Численные методы

УДК 519.95

УЧЕТ СТРУКТУРЫ КООРДИНИРУЮЩЕЙ ЗАДАЧИ В МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А.В.Кулинич

В работе матрица ограничений координирующей задачи метода декомпозиции Данцига - Вулфа представляется в виде произведения двух матриц, причем одна из них постоянная, другая имеет блочно-диагональную структуру. Это представление позволяет при решении координирующей задачи воспользоваться специальным приемом, который не только упрощает решение, но и значительно сокращает объем используемой оперативной памяти для некоторого класса блочных задач.

В применении к одной блочной задаче специального вида предлагаемый прием рассмотрен автором в [I]. Здесь рассматривается общий случай.

Не входя в детальное описание, рассмотрим алгоритм Данцига - Вулфа [2,3] для блочной задачи линейного программирования вида

$$\sum_{\ell=1}^{L} c_\ell z_\ell \to max, \tag{I}$$

$$A_\ell z_\ell \le a_\ell, \quad z_\ell \ge 0, \quad \ell = \overline{1,L}, \tag{2}$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} B_\ell z_\ell \le b, \tag{3}$$

где A_ℓ - матрица размерности $m_\ell \times n_\ell$, B_ℓ - матрица размерности $m \times n_\ell$, c_ℓ - строка, z_ℓ , a_ℓ , b - столбцы размерностей, согласованных с размерностями матриц A_ℓ , B_ℓ .

Пусть z_ℓ^ν , $\nu = \overline{1,t_\ell}$, - вершины многогранных множеств

$$\mathcal{Z}_l = \{ z_l \geq 0, \ A_l z_l \leq a_l \},$$

отвечающих локальным ограничениям отдельных подсистем (2), а $z_l^{\mu}, \ \mu = \overline{t_l+1, S_l}$, - представители крайних лучей соответствующего конуса

$$\mathcal{K}_l = \{ z_l \geq 0, \ A_l z_l \leq 0 \}.$$

Любая точка z_l многогранного множества $\mathcal{Z}_l$ представляет собой линейную комбинацию точек $z_l^k, \ k = \overline{1, S_l}$, при надлежащих ограничениях на ее коэффициенты, т.е.

$$z_l = \sum_{k=1}^{S_l} u_l^k z_l^k, \quad \sum_{\nu=1}^{t_l} u_l^{\nu} = 1, \quad u_l^k \geq 0, \quad k = \overline{1, S_l}. \tag{4}$$

Координирующая задача сводится формально к вычислению таких линейных комбинаций точек z_l^k, которые удовлетворяют ограничениям (3) и оптимизируют целевой функционал (I).

С учетом (4) координирующая задача записывается в виде

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{S_l} u_l^k (c_l z_l^k) \longrightarrow max, \tag{5}$$

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{S_l} u_l^k (B_l z_l^k) \leq b, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{S_l} d_l^k u_l^k = 1, \quad l = \overline{1, L}, \tag{7}$$

$$u_l^k \geq 0, \quad l = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, S_l}. \tag{8}$$

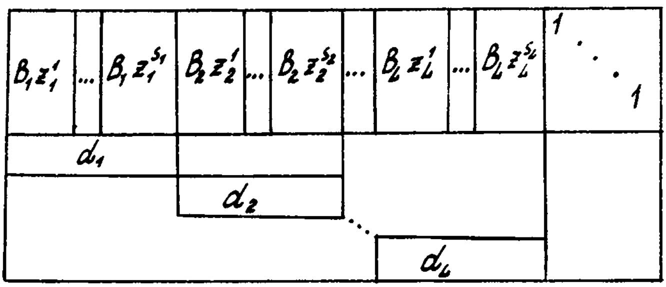
Здесь векторная строка $d_l = (d_l^1, \ldots, d_l^{S_l})$ состоит из нулей и единиц, причем единицы соответствуют крайним точкам множества $\mathcal{Z}_l$, нули - представителям крайних точек конуса $\mathcal{K}_l$.

Для решения координирующей задачи нет необходимости в информации о значениях всех коэффициентов линейной формы (5) и компонент векторов условий (6). На каждом шаге достаточно знать лишь $m + L$ векторов условий задачи, составляющих ее текущий базис, и соответствующие коэффициенты линейной формы. Выбор вектора, подлежащего включению в базис на очередной итерации в методе последовательного улучшения допустимого вектора, определяется решениями локальных задач подсистем.

Будем рассматривать координирующую задачу (5)-(8) в следующей канонической форме:

$$\bar{c}\,\bar{u} \to max,$$
$$W\bar{u} = \bar{b}, \qquad (9)$$
$$\bar{u} > 0,$$

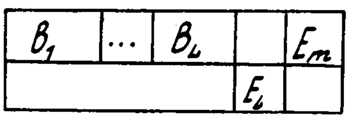
где строка $\bar{c} = (c_1 z_1^1, \dots, c_1 z_1^{s_1}, \dots, c_L z_L^1, \dots, c_L z_L^{s_L}, 0, \dots, 0)$, столбец $\bar{u} = (u_1^1, \dots, u_1^{s_1}, \dots, u_L^1, \dots, u_L^{s_L}, \lambda)$, столбец $\bar{b} = (b, 1, \dots, 1)$, матрица

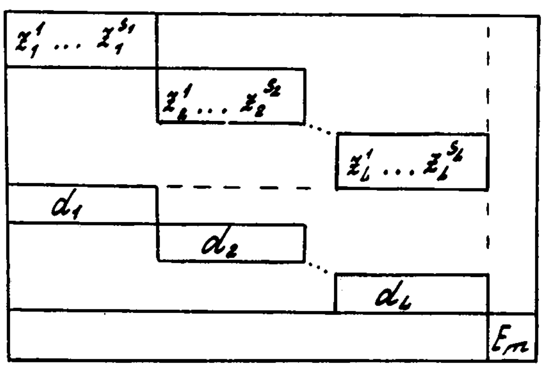


Матрицу W можно представить в виде произведения двух матриц:

$$W = H \cdot Q, \qquad (10)$$

где

$H =$ 



Здесь размерность единичной матрицы E_m равна числу строк m в матрице B_L, матрица E_L имеет размерность L.

Заметим, что матрица H для рассматриваемой задачи (I)-(3) остается постоянной на всех итерациях метода Данцига - Вулфа. Всю переменную информацию координирующей задачи несет блочно-диагональная матрица Q. Поэтому очевидно, что для выбора базисной матрицы W_β в методе последовательного улучшения допустимого вектора достаточно выбирать базисную матрицу в матрице Q. Тогда

$$W_\beta = H \cdot Q_\beta . \tag{II}$$

При решении координирующей задачи методом последовательного улучшения допустимого вектора [4,5] к началу очередного шага предполагается, что коэффициенты разложения u_j, $j \in J$, столбца $\bar{b}$ по выбранному базису $\{\omega_j\}_{j \in J}$, где $W_\beta = [\omega_1, \ldots, \omega_y] = [Hq_1, \ldots, Hq_y]$, неотрицательны.

На каждом шаге метода нужно вычислять обратную матрицу W_β^{-1} для получения векторов x и y, являющихся решениями двух систем:

$$y \cdot W_\beta = c_\beta , \tag{I2}$$

$$W_\beta \cdot x = \omega_j . \tag{I3}$$

В системе (I2) c_β - строка из элементов строки $\bar{c}$, соответствующих матрице W_β, координирующей задачи (9). В системе (I3) ω_j - j-й столбец матрицы W, для которого выполняется неравенство

$$y \cdot \omega_j < c_j , \tag{I4}$$

где c_j - j-й элемент строки $\bar{c}$. Если нет такого номера j, что неравенство (I4) выполняется, то столбец $(u_1, \ldots, u_y) = u_\beta = W_\beta^{-1} \cdot \bar{b}$ является оптимальным решением.

Учитывая специфическую структуру (II) матрицы W_β, рассмотрим методы получения векторов y и x. Эти методы не только сокращают используемую оперативную память, что крайне важно в задачах больших размерностей, но и освобождают нас от необходимости вычислять обратную матрицу W_β^{-1} в той или иной форме.

Прежде всего заметим, что столбцы блоков базисной матрицы Q_β есть не что иное, как базисные планы x_ℓ^k соответствующих локальных задач подсистем. Тогда в каждом столбце x_ℓ^k присутствуют нулевые компоненты, более того, в силу специфики изменения локальных задач (на следующем этапе решается локальная задача с подправленной целевой функцией, но с теми же ограничениями) в каждом блоке присутствуют нулевые строки, которые можно вычеркнуть, вычеркнув соответствующие столбцы в блоках матрицы H. При этом размерность базисной матрицы W_β не изменится, так как $W_\beta = H \cdot Q_\beta = \bar{H} \cdot \bar{Q}_\beta$, где $\bar{Q}_\beta$ - матрица, полученная из Q_β вычеркиванием нулевых строк, $\bar{H}$ - матрица, полученная из H вычеркиванием соответствующих столбцов. Но если ввести матрицу Q_0, состоящую из столбцов, дополняющих столбцы матрицы $\bar{Q}_\beta$ до ортонормированной базы, и матрицу H_0, состоящую из строк, образующих ортогональное дополнение к строкам матрицы $\bar{H}$, то размерность матрицы $Q_0' \cdot H_0'$, обратную к которой будем находить, уменьшится на число вычеркнутых строк в Q_β. Этим и воспользуемся ниже.

Представим матрицы $\bar{H}$ и $\bar{Q}_\beta$ в виде

$$\bar{H} = P \cdot \hat{H}, \quad \bar{Q}_\beta = \hat{Q}_\beta \cdot R,$$

где $\hat{H}$ - матрица с ортонормированными строками, $\hat{Q}_\beta$ - матрица с ортонормированными столбцами, P и R - соответствующие верхние треугольные матрицы. При этом системы (I2),(I3) примут вид

$$y \cdot P \cdot \hat{H} \cdot \hat{Q}_\beta \cdot R = c_\beta, \tag{I5}$$

$$P \cdot \hat{H} \cdot \hat{Q}_\beta \cdot R \cdot x = \omega_j . \tag{I6}$$

Обозначив для удобства $\bar{y} = y \cdot P$, $\bar{\omega}_j = P^{-1} \omega_j$, $\bar{x} = R \cdot x$, $\bar{c}_\beta = c_\beta \cdot R^{-1}$, получим из (I5),(I6)

$$\bar{y} \cdot \hat{H} \cdot \hat{Q}_\beta = \hat{c}_\beta, \tag{I7}$$

$$\hat{H} \cdot \hat{Q}_\beta \cdot \bar{x} = \bar{\omega}_j, \tag{I8}$$

Тогда можно найти $\bar{y} \cdot \hat{H}$ и $\hat{Q}_\beta \cdot \bar{x}$ следующим образом:

$$\bar{y}\cdot\hat{A}=\bar{c}_\beta\cdot\hat{Q}_\beta'+\gamma_y\cdot Q_0' \qquad (19)$$

$$\hat{Q}_\beta\bar{x}=\hat{H}'\bar{\omega}_j+H_0'\gamma_x, \qquad (20)$$

где γ_y и γ_x - некоторые векторы параметров. Так как строки H_0 ортогональны строкам $\hat{H}$, столбцы Q_0 ортогональны столбцам $\hat{Q}_\beta$, то получаем равенства для вычисления параметров γ_x и γ_y:

$$\bar{y}\hat{H}H_0'=\bar{c}_\beta\hat{Q}_\beta'H_0'+\gamma_y Q_0'H_0'=0, \qquad (21)$$

$$Q_0'\hat{Q}_\beta\bar{x}=Q_0'\hat{H}'\bar{\omega}_j+Q_0'H_0'\gamma_x=0. \qquad (22)$$

Заметим, что строка γ_y и столбец γ_x определяются однозначно из (21),(22), так как в противном случае неоднозначно определяются y и x из базисных систем (12),(13).

Таким образом, для определения параметров γ_y и γ_x необходимо вычислять одну и ту же невырожденную обратную матрицу $(Q_0'H_0')^{-1}$.

Теперь можно перейти к вычислению y и x из (19),(20). Однако следует заметить, что строка y нужна только для проверки выполнения условия (14), и в силу представления (10) нет необходимости вычислять y из (19). Действительно, пусть ω_j - некоторый столбец матрицы W. Тогда $\omega_j=H\cdot q_j$, где q_j - соответствующий столбец матрицы Q, и неравенство (14) представляется в виде $y\cdot H\cdot q_j<c_j$. Поэтому для проверки выполнения этого неравенства достаточно вычислять строку $\zeta=yH=\bar{y}\hat{H}$, которая и определяется равенством (19):

$$\zeta=c_\beta R^{-1}\hat{Q}_\beta'+\gamma_y Q_0'. \qquad (23)$$

Из (20) получаем равенство для вычисления x:

$$x=R^{-1}\hat{Q}_\beta'(\hat{H}'P^{-1}\omega_j+H_0'\gamma_x). \qquad (24)$$

С целью экономии используемой оперативной памяти можно ζ и x вычислять поблочно, так как матрица $\hat{Q}_\beta$, а значит, и матрицы $\hat{Q}_\beta$, R и Q_0 имеют блочно-диагональное строение. Пусть $\hat{Q}_\beta^k$ - k-й блок матрицы $\hat{Q}_\beta$, R^k - соответствующая верхняя треугольная матрица, Q_0^k - матрица, составленная из столбцов, ортогональных столбцам матрицы $\hat{Q}_\beta^k$, c_β^k, γ_y^k,

$(\hat{H}'P^{-1}\omega_j + H_0'\gamma_x)^k$ - соответствующие части векторов. Тогда получим из (23) и (24) равенства для вычисления ζ^k и x^k :

$$\zeta^k = c_\beta^k (R^k)^{-1} (\hat{Q}_\beta^k)' + \gamma_y^k (Q_0^k)', \quad k = \overline{1, L+1}, \tag{25}$$

$$x^k = (R^k)^{-1} (\hat{Q}_\beta^k)' (\hat{H}'P^{-1}\omega_j + H_0'\gamma_x)^k, \quad k = \overline{1, L+1}. \tag{26}$$

Следующий этап метода последовательного улучшения допустимого вектора состоит в определении столбца $\omega_p = Hq_p$ базисной матрицы W_β , который заменяется на столбец $\omega_j = Hq_j$. Соответственно в матрице Q_β столбец q_p заменяется на столбец q_j . Это означает, что в каждом k -м блоке Q_β^k матрицы могут возникнуть следующие случаи.

СЛУЧАЙ I. Один из столбцов в матрице $\hat{Q}_\beta^k$ выбывает. Этот столбец достраиваем к матрице Q_0^k и вычеркиваем соответствующий столбец в треугольной матрице R^k . В результате этого в матрице R^k ниже главной диагонали появляется отличная от нуля диагональ, причем на ней ненулевые элементы находятся в строках, начиная с $(j+1)$ (j - выбывающий столбец). Умножим матрицу R^k слева поочередно на элементарные матрицы вращения $T_{i\,i+1}$, $i \geq j$, где

$$T_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ \mu \\ \\ \nu \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \mu & & \nu & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & 1 & \varphi & \cdots & \psi & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & & -\psi & \cdots 1 & \varphi & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{27}$$

выбирая φ и ψ каждый раз так, чтобы последовательно аннулировать появившиеся в матрице R^k ниже диагонали ненулевые элементы [6]. Умножая матрицу $\hat{Q}_\beta^k$ справа на соответствующие транспонированные матрицы и вычеркивая в преобразованной матрице Q_β^k последний столбец, а в полученной матрице R^k последнюю (нулевую) строку, получим новое представление матрицы $\bar{Q}^k_\beta$ в виде произведения матрицы с ортогональными столбцами $\hat{Q}^k_\beta$ на верхнюю треугольную матрицу R^k. В матрице $\bar{H}$ при этом никаких изменений не происходит.

Если в новой матрице $\bar{Q}^k_\beta$ есть нулевая строка, то вычеркиваем ее вместе с соответствующей (т.е. нулевой) строкой в матрице $\hat{Q}^k_\beta$. При этом ортогональность столбцов в матрице $\hat{Q}^k_\beta$ не нарушается. Чтобы вычеркнуть соответствующую строку и столбец в матрице Q^k_0, сохранив ортогональнъность столбцов Q^k_0 столбцам $\hat{Q}^k_\beta$, необходимо с помощью преобразования отражения привести вычеркиваемую строку к виду (0,...,0,I,0,...,0), где единица стоит на месте вычеркиваемого столбца. Для этого умножим матрицу Q^k_0 справа на матрицу отражения [7]

$$V = E - \frac{2}{\rho}(f - \alpha v)'(f - \alpha v), \tag{28}$$

где f - вычеркиваемая строка, v = (0,...,0,I,0,...,0), $\alpha = \pm\|f\|$, $\rho = (f - \alpha v)(f - \alpha v)'$.

Так как в матрице $\bar{Q}^k_\beta$ вычеркнули нулевую строку, в этом случае в матрице $\bar{H}$ надо вычеркнуть соответствующий столбец, тогда в матрице $\hat{H}$ вычеркивается также соответствующий столбец h. В полученной матрице $\hat{H}$ ортогональность строк нарушается и при этом выполняется следующее равенство $\hat{H}\hat{H}' = E - hh'$. Чтобы сделать строки матрицы $\hat{H}$ ортогональными, необходимо представить матрицу $E - hh'$ в виде

$$E - hh' = UU', \tag{29}$$

где U - верхняя треугольная матрица. Тогда матрица $U^{-1}\hat{H}$ будет иметь ортогональные строки, так как $U^{-1}\hat{H}\hat{H}'(U^{-1})' = E$. В разложении $\bar{H} = PUU^{-1}\hat{H}$ матрица $\tilde{P} = P \cdot U$ будет верхней треугольной.

Матрицу U в представлении (29) можно найти, воспользовавшись приемом, аналогичным предложенному в работе [8]. Пусть

$$E - hh' = (E + \sigma hh')(E + \sigma hh'),$$

где $\sigma = -1/(1 + \sqrt{1 - h'h})$. Такое представление допустимо, так как матрица $E - hh' = P^{-1}\bar{H}\bar{H}'(P^{-1})'$ положительно определена, и поэтому $1 - hh' \geqslant 0$. Тогда искомая верхняя треугольная матрица U будет иметь вид $U = (E + \sigma hh')V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_{q-1}$, где V_i, $i = \overline{1, q-1}$, - матрицы преобразований отражения (28), q - размерность матрицы U. Так, для матрицы V_1 строка f

равна последней строке матрицы $(E+\sigma h h')$, а $v=(0,\dots,0,1)$. В матрице отражения V_2 в качестве f выбираем предпоследнюю строку матрицы $(E+\sigma h h')V_1$, а в качестве v - строку $(0,\dots,0,1,0)$. Матрицы $V_3, \dots, V_{q-1}$ строятся аналогично.

Чтобы вычеркнуть в матрице H_0 соответствующий столбец h_0 и некоторую строку, сохранив при этом ортогональность строк H_0 к строкам H, проводим преобразования, аналогичные преобразованиям в Q_0^k. А именно, умножаем матрицу H_0 слева на матрицу отражения V, определенную по формуле (28), с $f=h_0'$ и $v=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, где единица стоит на месте вычеркиваемой в матрице H_0 строки.

СЛУЧАЙ 2. В матрице Q_β^k добавляется новый столбец. Этот столбец приписывается к матрице $\bar{Q}_\beta^k$ в качестве последнего, а в матрице Q_0^k вычеркивается столбец с максимальным по модулю коэффициентом разложения нового столбца по столбцам матрицы $[Q_0^k\ \hat{Q}_\beta^k]$. При этом новая ортогональная матрица $[Q_0^k\ \hat{Q}_\beta^k]_H$ и новая треугольная матрица пересчитываются с помощью приема, предложенного В.А.Булавским [9,10]. В матрице $\bar{H}$ никаких изменений не происходит.

Если новый столбец имеет ненулевую компоненту, номер которой совпадает с вычеркнутой в матрице Q_β^k нулевой строкой, то в матрице $\bar{Q}_\beta^k$ добавляется эта нулевая строка. В этом случае необходим другой подход для пересчета новой ортогональной матрицы $[Q_0^k\ \hat{Q}_\beta^k]_H$. Пусть новый добавляемый к матрице $\bar{Q}_\beta^k$ столбец $q_H=(q,a)$, где вектор q совпадает по размерности со столбцами старой матрицы $\bar{Q}_\beta^k$. Имея разложение q по старому базису $[Q_0^k\ \hat{Q}_\beta^k]$

$$q=\alpha_1 q_1^0+\dots+\alpha_{\gamma_1} q_{\gamma_1}^0+\lambda_1 q_1+\dots+\lambda_{\gamma_2} q_{\gamma_2}=Q_0^k\cdot\alpha+\hat{Q}_\beta^k\cdot\lambda,$$

можем добавить к старой матрице $\hat{Q}_\beta^k$ ортогональный столбец $\hat{q}=\alpha_1 q_1^0+\dots+\alpha_{\gamma_1} q_{\gamma_1}^0=Q_0^k\cdot\alpha$. Приписывая к матрице $[\hat{Q}_\beta^k\ \hat{q}]$ в соответствующей позиции строку $(0,\dots,0,a)$, а к треугольной матрице R^k - последний столбец $(\lambda_1,\dots,\lambda_{\gamma_2},1)$, получим новое разложение матрицы $\bar{Q}_\beta^k$. Теперь надо приписать к матрице Q_0^k в соответствующей позиции такую строку $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{\gamma_1})$, чтобы сделать столбцы $\tilde{Q}_0^k$ ортогональными новому столбцу $\hat{q}$. Ортогональность же столбцов Q_0^k старым столбцам $\hat{Q}_\beta^k$ сохранится в силу того, что столбцы $\hat{Q}^k_\beta$ имеют нулевые компоненты, номер которых совпадает с номером строки ξ в Q^k_o. Очевидно, что $\xi_i = -\alpha_i / a$, $i = 1, \mathcal{I}_1$. Но при этом нарушается ортогональность столбцов матрицы $\tilde{Q}^k_o$ между собой и выполняется равенство

$$\tilde{Q}^{k'}_o \tilde{Q}^{k'}_o = Q^{k'}_o Q^{k'}_o + \xi' \xi = E + \xi' \xi .$$

Чтобы сделать столбцы матрицы $\tilde{Q}^k_o$ ортогональными, необходимо так же, как в рассмотренном выше случае с матрицей H, найти верхнюю треугольную матрицу U в представлении $E + \xi' \xi = U U'$. Тогда матрица $\tilde{Q}^k_o (U^{-1})'$ будет иметь ортогональные столбцы.

Так как в рассматренном случае в матрице $\bar{Q}^k_\beta$ добавляется строка, то в матрице $\bar{H}$ необходимо добавить соответствующий столбец h. Для этого изменяем матрицы $\begin{bmatrix} H_o \\ \bar{H} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix}$ и P следующим образом. Вписываем в матрицы $\begin{bmatrix} H_o \\ H \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix}$ нулевой столбец на место добавляемого нового столбца в $\bar{H}$, а в качестве первого столбца приписываем к этим матрицам соответствующую линейно-независимую единичную строку. Размерность треугольной матрицы также увеличивается на единицу добавлением строки (1,0,...,0) в качестве первой. Таким образом, разложение $\tilde{H} = \begin{bmatrix} H_o \\ H \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix}$ сохраняется.

Теперь можно сформулировать следующую задачу. Найти разложение матрицы $H + \tau e'$ в произведение верхней треугольной и ортогональной, где e - единичный столбец, а вектор τ равен разности между новым добавляемым столбцом $(0, h)$ и единичным столбцом (1,0,...,0). Пусть $\tilde{H} + \tau e' = P_H \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix}_H$. Тогда

$$P_H \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix} + \tau e' = \left(P + \tau e' \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix}' \right) \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix} .$$

Так как $e' \begin{bmatrix} H_o \\ \hat{H} \end{bmatrix}' = (1, 0, \ldots, 0)$, то матрица $(P + \tau (1, 0, \ldots, 0))$ отличается от верхней треугольной первым столбцом, в котором ниже диагонали ненулевые элементы находятся в строках, начиная с $\mu + 1$, где μ - число строк в матрице H_o. Умножая справа матрицу $[P + u(1, 0, \ldots, 0)]$ на элементарные матрицы вращений, имеющие вид (27), $T_{1\nu}, T_{1\nu-1}, \ldots, T_{1\mu}$, где ν - размерность матрицы P, приводим матрицу к верхнему треугольному виду. Соответствующая ортогональная матрица:

$$\begin{bmatrix} H_0 \\ A \end{bmatrix}_H = T'_{1\mu}\, T'_{1\mu+1} \cdots T'_{1\nu} \begin{bmatrix} H_0 \\ A \end{bmatrix}.$$

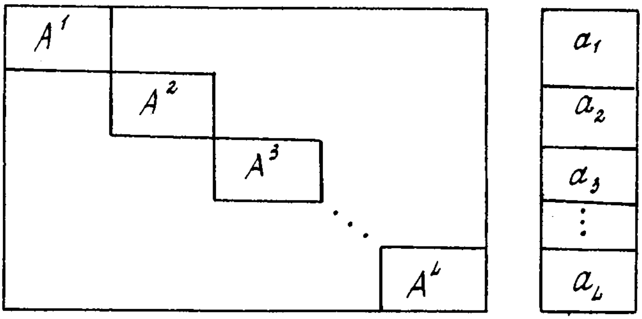
СЛУЧАЙ 3. Один из столбцов в матрице $\bar{Q}^k_\beta$ заменяется на новый. Этот случай является объединением I и 2.

Необходимо заметить, что во всех ситуациях, где возникает в этом необходимость, следует проводить нормирование изменяемых строк и столбцов в формируемых ортогональных матрицах.

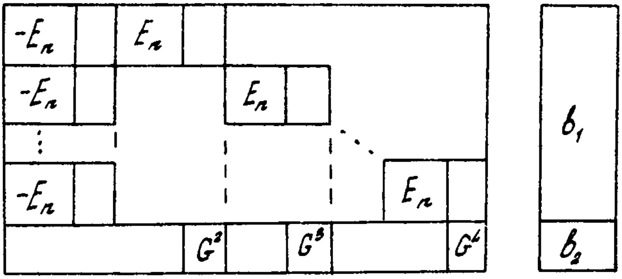
В общем случае в рассмотренном методе решения координирующей задачи будем иметь гарантированный выигрыш в размерности обратной матрицы, когда матрица общих ограничений блочной задачи $[B_1, \ldots, B_L]$ близка к квадратной. В задачах большой размерности в этом случае нахождение обратной матрицы к W_β может стать вообще невозможным из-за недостатка оперативной памяти, тогда как для нахождения обратной матрицы к $Q'_0 H'_0$ необходим меньший объем памяти.

Особенно заметный выигрыш предложенный метод дает в случае, когда часть (еще лучше, когда все) общих ограничений блочной задачи представлены в виде равенств или когда есть возможность выразить орты матрицы W через блоки $B_1, \ldots, B_L$. Тогда в матрице H значительно уменьшается число столбцов за счет частичного (или полного) отсутствия столбцов $(L+1)$ -го блока $B_{L+1} = E_m$. Это приводит к равнозначному уменьшению числа строк в матрице H_0, а значит, и к такому же уменьшению размерности обращаемой матрицы $Q'_0 H'_0$.

В качестве примера рассмотрим класс экономических задач, в которых структура матрицы общих ограничений позволяет избавиться от $(L+1)$-го блока в матрице H. Ограничения предлагаемой вниманию задачи перспективного отраслевого планирования имеют следующую структуру:



(27)

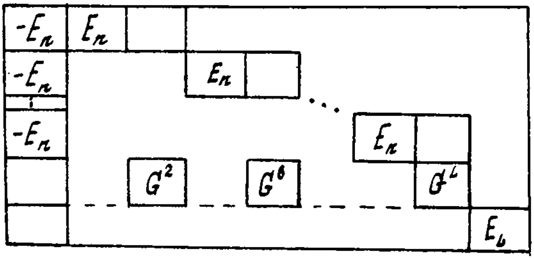


(28)

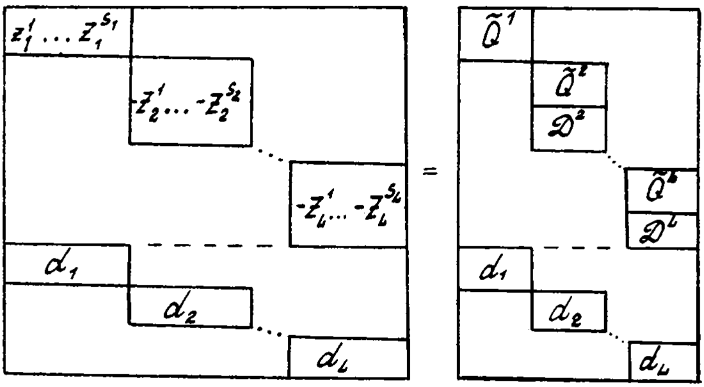
Здесь A^l – варианты модели отраслевого планирования, размерности блоков связаны так, что $n_1 = n_2 - t = \ldots = n_L - t$, где t – размерность квадратных матриц G^l, $l = \overline{2, L}$, a_l – соответствующие вариантам ресурсы и задания на производство продукции, E_n – единичная матрица, соответствующая по размерности вектору переменных z_1 первого блока A^1, G^l – скалярные матрицы вида $G^l = g_l \cdot E_t$, где E_t – единичная матрица размерности t.

В силу специфики общих ограничений (28) матрицы H и Q имеют вид

$H =$

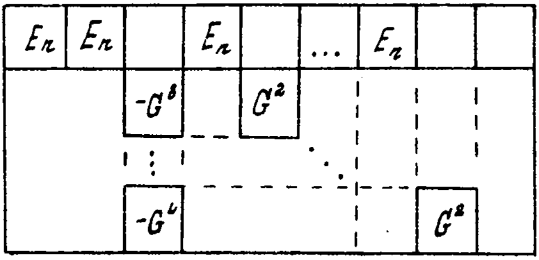


$Q =$



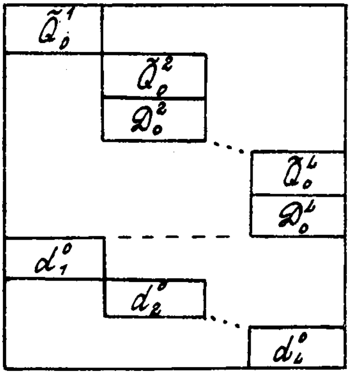
Матрицу H_0 , строки которой ортогональны строкам H , легко можно найти:

$H_0 =$



Матрицу Q_0 рассмотрим в виде

$Q_0 =$



Тогда, даже если не вычеркивать нулевые строки в Q_β , размерность матрицы

$$Q_0' \cdot H_0' = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_0^{1'} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{Q}_0^{2'} & -g_2 D_0^{2'} & \dots & -g_L D_0^{2'} \\ \tilde{Q}_0^{3'} & g_3 D_0^{3'} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{Q}_0^{L'} & 0 & \dots & g_2 D_0^{L'} \end{bmatrix}$$

значительно меньше размерности базисной матрицы W_β . В реальных отраслевых задачах обычно t не превосходит $\frac{1}{10} n_1$, поэтому если, например, $L = 12$, то размерность базисной матрицы W_β превосходит $11 n_1$, тогда как размерность матрицы $Q_0' H_0'$ равна $2n_1$. Если же условиться вычеркивать нулевые строки в Q_β во всех блоках, за исключением блока $\mathcal{D}_0^2$ (в этом случае сохраняется ортогональность строк матрицы H_0 строкам матрицы $\bar{H}$), то в квадратной матрице $Q_0' \cdot H_0'^{\,0}$ будут вычеркиваться столбцы и строки, соответствующие в пересечении в блоках Q_0^ℓ, $\ell=\overline{1,L}$, $\mathcal{D}_0^\ell$, $\ell=\overline{3,L}$, вычеркиваемым строкам и столбцам в блоках матрицы Q_0.

Автор выражает благодарность В.А.Булавскому за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. КУЛИНИЧ А.В. Специализированный алгоритм декомпозиции для одной задачи отраслевого планирования. - Оптимизация, 1986, вып.37(54), с.74-84.
2. ДАНЦИГ Дж.Б., ВУЛФ А. Алгоритм разложения для задач линейного программирования. - Математика, 1964, т.8, № 1, с.151-160.
3. ДАНЦИГ Дж.Б. Линейное программирование, его обобщения и применения. - М.: Прогресс, 1966.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд-во АН СССР, 1959.
5. ЮДИН Д.Б., ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Линейное программирование. - М.: Физматгиз, 1959.
6. ФАДДЕЕВ Д.К., ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, 1960.
7. ВОЕВОДИН В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. - М.: Наука, 1966.
8. GILL P.E., GOLUB G.H., MURRAY W., SAUNDERS M. Methods for modifying matrix factorizations. - Math. Comput., 1974, v.28, N 126, p.505-535.
9. БУЛАВСКИЙ В.А. О разложении квадратных матриц в произведение ортогональной и треугольной. - Сиб. мат. журн., 1969, т.10, № 2, с.472-474.
10. БУЛАВСКИЙ В.А. Метод ортогонализации в линейном программировании. - Оптимальное планирование, 1970, вып.15, с. 7-21.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.02.86 г.