $\alpha_t > 0,\ t = 1,\dots,T$, что выполнены соотношения

$$|A_t x\| = \alpha_t \|x\|, \quad t = 1,\dots,T, \quad \forall x \in X. \tag{4.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Воспользуемся теоремой 3.I. В данном случае $r_t = R_t = \rho_t$, $\varphi_t(\theta) = \psi_t(\theta) = \alpha_t(\theta)$, и поэтому $\xi_t = \eta_t$, $t = 0,1,\dots,T-1$. Отсюда следует, что $J^{loc}(a) = \hat{J}(a)$ для всех $a \in X$.

Необходимость. Для простоты изложения будем предполагать, что $T = 2$ (в общем случае рассуждения аналогичны). Поскольку операторы A_0 и A_1 обратимы, существует такое число $c > 0$, что

$$\frac{\rho_0}{\|A_0 x\|} + \frac{\rho_1}{\|A_1 A_0 x\|} < 1,$$

если $\|x\| \geqslant c$. Пусть $\|a\| \geqslant c$. Тогда МЛО-управление, отвечающее начальному состоянию a , имеет вид

$$\tilde{v}_0 = -(\rho_0/\|A_0 a\|)A_0 a, \quad \tilde{v}_1 = -(\rho_1/\|A_1 A_0 a\|)A_1 A_0 a. \qquad (4.5)$$

Это сразу следует из доказательства формулы (3.6)) и определения МЛС-управления. Соответствующие переменные состояния выражаются по формулам

$$\tilde{x}_1 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\|A_0 a\|}\right)A_0 a, \quad \tilde{x}_2 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\|A_0 a\|} - \frac{\rho_1}{\|A_1 A_0 a\|}\right)A_1 A_0 a.$$

По предположению теоремы, пара $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1)$ оптимальна в задаче (4.I)-(4.3), т.е. является решением следующей задачи:

$$\|x_1\| + \|x_2\| = \|A_0 a + v_0\| + \|A_1(A_0 a + v_0) + v_1\| \to min, \qquad (4.6)$$

$$\|v_i\| \leqslant \rho_i, \quad i = 0, 1.$$

Это задача выпуклого программирования. Поэтому согласно теореме Куна - Таккера (см., например, [6]) найдутся такие числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 0, 1$, что функция

$$\mathcal{L} = \|A_0 a + v_0\| + \|A_1(A_0 a + v_0) + v_1\| + \sum_{i=0}^{1} \lambda_i (\|v_i\| - \rho_i)$$

достигает своего минимума по переменным (v_0, v_1) в точке $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1)$ и при этом выполняются соотношения

$$\lambda_i (\|\tilde{v}_i\| - \rho_i) = 0, \quad i = 0, 1.$$

(В силу того, что в задаче (4.6) очевидным образом выполнено условие Слейтера, множитель Лагранжа при минимизируемом функционале равен I.) Из формулы (4.5) следует, что $\|A_0 a + \tilde{v}_0\| \neq 0$, $\|A_1(A_0 a + \tilde{v}_0) + \tilde{v}_1\| \neq 0, \|\tilde{v}_i\| \neq 0, i = 0, 1$, и поэтому функция $\mathcal{L}$ дифференцируема по Фреше в точке $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1)$. Поскольку это точка минимума $\mathcal{L}$, то необходимо

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_0}\right|_{(\tilde{v}_0,\tilde{v}_1)} = \frac{1}{\|\tilde{x}_1\|}\tilde{x}_1 + \frac{1}{\|\tilde{x}_2\|}A_1^*\tilde{x}_2 + \frac{\lambda_0}{\|\tilde{v}_0\|}\tilde{v}_0 = 0,$$

где A_1^* - оператор, сопряженный к A_1 .

Подставляя сюда выражения для $\tilde{v}_i$ и $\tilde{x}_i$, получаем

$$\frac{1}{\|A_0 a\|}A_0 a + \frac{1}{\|A_1 A_0 a\|}A_1^* A_1 A_0 a - \frac{\lambda_0}{\|A_0 a\|}A_0 a = 0.$$

Умножая теперь обе части этого равенства на $A_0 a$ скалярно, будем иметь

$$\|A_1 A_0 a\| = (\lambda_0 - 1)\|A_0 a\|.$$

Пусть $x \in X$ и $x \neq 0$. Положим $y = A_0^{-1}x$. Существует такое $t > 0$, что $\|ty\| > c$. Следовательно,

$$\|A_1 x\| = \|A_1 A_0 y\| = t^{-1}\|A_1 A_0 (ty)\| = t^{-1}(\lambda_0 - 1)\|A_0(ty)\| =$$

$$= (\lambda_0 - 1)\|A_0 y\| = (\lambda_0 - 1)\|x\|.$$

Таким образом, $\|A_1 x\| = \alpha_1 \|x\|$, где $\alpha_1 = (\lambda_0 - 1) > 0$ (в силу обратимости A_1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Нетрудно показать, что в условиях теоремы

$$\mathcal{J}^{loc}(a) = \hat{\mathcal{J}}(a) = \sum_{t=1}^{T}\Big(1 - \sum_{i=0}^{t-1}\frac{\rho_i}{\|A_i \ldots A_0 a\|}\Big)_+ \|A_{t-1}\cdots A_0 a\|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что утверждение теоремы и в части достаточности сохраняется, если вместо уравнения (4.2) рассматривать уравнение $x_{t+1} = \Phi_t(x_t) + v_t$, где $\|\Phi_t(x)\| = \psi_t(\|x\|)$ для всех $x \in X$ и $\psi_t(\cdot)$ - неубывающая функция.

Рассмотрим еще один случай, когда МЛО-управление является оптимальным. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J} = \sum_{t=1}^{T}\|x_t\| \to \inf, \tag{4.7}$$

$$x_{t+1} = A_t x_t + v_t, \quad x_0 = a, \tag{4.8}$$

$$v_t \in L, \tag{4.9}$$

где $A_t : X \to X$ - линейные непрерывные операторы и $L \subset X$ - замкнутое подпространство в X .

ТЕОРЕМА 4.2. Если L является инвариантным подпространством для каждого из операторов A_t, $t \geq 0$, то МЛО-управление оптимально в задаче (4.7) - (4.9).

Доказательство теоремы сводится к непосредственному подсчету $\mathcal{J}(a)$ и $\mathcal{J}^{loc}(a)$. Простые примеры показывают, что требование инвариантности L существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. МОИСЕЕВ Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981.
2. КЕЛЬМАНС Г.К., ПОЗНЯК А.С. Алгоритмы управления динамическими системами на основе локальной оптимизации. - Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика, 1977, № 5, с.194-201.
3. КЕЛЬМАНС Г.К., ПОЗНЯК А.С., ЧЕРНИЦЕР А.В. Алгоритм "локальной" оптимизации в задачах асимптотического управления нелинейными динамическими объектами. - Автоматика и телемеханика, 1977, № 11, с.73-88.
4. ДАРХОВСКИЙ Б.С., МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ Г.Г. О методе локальной оптимизации для управления динамическими системами. - Докл. АН СССР, 1984, т.274, № 2, с.273-275.
5. NGUYEN KHOA SON. Controllability of linear discrete-time systems with constrained controls in Banach spaces. - Control and Cybernetics, 1981, v.10, N 1-2, pp.5-16.
6. АЛЕКСЕЕВ В.М., ТИХОМИРОВ В.М., ФОМИН С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.11.1985 г.