Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Численные методы

УДК 519.85

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ. СФЕРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ АЛГОРИТМА

В.И.Шмырев

Подход, положенный в основу настоящей работы, базируется на сведении линейной задачи дополнительности к задаче отыскания прообраза некоторой фиксированной точки при непрерывном отображении евклидовой сферы в себя. Это дает возможность подключить к анализу задачи аппарат топологии и воспользоваться некоторыми известными утверждениями из этой области.

Такой подход позволяет не только с единой точки зрения осветить значительную часть уже известных результатов (познакомиться с которыми можно в [1,2]), но, кроме того, получить новые утверждения с разрешимости задачи. На этом пути очень естественно возникает и новая версия алгоритма дополнительности, расширяющая класс решаемых задач по сравнению с известным алгоритмом Лемке [3].

§ 1. Формулировка задачи и основное предположение. Геометрическая интерпретация

Будем рассматривать линейную задачу дополнительности в следующем виде: среди решений линейной системы неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq q_i, \qquad i=1,\dots,n, \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j=1,\dots,n, \tag{2}$$

найти такое решение, чтобы выполнялось условие

$$x_i(\sum a_{ij}x_j - q_i) = 0, \quad i=1,\ldots,n. \tag{3}$$

Условие (3) означает, что в каждой паре соответствующих друг другу неравенств (I) и (2) одно из неравенств должно непременно выполняться как равенство. Такого рода условия известны в математическом программировании под названием "условия дополняющей нежесткости". Этим и объясняется термин дополнительность в названии рассматриваемой задачи.

Для дальнейших рассмотрений более удобной является несколько иная форма задачи. Введем неотрицательные дополнительные переменные x_{n+j}, сводя неравенства (I) к равенствам

$$\sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = q_i, \quad i=1,\ldots,n. \tag{I$'$}$$

Теперь систему равенств (I′) запишем в векторном виде, что приводит к требуемой формулировке условий задачи:

$$\sum_{j=1}^{2n} A^j x_j = q, \tag{4}$$

$$x_j, x_{n+j} \geq 0, \quad j=1,\ldots,n, \tag{5}$$

$$x_j, x_{n+j} = 0, \quad j=1,\ldots,n. \tag{6}$$

Здесь $A^j = (a_{1j},\ldots,a_{nj})$, $A^{n+j} = -e_j = (0,\ldots,0,-1,\ldots,0) \in R^n$ для $j=1,\ldots,n$ и $q=(q_1,\ldots,q_n)$.

Будем называть множество $\mathcal{B} \subset \{1,2,\ldots,2n\}$ комплементарным, если из каждой пары $\{j, n+j\}$, $j=1,\ldots,n$, в него входит один и только один элемент.

Заметим, что если для некоторого вектора $x \in R^{2n}$ выполняется

$$x_j = 0, \quad j \notin \mathcal{B}, \tag{7}$$

где $\mathcal{B}$ - комплементарное множество, то для такого x выполнены условия (6). Обратно, если для $x \in R^{2n}$ выполняются условия (6), то можно указать (вообще говоря, не единственное) комплементарное множество $\mathcal{B}$ такое, чтобы выполнялось (7).

Таким образом, условие (6) можно заменить условием (7).

При дальнейших рассмотрениях везде, не оговаривая особо, будем предполагать выполненным следующее

ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Для любого комплементарного множества $\mathcal{B}$ и любого нетривиального набора неотрицательных коэффициентов x_j, $j \in \mathcal{B}$, имеет место

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} A^j x_j \neq 0. \qquad (8)$$

Хотя это предположение и ограничивает класс рассматриваемых задач, однако ясно, что сколь угодно малой вариацией исходных данных можно добиться, чтобы оно выполнялось. Тем самым речь идет об условии "общности положения". Иными словами, рассматривается "массовый" вариант задачи.

Так как при $q = 0$ решение задачи тривиально, то будем считать также, что $q \neq 0$.

Приступая к исследованию задачи, следует отметить, что вопрос о существовании решения допускает различные формулировки. Нас будет интересовать такая его постановка: когда можно гарантировать, что задача дополнительности с заданной матрицей $\{a_{ij}\}$ разрешима при любом векторе q ?

Для интерпретации как самой задачи, так и существа рассматриваемого подхода представляется естественной и удобной следующая геометрическая формулировка задачи.

Сопоставим каждому комплементарному множеству $\mathcal{B}$ конус $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, являющийся конической оболочкой точек A^j, $j \in \mathcal{B}$. Тогда, учитывая вышесказанное, можно переформулировать исходную задачу так: среди конусов $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, порождаемых всевозможными комплементарными множествами, найти тот, который содержит заданную точку q. Разрешимость задачи при любом q означает, что конусы $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ образуют покрытие всего пространства R^n.

В геометрической интерпретации основное предположение (8) состоит в том, что все точки A^j отличны от нуля, а все конусы $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ являются заостренными.

Сделанные предположения позволяют провести интерпретацию задачи и на евклидовой сфере $S = \{v \in R^n \,/\, \|v\| = 1\}$ ($\|\cdot\|$ - евклидова норма). Для этого вводится $\hat{q} = q / \|q\|$ и конусы $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ заменяются сферическими симлексами $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{B}) = \mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap S$ (некоторые из них, возможно, являются невырожденными). Задача состоит в отыскании того из сферических симплексов, который содержит точку $\hat{q} \in S$.

В результате вопрос о разрешимости задачи при любом q получает такую постановку: когда можно гарантировать, что сферические симплексы $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ покрывают всю сферу S ?

Для анализа вопроса в такой постановке оказываются полезными некоторые понятия и утверждения топологии, в частности понятие степени отображения.

§ 2. Отображение, порождаемое задачей

Свяжем с рассматриваемой задачей некоторое кусочно-линейное непрерывное отображение $F: R^n \to R^n$. Построение этого отображения основано на том факте, что в R^n существует еще одна совокупность конусов, которые связаны между собой так же, как конусы $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, - это совокупность гипероктантов пространства R^n. В самом деле, эта совокупность конусов также построена по системе из $2n$ векторов (ортов)

$$e_1, e_2, \dots, e_n, (-e_1), \dots, (-e_n), \tag{9}$$

и при этом соблюдается то же правило, что и при построении конусов $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$: из каждой пары $\{e_i, -e_i\}$ в описании любого гипероктанта участвует ровно один вектор.

Отмеченный факт позволяет каждому комплементарному множеству $\mathcal{B}$ помимо конуса $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ сопоставить также некоторый гипероктант $K(\mathcal{B})$. Для этого достаточно ввести единую нумерацию в системе векторов (9), обозначая их $\alpha^1, \dots, \alpha^{2n}$, с соблюдением следующего условия: в каждой паре $\{e_i, -e_i\}$ одному из векторов присваивается обозначение α^s, $1 \le s \le n$, а второму - обозначение α^{n+s}.

После такого упорядочения векторов (9) конус $K(\mathcal{B})$ определяется аналогично $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$: $K(\mathcal{B})$ - это коническая оболочка точек α^j, $j \in \mathcal{B}$.

Упомянутое выше кусочно-линейное отображение $F: R^n \to R^n$ определяется на гипероктанте $K(\mathcal{B})$ как линейное отображение $F_{\mathcal{B}}$, удовлетворяющее условию $F_{\mathcal{B}}(\alpha^j) = A^j$, $j \in \mathcal{B}$. Ввиду линейной независимости векторов α^j, $j \in \mathcal{B}$, такое отображение $F_{\mathcal{B}}$ определяется однозначно. Оно переводит конус $K(\mathcal{B})$ в конус $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$: точка $v = \sum^{j \in \mathcal{B}} \alpha^j x_j$, $x_j \ge 0$, $j \in \mathcal{B}$, переходит в точку $F_{\mathcal{B}}(v) = \sum_{j \in \mathcal{B}} A^j x_j \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$.

Получающееся определение отображения F корректно: если $v \in K(\mathcal{B}_1) \cap K(\mathcal{B}_2)$, $v \ne 0$, то v однозначно представимо в виде неотрицательной комбинации векторов α^j, $j \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, и потому $F_{\mathcal{B}_1}(v) = F_{\mathcal{B}_2}(v)$.

Непрерывность отображения F очевидна.

Ясно, что ввиду основного предположения (8) отображение

F удовлетворяет условию:

$$F(x) \neq 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0.$$

Поэтому можно определить отображение $\hat{F} : S \to S$, задавая его формулой

$$\hat{F}(x) = F(x) / \|F(x)\| .$$

Это отображение также непрерывно и переводит сферические симплексы $\hat{K}(\mathcal{B}) = K(\mathcal{B}) \cap S$ в сферические комплексы $\hat{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$.

§ 3. Достаточные признаки разрешимости задачи

Используя введенное отображение $\hat{F}$, можно необходимое и достаточное условие разрешимости задачи при любом q записать в виде равенства: $\hat{F}(S) = S$. Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы степень отображения $\hat{F}$ была отлична от нуля. Тем самым любое утверждение, гарантирующее отличие от нуля степени $\hat{F}$, дает достаточный признак разрешимости задачи дополнительности при любом q. Ниже будут рассмотрены три возможных типа такого рода утверждений, основанных на:

а) непосредственном вычислении степени;

б) использовании того, факта, что гомотопные отображения имеют равные степени;

в) использовании теоремы Борсука о том, что нечетные отображения имеют нечетную степень.

Дальнейшие рассмотрения требуют конкретизации отображения F. Для этого достаточно задать его на каком-то из гипероктантов. Этим отображение F уже будет однозначно определено в соответствии с его описанием на всем пространстве. Простейший из возможных способов задания F состоит в том, что F принимается равным тождественному отображению на отрицательном гипероктанте. Это соответствует равенствам $F(-e_j) = -e_j$, $j = 1, \dots, n$. В наших предшествующих рассмотрениях это означает: $\alpha^s = e_s$, $\alpha^{n+s} = -e_s$, $s = 1, \dots, n$. В результате получаем, что на гипероктанте $K(\mathcal{B})$ линейное отображение $F_{\mathcal{B}}$ (совпадающее на $K(\mathcal{B})$ с F) задается матрицей $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, j-й столбец которой определяется в соответствии с правилом:

$$\mathcal{F}^j(\mathcal{B}) = \begin{cases} A^j, & \text{если } j \in \mathcal{B}, \\ e_j, & \text{если } n+j \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

I. Рассмотрим достаточные признаки разрешимости исходной задачи, основанные на непосредственном вычислении степени отображения F.

Чтобы говорить о численном значении степени отображения сферы в себя, следует ввести ориентацию на сфере аргументов и на сфере образов. Будем считать, что и в том и в другом случае ориентация одинакова и задается как ориентация края шара. Ориентация шара, в свою очередь, задается ориентацией всего пространства. Для задания последней в качестве положительных базисов принимаются базисы, эквивалентные каноническому упорядоченному базису $(e_1, \dots, e_n)$.

При таком соглашении из определения степени отображения получаем следующее правило вычисления ее значения для отображения $\hat{F}$:

$$\deg \hat{F} = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}(y)} \operatorname{sing} \det \mathcal{F}(\mathcal{B}), \tag{10}$$

где $\mathcal{L}(y) = \{\mathcal{B} \mid y \in \hat{\mathfrak{X}}(\mathcal{B})\}$, а $y \in S$ - любая точка, являющаяся регулярным значением отображения F, т.е. такая точка, что $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}) \neq 0$ для каждого $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(y)$.

Для $\mathcal{B} = \mathcal{B}_- = \{n+1, \dots, 2n\}$ имеем: $\mathcal{F}(\mathcal{B}_-) = E$ - единичная матрица и $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_-) = 1$. Пусть $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_-$ и $\alpha = \mathcal{B} \cap \{1, \dots, n\}$. Пусть $A_{\alpha\alpha}$ - главная подматрица матрицы A, порождаемая множеством номеров α, т.е. $A_{\alpha\alpha} = \{a_{ij}\}_{i,j \in \alpha}$. Легко видеть, что $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}) = \det A_{\alpha\alpha}$.

Так как среди точек множества $\hat{\mathfrak{X}}(\mathcal{B}_-)$ имеются точки, являющиеся регулярными значениями отображения $\hat{F}$ (множество точек, не являющихся таковыми, имеет меру ноль), то, взяв такую точку в качестве точки y в формуле (10), для матриц A с неотрицательными главными минорами (класс P_0) получим $\deg \hat{F} \geqslant 1$.

В результате получаем такое утверждение: если главные миноры матрицы A неотрицательны, то задача дополнительности разрешима при любом q. (Напомним, что предполагается выполненным основное предположение (8).) Этот результат известен и в более сильной форме: имеет место единственность решения, и, значит, $\deg \hat{F} = 1$. Но нам важен сейчас сам способ получения критерия разрешимости задачи.

Ясно, что если потребовать

$$\operatorname{Int} \mathcal{Z}(\mathcal{B}_-) \cap \mathcal{Z}(\mathcal{B}) = \emptyset \qquad \forall \mathcal{B} \neq \mathcal{B}_-, \tag{11}$$

то будем иметь $\deg \hat{F} = 1$. Приведенное условие означает, что при любом выборе $x_j \geqslant 0$, $j \in \mathcal{B}$, выполняется

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} A^j x_j \not< 0,$$

что, в свою очередь, эквивалентно условию

$$\forall \alpha \subset \{1, \dots, n\}, \ x^\alpha \geqslant 0 \Rightarrow A_{\alpha\alpha} x^\alpha \not< 0, \tag{12}$$

где $x^\alpha = \{x_j\}_{j \in \alpha}$. Условие (12) описывает известный класс E_0, для которого алгоритм Лемке при выполнении условия (8) всегда заканчивается получением решения исходной задачи дополнительности.

Условие (11) можно ослабить, ограничившись рассмотрением лишь тех $\mathcal{B}$, для которых $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}) < 0$. Из этого будет следовать $\deg \hat{F} \geqslant 1$. Эквивалентная формулировка такого условия будет иметь вид

$$\forall \alpha \subset \{1, \dots, n\}, \ x^\alpha \geqslant 0, \ \det A_{\alpha\alpha} < 0 \Rightarrow A_{\alpha\alpha} x^\alpha \not< 0. \tag{13}$$

Формально получаем класс более широкий, чем E_0, хотя автору не известен пример такой матрицы A, для которой бы выполнялось (13) и не выполнялось (12).

Приведем еще некоторые утверждения, получаемые на этом пути.

ТЕОРЕМА 1. *Если все главные миноры матрицы A неположительны и для некоторого $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$ выполняется*

$$\{A^j\}_{j \in \alpha} \not< 0 \quad \text{при} \quad \det A_{\alpha\alpha} < 0,$$

то задача дополнительности с такой матрицей A разрешима при любом q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим комплементарное множество $\mathcal{B} = \alpha \cup \{n+j \mid j \notin \alpha\}$. Ввиду $\det A_{\alpha\alpha} < 0$ конус $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ телесен, а из $\{A^j\}_{j \in \alpha} \not< 0$ следует, что $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) \not\subset \mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$. Тем самым найдется регулярная точка $y \notin \mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$. Взяв ее для подсчета $\deg \hat{F}$ по формуле (10), получим $\deg \hat{F} \leqslant -1$, и, следовательно, при любом q существует по крайней мере одно решение задачи дополнительности. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если все диагональные элементы a_{jj} матрицы A отрицательны и при всех $j = 1, 2, \dots, n$ выпол-*

няется

$$a_{jj} + a_{ij} \geq 0, \qquad i \neq j, \tag{14}$$

то соответствующая задача дополнительности разрешима при любом q и имеет не менее $n-1$ решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно показать, что степень отображения $\hat{F}$ в данном случае будет равна $1-n$. Покажем это.

Рассмотрим конусы $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, порождаемые множествами $\mathcal{B} = \mathcal{B}^j = \{n+1, \ldots, n+j-1, j, n+j+1, \ldots, 2n\}$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Каждый из этих конусов содержит отрицательный гипероктант, т.е. конус $\operatorname{Int} \mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$. Действительно, конус $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^j)$ является конической оболочкой векторов $A^{n+s} = -e_s$, $s \neq j$, и A^j. Ясно, что ввиду $a_{jj} < 0$ векторы A^k, $k \in \mathcal{B}^j$, линейно-независимы, а так как $a_{ij} > 0$ при $i \neq j$, то коэффициенты разложения любого отрицательного вектора h по этому базису будут положительными:

$$\sum_{k \in \mathcal{B}^j} A^k g_k = h$$

влечет

$$g_j = h_j / a_{jj} > 0, \tag{15}$$

$$g_k = -h_k + g_j a_{kj} > 0, \qquad k \neq j. \tag{16}$$

Таким образом, любая точка с отрицательными координатами принадлежит всем конусам $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^j)$, $j = 1, \ldots, n$, и конусу $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$.

С другой стороны, из (14) следует, что остальным конусам $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ такая точка принадлежать не может. В самом деле, если $\mathcal{B}$ содержит более одного из номеров $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ то, образовав вектор f из компонент

$$f_i = 0, \qquad (n+i) \in \mathcal{B},$$

$$f_i = 1, \qquad i \in \mathcal{B},$$

будем иметь

$$(f, A^k) \geq 0, \quad k \in \mathcal{B},$$

в то время как для $h \in \operatorname{Int} R^n_-$ выполняется $(f, h) < 0$. Тем самым гиперплоскость с уравнением $(f, v) = 0$ строго отделяет точку h от конуса $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$.

В результате, взяв $y=h$, получаем в соответствии с (IO) для степени отображения $\hat{F}$, порождаемого задачей дополнительности с матрицей A ,

$$deg\,\hat{F}=sign\,det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}_-)+\sum_{i=1}^{n} sign\,det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}^i).$$

Теперь, учитывая, что $det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}_-)=det\,E=1$, а $det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}^i)=a_{ii}<0$, окончательно имеем $deg\,\hat{F}=1-n$, что и доказывает утверждение теоремы.

Неравенство $deg\,\hat{F}\leq -1$, а тем самым и разрешимость рассматриваемой задачи дополнительности, можно гарантировать и при более слабых условиях, чем в теореме 2. Справедливо, в частности, следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняется условие

$$\forall \alpha\subset\{1,\dots,n\},\ det\,A_{\alpha\alpha}>0,\ x^\alpha\geq 0 \Rightarrow A_{\alpha\alpha}\,x^\alpha \not< 0. \qquad (12')$$

Если существует по меньшей мере два отрицательных диагональных элемента матрицы A , и хотя бы в одном из соответствующих столбцов матрицы остальные элементы неотрицательны, то $deg\,\hat{F}\leq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $a_{rr}<0, a_{ss}<0$ и $a_{ir}\geq 0$ при $i\neq r$. Тогда из приведенных в доказательстве теоремы 2 рассуждений следует, что $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^r)\supset\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. Кроме того, можно указать $h\in\mathcal{Z}(\mathcal{B}^s)\cap Int\,\mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$. Для этого достаточно зафиксировать произвольно $h_i<0$ при $i\neq s$ и выбрать h_s достаточно малым. Ввиду телесности $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^s)$ среди таких h найдется регулярная точка. Взяв ее в качестве y для подсчета $deg\,\hat{F}$ по формуле (IO), будем иметь $y\in\mathcal{Z}(\mathcal{B}^r)\cap\mathcal{Z}(\mathcal{B}^s)\cap\mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$, но $y\notin\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, если $\mathcal{B}\neq\mathcal{B}_-$ и $det\,\mathcal{F}(\mathcal{B})>0$. Последнее следует из условия (12'). Учитывая, что $det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}_-)=1$, а $det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}^r)=a_{rr}<0,\ det\,\mathcal{F}(\mathcal{B}^s)=a_{ss}<0$, получаем $deg\,\hat{F}\leq -1$, что и требовалось.

ПРИМЕР.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что все условия теоремы 3 для этой матрицы выполняются, хотя теоремы I и 2 в данном случае неприменимы.

П. Перейдем теперь к рассмотрению достаточных критериев, используя равенство степеней у гомотопных отображений.

Этот путь получения достаточных условий реализуется по следующей схеме: I) фиксируем некоторый способ построения отображения $\hat{F}$ по матрице A ; 2) фиксируем некоторое непрерывное отображение $G : S \to S$, степень которого отлична от нуля; 3) задаемся некоторым критерием гомотопности двух непрерывных отображений сферы в себя; 4) описываем класс матриц A , для которых соответствующее отображение $\hat{F}$ по этому критерию является гомотопным выбранному отображению G .

Известным достаточным условием гомотопности отображений $\hat{F}$ и G является условие

$$\hat{F}(x) \neq -G(x) \qquad \forall x \in S. \tag{I7}$$

Гомотопия при этом задается формулой

$$\Phi(x,t) = \frac{tG(x)+(1-t)\hat{F}(x)}{\|tG(x)+(1-t)\hat{F}(x)\|}, \quad t \in [0,1].$$

Если в качестве G взять тождественное отображение, то (I7) принимает вид

$$\hat{F}(x) \neq -x \qquad \forall x \in S, \tag{I8}$$

что эквивалентно условию на F:

$$F(x) \neq \lambda x \qquad \forall x \neq 0, \quad \lambda < 0. \tag{I9}$$

Пусть F строится по A так же , как и в предыдущих рассмотрениях, т.е. F совпадает с тождественным отображением на отрицательном гипероктанте.

Рассмотрим произвольный гипероктант $K(\mathcal{B})$. Пусть $\alpha = \mathcal{B} \cap \{1,\dots,n\}$ и $\beta = \{1,\dots,n\} \setminus \alpha$. Для произвольного $x = (x_1,\dots,x_n)$ введем векторы $x^\alpha = \{x_j\}_{j\in\alpha}$ и $x^\beta = \{x_j\}_{j\in\beta}$. Тогда для $x \in K(\mathcal{B})$ имеем $x^\alpha \geq 0$ и $x^\beta \leq 0$. Для такого x образ $y = F(x)$ определяется, в соответствии с описанием F , по формулам

$$y^\alpha = A_{\alpha\alpha} x^\alpha, \tag{20}$$

$$y^\beta = A_{\beta\alpha} x^\alpha + x^\beta. \tag{2I}$$

Учитывая это, условие (I9) можно переформулировать так: для каждого $\alpha \subset \{1,\dots,n\}$ не существует $\lambda < 0$ и $\tilde{x} - (x^\alpha, x^\beta) \neq 0$, $x^\alpha \geqslant 0, x^\beta \leqslant 0$, для которых

$$A_{\alpha\alpha} x^\alpha = \lambda x^\alpha, \tag{22}$$

$$A_{\beta\alpha} x^\alpha + x^\beta = \lambda x^\beta. \tag{23}$$

Это условие и описывает класс задач дополнительности, для которых можно гарантировать существование решения при любом q. При этом если для данного q потребовать, чтобы выполнялось условие невырожденности системы (I)-(2), как системы линейных неравенств, то это будет означать, что q не лежит на границе никакого из конусов $Z(\mathcal{B})$. Тем самым $\hat{q}$ в этом случае является регулярным значением отображения $\hat{F}$, а тогда из $\deg \hat{F} = 1$ следует, что число решений в рассматриваемой задаче дополнительности нечетно.

Усиливая сформулированное условие, получим более узкие классы разрешимых задач, но зато более просто описываемые.

Заметим, что если $x^\alpha = 0$, то из (23) ввиду $\tilde{x} \neq 0$ получим $\lambda = 1 \neq 0$. Тем самым требование $\tilde{x} \neq 0$ можно заменить более сильным $x^\alpha \neq 0$. Кроме того, (23) можно заменить неравенством $A_{\beta\alpha} x^\alpha \geqslant 0$.

В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Если матрица A такова, что для каждого $\alpha \subset \{1,\dots,n\}$ не существует ненулевого вектора $x^\alpha \geqslant 0$ и числа $\lambda < 0$, чтобы выполнялось*

$$\begin{cases} A_{\alpha\alpha} x^\alpha = \lambda x^\alpha, \\ A_{\beta\alpha} x^\alpha \geqslant 0, \end{cases} \tag{24}$$

то соответствующая задача дополнительности разрешима при любом q (здесь $\beta = \{1,\dots,n\} \setminus \alpha$).

Используя это утверждение, можно получить и более простые, хотя, конечно, и более грубые достаточные условия, приводящие, в частности, к описанию уже известных классов. Если, например, потребовать, чтобы вещественные собственные значения матрицы A и всех ее главных подматриц были положительными, то ясно, что условия теоремы 4 будут выполненными. Это приводит к известному классу P - классу матриц с положительными главными минорами [2].

Аналогично, учитывая, что из (22) следует $(x^\alpha, A_{\alpha\alpha} x^\alpha) = \lambda (x^\alpha, x^\alpha) < 0$, получаем такое достаточное условие:

$$\forall \alpha \subset \{1,\dots,n\},\ x^\alpha \geqslant 0 \Rightarrow (x^\alpha, A_{\alpha\alpha} x^\alpha) \geqslant 0. \tag{25}$$

Это, как легко видеть, эквивалентно требованию

$$(x, Ax) \geqslant 0 \qquad \forall x \geqslant 0,$$

что дает известный класс ко- положительных матриц C_0.

Условие (I2), описывающее класс E_0, также следует из условий теоремы 4. Заметим, однако, что класс E_0 не исчерпывает всего множества матриц, выделяемого этой теоремой. Примером может служить матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $a_{11} < 0$ и, значит, $A \notin E_0$. Несложная проверка показывает, тем не менее, что критерий, задаваемый теоремой 4, в данном случае выполнен.

Используя теорему 4, можно сформулировать упрощенный критерий, который по формулировке очень схож с критерием (I2), задающим класс E_0 :

$$\forall \alpha \subset \{1,\dots,n\},\ x^\alpha \geqslant 0,\ x^\alpha \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{\alpha\alpha} \\ -A_{\beta\alpha} \end{pmatrix} x^\alpha \not< 0. \tag{26}$$

Если потребовать, чтобы все недиагональные элементы матрицы A были отрицательными, а диагональные положительными, то (26) будет очевидным образом выполняться при всех α, кроме $\alpha = \{1,\dots,n\}$. В этом последнем случае (26) будет также выполнено, если дополнительно потребовать, чтобы существовал вектор $y > 0$, для которого $yA > 0$, т.е. A^T должна принадлежать известному классу S. При таких условиях задача дополнительности согласно критерию (26) разрешима при любом q.

Мы получили известный результат, который имеет место и в более общем виде, когда от недиагональных элементов требуется лишь неотрицательность. При этом получаемый класс матриц оказывается содержащимся в классе P (см. [2]).

III. Остановимся теперь на достаточном условии разрешимости задачи, получаемом на основе теоремы Борсука.

По-прежнему ограничимся случаем, когда отображение F совпадает на отрицательном гипероктанте с тождественным. Мы должны исключить случай, когда антиподальные точки сферы S переходят при отображении F в одну и ту же точку. Тогда по теореме Борсука степень отображения F будет нечеткой, а стало быть, отличной от нуля. Тем самым рассматриваемая задача дополнительности будет разрешима при любом q.

Для отображения F указанный случай состоит в существовании такого $x \neq 0$, что при некотором $\lambda > 0$ выполняется

$$F(x) = \lambda F(-x). \tag{27}$$

Пусть $x \in K(\mathcal{B})$ и α, β определены по $\mathcal{B}$, как и выше: $\alpha = \mathcal{B} \cap \{1, \ldots, n\}$, $\beta = \{1, \ldots, n\} \setminus \alpha$. Тогда $(-x) \in K(\bar{\mathcal{B}})$, где $\bar{\mathcal{B}}$ таково, что, определяя для него аналогично $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, будем иметь $\bar{\alpha} = \beta$, $\bar{\beta} = \alpha$. Это означает, что образы $F(x)$ и $F(-x)$ задаются формулами

$$F(x) = \sum_{j \in \alpha} A^j x_j + \sum_{j \in \beta} e_j x_j,$$

$$F(-x) = \sum_{j \in \alpha} e_j (-x_j) + \sum_{j \in \beta} A^j (-x_j).$$

Теперь равенство (27) перепишется в виде

$$\sum_{j \in \alpha} A^j x_j + \sum_{j \in \beta} e_j x_j = -\lambda \sum_{j \in \alpha} e_j x_j - \lambda \sum_{j \in \beta} A^j x_j,$$

или, что то же самое,

$$A_{\alpha\alpha} x^\alpha + \lambda A_{\alpha\beta} x^\beta = -\lambda x^\alpha,$$

$$A_{\beta\alpha} x^\alpha + \lambda A_{\beta\beta} x^\beta = -x^\beta.$$

Вводя теперь вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}^\alpha, x^\beta)$, составляющими которого являются $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha$ и $\tilde{x}^\beta = -\lambda x^\beta$, получаем следующие условия:

$$A_{\alpha\alpha}\tilde{x}^{\alpha} - A_{\alpha\beta}\tilde{x}^{\beta} = -\lambda\tilde{x}^{\alpha}, \qquad (28)$$

$$-A_{\beta\alpha}\tilde{x}^{\alpha} + A_{\beta\beta}\tilde{x}^{\beta} = -\frac{1}{\lambda}\tilde{x}^{\beta}, \qquad (29)$$

$$\tilde{x}^{\alpha}, \tilde{x}^{\beta} \geq 0. \qquad (30)$$

В итоге получаем такое утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Для разрешимости задачи дополнительности при любом q достаточно, чтобы при любом $\alpha\subset\{1,\dots,n\}$ не существовало вектора $\tilde{x}=(\tilde{x}^{\alpha}, \tilde{x}^{\beta})$ $(\beta=\{1,\dots,n\}\setminus\alpha)$ и такого $\lambda>0$, что выполняются условия* (28) - (30).

ПРИМЕР. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

условия теоремы 4 нарушаются, например, для $\alpha=\{1\}$. Несложно убедиться, что все условия теоремы 5 выполнены, и тем самым соответствующая задача дополнительности разрешима при любом q.

IУ. В предыдущих рассмотрениях мы ограничились лишь одной конкретизацией отображения F, требуя, чтобы на отрицательном гипероктанте оно совпадало с тождественным. Между тем простые примеры показывают, что рассмотрение других конкретизаций отображения F позволяет получить иные достаточные условия разрешимости задачи.

Поясним это на примере матрицы (31). Как отмечалось, теорема 4 не позволяет убедиться в разрешимости задачи при любом q. Причина состоит в том, что при использованной конкретизации отображения F вектор $x=(1,1)$ переводится в $F(x)=(-1,-1)$, т.е. в $(-x)$, а значит, условие (19) нарушено.

Изменим отображение F, потребовав

$$F(-e_1) = -e_2,$$

$$F(-e_2) = -e_1$$

и соответствующим образом доопределив его на всем R^2. Полученное отображение снова переводит отрицательный гипероктант в себя, но теперь матрица $\mathcal{F}(\mathcal{B}_-)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

а не равна единичной матрице, как это было прежде.

Несложной проверкой убеждаемся, что теперь условие (I9) выполняется и, следовательно, можно сделать заключение о разрешимости задачи при любом q. Этот вывод можно сделать и на основании упрощенного критерия (типа условия (26)), который мы сейчас получим.

Ограничимся рассмотрением лишь отображений, переводящих отрицательный гипероктант в себя. В наших условиях это означает, что орт $(-e_i)$ переходит в некоторый орт $(-e_{\sigma(i)})$, т.е. отображение F однозначно задается некоторой перестановкой $\sigma : i \to \sigma(i)$. На языке наших прежних построений это означает, что принимается $\alpha^{\sigma(i)} = e_i$. Тем самым $F(e_i) = A^{\sigma(i)}$.

Возьмем произвольное $\alpha \subset \{1, \ldots, n\}$ и, полагая $\beta = \{1, \ldots, n\} \setminus \alpha$, рассмотрим гипероктант K, задаваемый системой неравенств:

$$x_j \geq 0, \quad j \in \alpha,$$

$$x_j \leq 0, \quad j \in \beta.$$

Для $x \in K$, в соответствии с описанием F, имеем

$$F(x) = \sum_{j \in \alpha} A^{\sigma(j)} x_j + \sum_{j \in \beta} e_{\sigma(j)} x_j . \qquad (32)$$

Получим условия, которым должен удовлетворять $x \in K$, $x \neq 0$, чтобы для него при некотором $\lambda < 0$ выполнялось $F(x) = \lambda x$. Отрицание этих условий и даст требуемый критерий разрешимости задачи дополнительности.

Прежде всего отметим, что в наших условиях $x = (x^\alpha; x^\beta) \neq 0$ эквивалентно $x^\alpha \neq 0$. Действительно, если $x^\alpha = 0$, то из $F(x) = \lambda x$, учитывая (32), получаем

$$x_j = \lambda x_{\sigma(j)}, \quad j \in \sigma . \qquad (33)$$

Теперь если $j \in \sigma$ таково, что $\sigma(j) \in \alpha$, то $x_{\sigma(j)} = 0$, а значит, из (33) имеем $x_j = 0$. Если же $\sigma(j) \in \beta$, то x_j и $x_{\sigma(j)}$ одного знака (неположительные), а потому из (33), ввиду $\lambda < 0$, снова имеем $x_j = 0$. В результате получаем $x^\beta = 0$, что вместе с $x^\alpha = 0$ дает $x = 0$, а это противоречит исходному предположению.

Для компонент x_j, $j \in \alpha$, получаем из $F(x)=\lambda x$ с учетом $x^\beta \leq 0$ следующую систему условий:

$$\sum_{j\in\alpha} a_{i\sigma(j)} x_j = \lambda x_i, \qquad i \in \sigma(\alpha),$$

$$\sum_{j\in\alpha} a_{k\sigma(j)} x_j \geq \lambda x_k, \qquad k \in \sigma(\beta).$$

Отсюда, еще раз учитывая $x^\beta \leq 0$ и $x^\alpha \geq 0$, $\lambda < 0$, получаем

$$\sum_{j\in\alpha} a_{i\sigma(j)} x_j \leq 0, \qquad i \in \sigma(\alpha) \cap \alpha,$$

$$\sum_{j\in\alpha} a_{i\sigma(j)} x_j \geq 0, \qquad i \in \sigma(\alpha) \cap \beta,$$

$$\sum_{j\in\alpha} a_{i\sigma(j)} x_j \geq 0, \qquad i \in \sigma(\beta) \cap \beta.$$

Это и есть требуемая система условий. Преобразуем ее для того, чтобы придать критерию вид, аналогичный (26). Обозначим множество $\sigma(\alpha)$ через γ и перебозначим переменные, вводя $z_{\sigma(j)} = x_j$, $j \in \alpha$. Тогда полученная система неравенств примет вид:

$$\sum_{t\in\gamma} a_{st} z_t \leq 0, \qquad s \in \gamma \wedge \sigma(s) \in \gamma,$$

$$-\sum_{t\in\gamma} a_{st} z_t \leq 0, \qquad \sigma(s) \notin \gamma.$$

Формируя из коэффициентов этой системы матрицу A_γ^σ и объединяя переменные z_t в вектор z^γ, получаем в итоге следующую формулировку критерия.

ТЕОРЕМА 6. *Для разрешимости при любом q задачи дополнительности с матрицей A достаточно, чтобы нашлась подстановка σ, при которой выполняется условие*

$$\forall \gamma \subset \{1,\dots,n\},\ z^\gamma \geq 0,\ z^\gamma \neq 0 \Longrightarrow A_\gamma^\sigma z^\gamma \leq 0, \qquad (34)$$

где матрица A_γ^σ формируется из элементов a_{st} матрицы A при $t \in \gamma$

и $s \in \gamma \cup \{s \mid \sigma(s) \notin \gamma\}$ с соблюдением следующего правила знаков: если s таково, что $s \in \gamma$ и $\sigma(s) \in \gamma$, то a_{st} помещается в A_γ^σ без изменения знака; если же $\sigma(s) \notin \gamma$, то a_{st} помещается в A_γ^σ с противоположным знаком.

Легко видеть, что (26) является частным случаем полученного критерия, если в качестве σ взять тождественную подстановку.

В рассмотренном выше примере с матрицей (31) второй способ построения отображения F соответствует подстановке $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, и при такой подстановке критерий (34) также дает для этого примера утвердительный ответ.

Таким образом, каждая подстановка σ позволяет указать некоторый класс задач, для которых по критерию (34) можно гарантировать разрешимость при любых q. Приведем в качестве примера матрицу третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Критерий (26) не дает в данном случае утвердительного ответа. Однако если возьмем $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, то убеждаемся, что (34) выполняется.

§ 4. Сферический алгоритм дополнительности

I. Идея алгоритма дополнительности Лемке. Используя введенные ранее обозначения, можно следующим образом описать основную идею алгоритма дополнительности Лемке. Исходная задача погружается в класс задач с переменной правой частью $q(\vartheta)$, зависящей от вещественного параметра ϑ: $q(\vartheta) = q - \vartheta e$, где $e = (1, \ldots, 1)$. Ясно, что при достаточно больших значениях ϑ точка $q(\vartheta)$ принадлежит конусу $\mathcal{K}(\mathcal{B}_-)$, порождаемому комплементарным множеством $\mathcal{B}_- = \{n+1, \ldots, 2n\}$. Тем самым для таких значений ϑ известно решение задачи дополнительности с правой частью $q(\vartheta)$: $x_{n+j} = \vartheta - q_j$, $j = 1, \ldots, n$. Нам нужно получить решение задачи с правой частью $q(0) = q$. Если уменьшать ϑ от указанных достаточно больших значений, то при $\vartheta = \max q_j = q_{j_0}$ обратится в ноль переменная x_{n+j_0}, и при этом остальные переменные x_{n+j}, $j \neq j_0$, будут неотрицательными. В соответствии со схемой алгоритма Лемке следует начать увеличивать переменную x_{j_0}, меняя подходящим образом ϑ и переменные x_{n+j}, $j \neq j_0$, так, чтобы выполнялись все условия задачи. Тем самым переходим от множества $\mathcal{B}_-$ к "соседнему" множеству $\mathcal{B}^{j_0} = \{j_0\} \cup \mathcal{B}_- \setminus \{n+j_0\}$.

Для удобства изложения в дальнейшем для любого из элементов $k \in \{j, n+j\}$ через $\bar{k}$ будем обозначать второй элемент пары. В данном случае для $k = n+j_0$ имеем $\bar{k} = j_0$.

Далее все последующие итерации проходят аналогично: если обратилась в ноль переменная x_s, то следует увеличивать переменную $x_{\bar{s}}$, переходя от текущего комплементарного множества $\mathcal{B}$ к комплементарному множеству $\mathcal{B}' = \{\bar{s}\} \cup \mathcal{B} \setminus \{s\}$. Процесс заканчивается либо когда будет достигнуто значение $\vartheta = 0$, либо когда при увеличении очередной переменной $x_{\bar{s}}$ окажется, что такое увеличение возможно до $+\infty$ без нарушения условий задачи, т.е. будет получен луч.

Несложные выкладки показывают, что в последнем случае благодаря основному предположению (8) будет $\vartheta \to +\infty$.

Если предполагать, что выполняется также предположение невырожденности, обеспечивающее на каждом шаге единственность обращающейся в ноль переменной, то процесс заканчивается через конечное число шагов. При этом если $A \in E_0$, то второй случай исключается, т.е. в результате всегда получаем решение исходной задачи.

Однако если $A \notin E_0$, то возможен случай, когда исходная задача имеет решение, но при реализации описанной процедуры процесс закончится получением луча. Примером такой задачи является задача с системой ограничений с матрицей (31):

$$-x_1 + 2x_2 \geq 3,$$
$$2x_1 - x_2 \geq -1,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ее решением является $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5/3$. Но, применяя процедуру Лемке, получим луч: $\vartheta = x_1 + 3$, $x_2 = 0$, $x_1 \to +\infty$.

П. <u>Общая схема сферического алгоритма</u>. Геометрическая интерпретация задачи на сфере подсказывает несколько иную организацию процесса, которую условно можно назвать сферическим алгоритмом. Этот алгоритм позволяет находить решение для задач более широкого класса. Главное отличие от алгоритма Лемке состоит в ином способе параметризации задачи: вместо $q(\vartheta)=q-\vartheta e$ рассматривается $q(t)=q\sin t+p\cos t$, где p - такой вектор, что решение задачи дополнительности с правой частью p (и исходной матрицей A) нам известно. Тем самым нам известно решение параметризованной задачи при $t=0$, и нужно найти ее решение при $t=\frac{\pi}{2}$ или $t=-\frac{3}{2}\pi$, когда $q(t)=q$. Заметим, что $q(t)=q$ имеет место и при других значениях t вида $\frac{\pi}{2}\pm 2\pi l$ с целым l, но при непрерывном изменении параметра t от $t=0$ первым будет достигнуто одно из указанных двух значений. Если ставится задача получения хотя бы одного решения исходной задачи дополнительности, то на этом процесс можно прекратить. Однако если $|\deg \hat{F}|>1$, то задача имеет заведомо более одного решения, и с целью получения других решений процесс изменения t можно продолжить.

Приведем более детальное описание общей схемы процесса.

По предположению нам известно комплементарное множество $\mathcal{B}_0$ такое, что $p=q(0)\in \mathcal{Z}(\mathcal{B}_0)$. Будем предполагать дополнительно, что конус $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_0)$ телесен и точка p лежит внутри конуса $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_0)$. Можно, например, взять $p=-e$ и $\mathcal{B}_0=\{n+1,\ldots,2n\}=\mathcal{B}_-$.

На k-м шаге процесса имеется некоторое текущее значение $t=t_k$ и комплементарное множество $\mathcal{B}_k$ такое, что $q(t_k)\in \mathcal{Z}(\mathcal{B}_k)$, т.е. при неотрицательных значениях x_j^k, $j\in\mathcal{B}_k$, выполняется

$$\sum_{j\in\mathcal{B}_k} A^j x_j^k=q(t_k). \tag{35}$$

При этом может представиться два различных случая в зависимости от значения ранга системы векторов A^j, $j\in\mathcal{B}_k$, которое будем обозначать ρ_k. Это значение может быть равно либо n, либо $(n-1)$. В зависимости от этого будем говорить об итерациях первого или второго типа.

В любом случае имеется возможность изменения значений переменных x_j, $j\in\mathcal{B}_k$, задающих представление текущей точки $q(t)$ через векторы A^j, $j\in\mathcal{B}_k$. В первом случае, когда $\rho_k=n$, такое изменение вызывается изменением самого значения t от $t=t_k$. Во втором случае t остается равным t_k, но возможность изменения переменных x_j появляется благодаря линейной зависимости векторов A^j, $j\in\mathcal{B}_k$.

И в том и в другом случае изменяющиеся переменные будут зависеть от одного параметра, и, следовательно, возможны лишь два взаимопротивоположных направления изменения переменных.

Основной принцип построения траектории остается прежним: если на данной итерации дальнейшему изменению переменных препятствует обратившаяся в ноль переменная x_s, то s исключается из текущего комплементарного множества $\mathcal{B}$ и заменяется на $\bar{s}$. При этом условие $x_{\bar{s}} \geq 0$ уже однозначно определяет направление изменения переменных x_j на следующей итерации.

На начальной итерации по предположению реализуется первый из указанных случаев, и, значит, изменение переменных сопровождается изменением параметра t от $t=0$. При этом направление изменения должно быть задано. Рассмотрим подробнее каждый из двух случаев.

А. Пусть A^j, $j \in \mathcal{B}_k$, линейно-независимы, т.е. $\rho_k = n$. Тогда, заменяя в (35) $q(t_k)$ на $q(t)$, получим однозначно x_j^k как функции параметра t:

$$x_j^k(t) = a_j \sin t + b_j \cos t, \qquad j \in \mathcal{B}_k .$$

Параметр t можно менять лишь таким образом, чтобы $x_j^k(t)$ оставались все неотрицательными. Несложно указать множество T_j тех значений t, при которых $x_j^k(t) \geq 0$. Это множество представляет собой совокупность отрезков, являющихся сдвигами на кратное 2π отрезка длиной π с центром в точке τ_j^k, определяемой по формуле

$$\tau_j^k = \begin{cases} \arcsin \dfrac{a_j}{\sqrt{a_j^2+b_j^2}} & \text{при } b_j \geq 0, \\[2ex] \pi - \arcsin \dfrac{a_j}{\sqrt{a_j^2+b_j^2}} & \text{при } b_j < 0. \end{cases}$$

Точка t_k принадлежит всем T_j, $j \in \mathcal{B}_k$. Обозначим через $[\delta_j^k, \beta_j^k]$ тот из отрезков, составляющих T_j, в который попадает t_k. Пусть $[\delta^k, \beta^k]$ – пересечение отрезков $[\delta_j^k, \beta_j^k]$, т.е. $\delta^k = \max\limits_j \delta_j^k$, $\beta^k = \min\limits_j \beta_j^k$. Отметим, что из линейной независимости векторов A^j, $j \in \mathcal{B}_k$, следует $\beta^k - \delta^k < \pi$.

Пусть $\mathcal{B}_k = \{\bar{s}\} \cup \mathcal{B}_{k-1} \setminus \{s\}$. Тогда $x_{\bar{s}}^k(t_k) = 0$. Но $x_{\bar{s}}^k(t) \not\equiv 0$. Это ясно, если на предыдущей итерации реализовался случай $\rho_{k-1} = n$, ибо из $x_{\bar{s}}^k(t_k) \equiv 0$ следовало бы $x_s^{k-1}(t) \equiv 0$, а это противоречит определению s. Ниже будет показано, что $x_{\bar{s}}^k(t) \neq 0$ и в случае $\rho_{k-1} = n-1$.

Таким образом, t_k совпадает с одним из концов отрезка $[\delta_{\bar{s}}^k, \beta_{\bar{s}}^k]$, что и определяет направление изменения t: t следует увеличивать, если $\delta_{\bar{s}}^k = t_k$, и уменьшать, если $\beta_{\bar{s}}^k = t_k$. В первом случае полагаем $t_{k+1} = \beta^k = \beta_r^k$ и переходим к следующему шагу с множеством $\mathscr{B}_{k+1} = \{\bar{r}\} \cup \mathscr{B}_k \setminus \{r\}$. Во втором случае поступаем аналогично, принимая $t_{k+1} = \delta^k$.

В. Пусть теперь $\rho_k = n-1$ и, как и выше, $\mathscr{B}_k = \{\bar{s}\} \cup \mathscr{B}_{k-1} \setminus \{s\}$. Система линейных уравнений

$$\sum_{j \in \mathscr{B}_k} A^j g_j = 0 \tag{36}$$

имеет ненулевое решение $g_j = g_j^k$, $j \in \mathscr{B}_k$, и, как будет показано ниже, $g_{\bar{s}}^k \neq 0$. Ввиду $\rho_k = n-1$ дополнительным условием $g_{\bar{s}}^k = -1$ решение системы (36) фиксируется уже однозначно.

Умножая (36) на ε и вычитая из (35), получаем

$$\sum_{j \in \mathscr{B}_k} A^j (x_j^k - \varepsilon g_j^k) = q(t_k).$$

Это соотношение и задает изменение значений x_j:

$$x_j^k(\varepsilon) = x_j^k - \varepsilon g_j^k, \qquad j \in \mathscr{B}_k.$$

В частности, имеем $x_{\bar{s}}^k(\varepsilon) = \varepsilon$ и, следовательно, значение ε нужно увеличивать (от $\varepsilon = 0$). Максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$, при котором еще выполняется условие неотрицательности $x_j^k(\varepsilon)$, определяется формулой

$$\varepsilon^* = \min_{g_j^k > 0} \frac{x_j^k}{g_j^k}.$$

Положительные среди g_j^k существуют ввиду основного предположения (8).

Пусть при $\varepsilon = \varepsilon^*$ обращается в ноль $x_r^k(\varepsilon)$, т.е. $\varepsilon^* = x_r^k / g_r^k$. Перейдем к следующему шагу с комплементарным множеством $\mathscr{B}_{k+1} = \{\bar{r}\} \cup \mathscr{B}_k \setminus \{r\}$. При этом ввиду $\rho_k = n-1$ и $g_r^k \neq 0$ векторы A^j, $j \in \mathscr{B}_k \setminus \{r\}$, линейно-независимы, а значит, $\rho_{k+1} \geq n-1$.

Таким образом, ранг ρ_k не может быть меньше, чем $n-1$.

Кроме того, на k -й итерации при $\rho_k = n-1$ векторы A^j, $j \in \mathcal{B}_k \setminus \{s\}$, линейно-независимы и потому $g_3^k \neq 0$.

Вернемся теперь к рассмотрению случая $\rho_k = n$ и покажем, что $x_{\bar{z}}^k(t) \neq 0$ и при $\rho_{k-1} = n-1$. Пусть m - номер последней из предшествующих итераций, на которой выполнялось $\rho_m = n$. Такой номер m найдется, ибо $\rho_0 = n$ по предположению.

Пусть $\mathcal{B}_{m+1} = \{\bar{v}\} \cup \mathcal{B}_m \setminus \{v\}$. Тем самым производная $\dot{x}_v(t_{m+1})$ отлична от нуля. Определим вектор h из условий

$$(h, A^j) = 0, \quad j \in \mathcal{B}_m \setminus \{v\}, \tag{37}$$

$$(h, A^v) = 1. \tag{38}$$

Тогда на любой промежуточной итерации с номером l, $m<l<k$, будет $(h, A^j) = 0$, $j \in \mathcal{B}_l$, а для k -й итерации получим

$$(h, A^j) = 0, \quad j \in \mathcal{B}_k \setminus \{3\}, \tag{39}$$

$$(h, A^3) \neq 0. \tag{40}$$

Записывая равенство

$$\sum_{j \in \mathcal{B}} A^j \dot{x}_j(t) = \dot{q}(t)$$

для $\mathcal{B} = \mathcal{B}_m$, $t = t_{m+1}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k$, $t = t_k$ и умножая на h, получим соответственно

$$\dot{x}_v^m(t_{m+1}) = \dot{q}(t_{m+1}), \tag{41}$$

$$\dot{x}_3^k(t_k) \cdot (h, A^3) = \dot{q}(t_k). \tag{42}$$

Учитывая $t_k = t_{m+1}$, из (41), (42), ввиду (40), получаем $\dot{x}_{\bar{3}}^k(t_k) \neq 0$, что и требовалось.

III. Алгоритм. Более детальная алгоритмическая конкретизация описанной общей схемы может быть осуществлена различным способом. Приведем один из возможных вариантов.

Перед началом k -й итерации имеется следующая информация. Имеется текущее значение параметра $t = t_k$ и значение $\lambda \in \{-1, 1\}$, указывающее последнее направление изменения t: если $\lambda = 1$, то t_k получено при увеличении t, если же $\lambda = -1$ - при уменьшении t. Имеется базис R^n из векторов A^j, $j \in \mathcal{D}_{k-1}$. Если предыдущая итерация была итерацией первого типа, т.е. $\rho_{k-1} = n$, то $\mathcal{D}_{k-1} = \mathcal{B}_{k-1}$. Если же $\rho_{k-1} = n-1$, т.е. выполнялась итерация второго типа, то $\mathcal{D}_{k-1} = \{s^*\} \cup \mathcal{B}_{k-1} \setminus \{s\}$, где s^* – номер, исключенный из текущего множества $\mathcal{B}$ на последней из итераций первого типа. В этом случае $\mathcal{D}_{k-1}$ в отличие от $\mathcal{B}_{k-1}$ уже не будет комплементарным, но будет почти комплементарным: для $j \neq s, s^*$ один элемент из пары $\{j, \bar{j}\}$ содержится в $\mathcal{D}_{k-1}$.

Для единообразия считаем, что всегда $\mathcal{D}_{k-1} = \{s^*\} \cup \mathcal{B}_{k-1} \setminus \{s\}$, но в случае $\rho_{k-1} = n$ выполняется $s^* = s$.

Таким образом, к началу k -й итерации имеется два номера: s^* и $s_0 = \bar{s}$. Вектор A^{s_0} подлежит вводу в базис на данной итерации, а вектор A^{s^*} "желательно" исключить; в этом случае множество $\mathcal{D}_k$ будет комплементарным.

Наконец, имеются функции $x_j(t)$, $j \in \mathcal{D}_{k-1}$, задающие представление вектора $q(t)$ через векторы базиса $\{A^j\}_{j \in \mathcal{D}_{k-1}}$.

При описании алгоритма будем пользоваться знаком $:=$ для оператора присваивания. Всю процедуру итерации можно разбить на следующие операторы.

1. Решение системы линейных уравнений

$$\sum_{j \in \mathcal{D}_{k-1}} A^j g_j = A^{s_0}. \tag{43}$$

2. Если $g_{s^*} \neq 0$, то переход к п.3, иначе – к п.8.
3. $\lambda := -\lambda \operatorname{sign} g_{s^*}$; $\mathcal{D}_k := \{s_0\} \cup \mathcal{D}_{k-1} \setminus \{s^*\}$.
4. Преобразование функций $x_j(t)$, $j \in \mathcal{D}_k$.
5. Определение $\delta_j = \delta_j^k$ и $\beta_j = \beta_j^k$, $j \in \mathcal{D}_k$.
6. Определение t_{k+1} : если $\lambda = 1$, то $t_{k+1} = \min_j \beta_j = \beta_r$, в противном случае $t_{k+1} = \max_j \delta_j = \delta_r$.
7. $s^* := r$, переход к п.10.
8. Определение $\varepsilon^* = \min\limits_{g_j > 0} \dfrac{x_j(t_k)}{g_j} = \dfrac{x_r(t_k)}{g_r}$.
9. $\mathcal{D}_k := \{s_0\} \cup \mathcal{D}_{k-1} \setminus \{r\}$, преобразование функций $x_j(t)$, $j \in \mathcal{D}_k$.
10. $s_0 := \bar{r}$, $k := k+1$, возврат к п.1.

Фигурирующее в п.4 и в п.9 преобразование функций $x_j(t)$, $j \in \mathcal{D}_k$, осуществляется по известным формулам симплекс-метода линейного программирования. В частности, для $x_{s_0}(t)$ в п.4 будем иметь

$$x_{s_0}(t) = \frac{1}{g_{s^*}} x_{s^*}(t). \tag{44}$$

Из этого и следует правило изменения λ. Если, например, $x_{s*}(t)$ обратилось в ноль при $t=t_k$ возрастая, то в случае $q_{s*}<0$ получим из (44), что $x_{s_0}(t)\geq 0$ при $t\in$ $\in[t_k, t_k+\pi]$. Это означает, что следует продолжить увеличение t^k; т.е. λ сохраняет значение I.

IУ. Характер траектории, порождаемой процессом. Пусть выполняется следующее условие невырожденности: если для комплементарного множества $\mathcal{B}$ при некотором t имеем $q(t)\in Z(\mathcal{B})$, то в представлении

$$\sum_{j\in\mathcal{B}} A^j x_j = q(t)$$

разве лишь один из коэффициентов x_j может быть равен нулю.

Предположим, что мы не прекращаем процесс даже если получено одно из значений $t=\frac{\pi}{2}$ или $t=-\frac{3\pi}{2}$, а продолжаем его дальше. Тем самым получается бесконечная последовательность комплементарных множеств $\mathcal{B}_k$, $k=1,2\ldots$ Так как имеется лишь конечное число различных комплементарных множеств (2^n), то на определенном шаге k_0 повторится уже пройденное $\mathcal{B}_\ell$. Условие невырожденности обеспечивает однозначную продолжимость этой последовательности как в одну, так и в другую стороны, т.е. имея некоторое $\mathcal{B}_s$, $s\geq 1$, однозначно определяем $\mathcal{B}_{s+1}$ и $\mathcal{B}_{s-1}$. Отсюда следует, что первым повторившимся множеством в последовательности $\mathcal{B}_k$ будет начальное множество $\mathcal{B}_0$, т.е. $\mathcal{B}_{k_0}=\mathcal{B}_0$. Затем последует $\mathcal{B}_{k_0+1}=\mathcal{B}_1$ и т.д.

Таким образом, последовательность $\mathcal{B}_k$ имеет циклический характер, и при однократном прохождении цикла каждое из встреченных множеств $\mathcal{B}_s$ проходится лишь один раз. При этом проекция $\hat{q}(t)$ точки $q(t)$ на сферу S при полном прохождении цикла зачеркивает, вообще говоря, некоторую часть окружности большого диаметра. Однако если можно гарантировать, что траектория изменения параметра t при этом не зацикливается, то $\hat{q}(t)$ зачертит полную окружность (может быть, даже неоднократно), и тем самым в этом случае обеспечивается получение решения исходной задачи. Такого рода утверждения можно получить, используя следующую характеристику процесса.

ТЕОРЕМА 7. Направление изменения параметра t на k-й итерации определяется лишь направлением, задаваемым на начальной итерации, и знаком определителя $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_k)$.

Иными словами, это означает, что для всех $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_k)$ с положительным $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_k)$ направление изменения t будет одним и тем же. Для $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_k)$ с отрицательным значением $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_k)$ направление изменения t будет противоположным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что если исключить те итерации, на которых $\det \mathcal{F}(\mathcal{B})$, соответствующий текущему комплементарному множеству $\mathcal{B}$, обращается в ноль и, следовательно, движение по t не происходит, то в оставшейся последовательности итераций перемены направления движения по t происходят при перемене знака у $\det \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

Предполагая какую-либо упорядоченность в множестве $\mathcal{B}$, введем в рассмотрение матрицы $\mathcal{A}(\mathcal{B})=\{\alpha^j\}_{j\in\mathcal{B}}$ и $A(\mathcal{B})=\{A^j\}_{j\in\mathcal{B}}$. Они связаны равенством

$$\mathcal{F}(\mathcal{B})\mathcal{A}(\mathcal{B})=A(\mathcal{B}) \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\det \mathcal{F}(\mathcal{B}) \det \mathcal{A}(\mathcal{B})=\det A(\mathcal{B}). \tag{46}$$

Рассмотрим сначала случай, когда на двух последовательных итерациях $\det A(\mathcal{B})\neq 0$. Пусть речь идет об итерациях с номерами $k-1$ и k . Пусть $\mathcal{B}_k=\{\bar{s}\}\cup\mathcal{B}_{k-1}\setminus\{s\}$. Условимся, что упорядоченное $\mathcal{B}_k$ получается из упорядоченного $\mathcal{B}_{k-1}$ просто заменой s на $\bar{s}$. Это означает, что $\mathcal{A}(\mathcal{B}_k)$ получается из $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1})$ заменой α^s на $\alpha^{\bar{s}}=-\alpha^s$. Тем самым

$$\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_k)=-\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1}), \tag{47}$$

$$\det A(\mathcal{B}_k)=g_s \det A(\mathcal{B}_{k-1}), \tag{48}$$

где g_s – коэффициент разложения, получающийся при решении системы (43). В данном случае $\rho_k=n$ и $s=s^*$. Так как $\det A(\mathcal{B}_k)\neq 0$, то $g_s\neq 0$.

Согласно описанию алгоритма, изменение направления движения по t при переходе от $\mathcal{B}_{k-1}$ к $\mathcal{B}_k$ определяется знаком коэффициента g_s : при $g_s<0$ направление остается прежним, при $g_s>0$ меняется на противоположное.

С другой стороны, из (46)-(48) имеем

$$\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k-1}) \det \mathcal{F}(\mathcal{B}_k)=\frac{\det A(\mathcal{B}_{k-1}) \det A(\mathcal{B}_k)}{\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1}) \det \mathcal{A}(\mathcal{B}_k)}=$$

$$= - g_s \frac{(\det A(\mathcal{B}_{k-1}))^2}{(\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1}))^2} .$$

Отсюда следует, что $\det \mathcal{F}(\mathcal{B})$ не меняет знака при переходе от $\mathcal{B}_{k-1}$ к $\mathcal{B}_k$, если $g_s < 0$, и меняет знак, если $g_s > 0$. Это и требовалось доказать.

Пусть теперь $\det A(\mathcal{B}_{k-1}) \neq 0$, но k-я итерация является итерацией второго типа, т.е. $g_s = 0$, и тем самым $\det A(\mathcal{B}_k) = 0$, $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_k) = 0$. Пусть после этого следуют еще несколько итераций этого типа и лишь итерация с номером $k + \ell$ снова является итерацией первого типа, т.е. $\det A(\mathcal{B}_{k+\ell}) \neq 0$. Вернемся к описанию k-й итерации. Перед началом ее имеем текущий базис из векторов A^j, $j \in \mathcal{D}_{k-1}$, в котором выделен вектор $A^{s^*} = A^s$. При этом $\mathcal{D}_{k-1} = \mathcal{B}_{k-1}$. В базис вводится вектор $A^{\bar{s}}$, который вытесняет из базиса вектор $A^{r} = A^{r_0}$. В результате получаем новый базис A^j, $j \in \mathcal{D}_k = \{\bar{s}\} \cup \mathcal{D}_{k-1} \setminus \{r_0\}$. Таким образом, $\mathcal{D}_k = \{s^*\} \cup \mathcal{B}_k \setminus \{r_0\}$, т.е. множества $\mathcal{B}_k$ и $\mathcal{D}_k$ отличаются лишь одним элементом.

Будем считать, что текущий базис упорядочен и порядок при переходе от итерации к итерации меняется естественным образом: вводимый в базис вектор занимает место исключаемого вектора. Возникающая упорядоченность в множестве $\mathcal{D}_{k+1}$ порождает упорядоченность в множестве $\mathcal{B}_k$: нужно в $\mathcal{D}_{k+1}$ номер s^* заменить номером r, оставив взаимный порядок элементов неизменным.

В результате получаем следующее правило получения упорядоченного множества $\mathcal{B}_k$ из упорядоченного множества $\mathcal{B}_{k-1}$: элемент s заменяется элементом $\bar{s}$, после чего $\bar{s}$ и r_0 меняются местами. Эти же операции будут выполняться и при получении остальных множеств $\mathcal{B}_{k+i}$ вплоть до $\mathcal{B}_{k+\ell-1}$: если $\mathcal{D}_{k+i} = \{\bar{r}_{i-1}\} \cup \mathcal{D}_{k+i-1} \setminus \{r_i\}$, то $\mathcal{B}_{k+i}$ получается из $\mathcal{B}_{k+i-1}$ заменой r_{i-1} на $\bar{r}_{i-1}$, после чего $\bar{r}_{i-1}$ и r_i меняются местами.

При образовании $\mathcal{B}_{k+\ell}$ произойдет замена в $\mathcal{B}_{k+\ell-1}$ номера $r_{\ell-1}$ номером $\bar{r}_{\ell-1}$, однако перестановки не последует, ибо при образовании $\mathcal{D}_{k+\ell}$ номер $\bar{r}_{\ell-1}$ заменит в $\mathcal{D}_{k+\ell-1}$ номер $s^* = s$, т.е. $r_\ell = s \notin \mathcal{B}_{k+\ell-1}$. Получим $\mathcal{D}_{k+\ell} = \mathcal{B}_{k+\ell}$.

Теперь рассмотрим основной вопрос о связи перемены знака в двучленной последовательности $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k-1}), \det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k+l})$ с изменением направления движения по t при переходе от $\mathcal{B}_{k-1}$ к $\mathcal{B}_{k+l}$, т.е. со знаком коэффициента разложения $g_s = g_s^{k+l}$, получаемого на последней итерации $k+l$. Из (46) следует

$$\det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k-1}) \det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k+l}) = \frac{\det A(\mathcal{B}_{k-1}) \det A(\mathcal{B}_{k+l})}{\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1}) \det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k+l})}. \quad (49)$$

Относительно $\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1})$ и $\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k+l})$ по-прежнему можем утверждать

$$\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k+l}) = -\det \mathcal{A}(\mathcal{B}_{k-1}), \quad (50)$$

ибо на всех итерациях из рассмотренной серии, кроме последней, будет происходить двукратная перемена знака у $\det \mathcal{A}(\mathcal{B})$: один раз в результате замены некоторого столбца α^j на $\bar{\alpha}^j = -\alpha^j$, и второй раз в результате перестановки двух столбцов местами. На последней же итерации перестановка отсутствует, и знак поменяется лишь один раз.

Что касается знаков определителей $\det A(\mathcal{B}_{k-1})$ и $\det A(\mathcal{B}_{k+l})$, то

$$\operatorname{sign} \det A(\mathcal{B}_{k+l}) = \operatorname{sign} g_s^{k+l} \cdot \operatorname{sign} \det A(\mathcal{B}_{k-1}). \quad (51)$$

Действительно, матрицы $A(\mathcal{B}_{k-1})$ и $A(\mathcal{B}_{k+l})$ являются крайними в ряду базисных матриц $A(\mathcal{D}_{k-1}), A(\mathcal{D}_k), \dots, A(\mathcal{D}_{k+l})$. При переходе от одной матрицы этого ряда к другой в матрице меняется лишь один столбец, и при этом на всех переходах, кроме последнего, соблюдается условие: в разложении вводимого столбца по имеющемуся базису коэффициент разложения, соответствующий заменяемому столбцу, положителен. Тем самым, на этих переходах знак определителя матрицы $A(\mathcal{D})$ не меняется. Отсюда и следует равенство (51).

В результате из (49), ввиду (50) и (51), получаем

$$\operatorname{sign} \det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k-1}) \cdot \operatorname{sign} \det \mathcal{F}(\mathcal{B}_{k+l}) = -\operatorname{sign} g_s^{k+l}, \quad (52)$$

что и завершает доказательство теоремы.

Из доказанного утверждения следует, что для задач с неотрицательными главными минорами матрицы A параметр t в процессе будет меняться монотонно, т.е. траектория точки $q(t)$ не будет содержать точек возврата, а тем самым точка $\hat{q}(t)$ зачертит на сфере полную окружность большого диаметра.

В общем случае, когда монотонности в изменении параметра t нет, для обеспечения обхода точкой $\hat{q}(t)$ полной окружности достаточно, чтобы, начиная с определенного момента, начальное значение $t=0$ в дальнейшем уже не повторялось. Если в качестве начальной точки $q(0)$ принимается $\rho=-e$, а $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_-$, то для задач из класса E_0 траектория $\hat{q}(t)$ может вернуться к $\hat{q}(0)$ лишь обойдя полную окружность по той причине, что в рассматриваемом случае $\rho\in \mathrm{Int}\ \mathcal{Z}(\mathcal{B})$, а при любом другом комплементарном $\mathcal{B}_k\neq\mathcal{B}_-$ имеем $\mathrm{Int}\ \mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)\cap\mathcal{Z}(\mathcal{B}_k)=\emptyset$.

Если учесть теорему 7, то ясно, что отмеченный характер траектории $\hat{q}(t)$ сохранится и при более слабом предположении (I3).

Несколько иная картина будет для задач с отрицательной главной диагональю матрицы A, о которых шла речь в теореме 2. Начиная с $q(0)=-e$ и $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_-$, получим в качестве $\mathcal{B}_1$ одно из множеств $\mathcal{B}^j=\{n+1,\dots,n+j-1,j,n+j+1,\dots,2n\}$.
Так как $\det\mathcal{F}(\mathcal{B}^j)=a_{jj}<0$, а $\det\mathcal{F}(\mathcal{B}_-)=1>0$, то направление изменения t поменяется на противоположное. Из формул (I5) и (I6) легко видеть, что из $h\in\mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$, $h_j<0$ следует $h\in \mathrm{Int}\ \mathcal{Z}(\mathcal{B}^j)$. Тем самым точка $q(t)$ снова пройдет через точку $(-e)$. (Именно этим и объясняется неудача при попытке решать такие задачи по алгоритму Лемке, как это было видно на задаче с матрицей (3I).)

Более того, получим $q(t_2)\notin\mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$. Пусть для определенности начальное направление изменения t является направлением роста t. Тогда $t_2<0$. Отправляясь от $t=0$, можем начать отслеживать траекторию в обратном направлении, задав в качестве начального направление убывания t. Получим комплементарные множества $\mathcal{B}_{-1}$, $\mathcal{B}_{-2}$ и т.д. и соответствующие $t_{-1}, t_{-2},\dots$ Из приведенных рассуждений следует $t_2<0<t_{-2}$. Теперь ясно, что если бы траектория изменения параметра t зацикливалась, то должно было бы существовать такое комплементарное $\mathcal{B}_k\neq\mathcal{B}_-$, $k>2$, что $\det\mathcal{F}(\mathcal{B}_k)>0$ и $q(0)\in\mathcal{Z}(\mathcal{B}_k)$, а значит, $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_k)$ пересекается с $\mathrm{Int}\ \mathcal{Z}(\mathcal{B}_-)$. Однако комплементарных множеств с такими свойствами, как это видно из доказательства теоремы 2, не существует.

Таким образом, траектория изменения t не может зацикливаться, а следовательно, на определенном шаге процесса будет получено решение исходной задачи дополнительности.

В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Если $q(0)=-e$ и при этом выполняется предположение невырожденности, то в условиях теоремы 2 сферический алгоритм дает решение исходной задачи дополнительности.

Рассмотрим теперь класс задач, о котором шла речь в теореме 3, предполагая, однако, что $q>0$. Покажем, что за счет подходящего выбора начальной точки $p=q(0)$ в этом случае также можно получить гарантию разрешимости задачи при применении сферического алгоритма.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $q>0$ и выполняются условия теоремы 3, т.е. имеет место (I2$'$) и нашлись такие r и s что

$$a_{rr}<0,\quad a_{ss}<0,\quad a_{ir}\geqslant 0 \text{ при } i\neq r. \tag{53}$$

Тогда существует такая точка $p\in R^n$, что при $q(0)=p$, $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_-$ сферический алгоритм дает решение исходной задачи дополнительности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma=\min\limits_i q_i$. Выберем произвольное ε из интервала $(0,\gamma)$ и рассмотрим в качестве p точку с координатами

$$p_r=-q_r+\varepsilon,$$

$$p_s=-q_s-\varepsilon,$$

$$p_i=-q_i,\qquad i\neq r,s.$$

В силу выбора ε точка p лежит внутри $R^n_-=\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}_-$ и в качестве начального направления изменения t выбрано направление роста t. Легко видеть, что точка $q(t)$ при изменении t в интервале $(-\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi)$ будет пересекать те же грани конусов $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ и в той же очередности, что и точка $\tilde{q}(\lambda)=p+\lambda(p+q)$ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$. Отсюда следует, что в качестве $\mathcal{B}_1$ будет получено множество $\mathcal{B}^r$. Если же выстраивать траекторию в обратном направлении, как это было проделано при рассмотрении теоремы 8, то получим $\mathcal{B}_{-1} = \mathcal{B}^{3}$. Незначительными вариациями точки p можно добиться, чтобы в дополнение к этому выполнялось и условие невырожденности, что обеспечивает однозначность продолжений траектории.

Дальнейший ход доказательства следует схеме рассмотрений теоремы 8. Из (53) следует, что $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^{2}) \supset \mathcal{Z}(\mathcal{B}_{-})$, а $t_2 \leq t_{-1} < t_{-2}$. Кроме того, при t', достаточно близких справа к t_{-1}, будем иметь $q(t) \in \mathcal{I}nt\, R^{n}_{-}$. Теперь, как и выше, заключаем: если бы траектория изменения t зацикливалась, то нашлось бы комплементарное $\mathcal{B}$, что $\det \mathcal{F}(\mathcal{B}) > 0$ и $q(t') \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$, а значит, $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{I}nt\, R^{n}_{-} \neq \emptyset$, что противоречит (12′). Это завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. LEMKE C.E. A syrvey of complementarity theory. - In: Variotional inequalities and complementarity problems, Theory and applications. N.Y. - Brisbane - Toronto, 1980, p.211-239.
2. LEMKE C.E. Complementarity problems. - In: Nonlinear prosramming. N.Y. - London: Academic Press, 1970.
3. LEMKE C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. - Manag. Sc., 1965, N 11, pp.681-689.
4. АЛЕКСАНДРОВ П.С. Комбинаторная топология. - М.: Гостехиздат, 1947.
5. ДУБРОВИН Б.А., НОВИКОВ С.П., ФОМЕНКО А.Г. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979.
6. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1956.

7. BORSUK K. Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphar. - Find. Math., I933, v.20, pp. I77-I90.

Поступила в ред.-изд. отдел
I3.05.I986 г.