Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 513.88+517.11

НЕСТАНДАРТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТРИЗУЕМОГО ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА С ЗАМКНУТОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.В.Шапкин

Средствами нестандартного анализа покажем, что метризуемый выпуклый компакт с замкнутой экстремальной границей в локально-выпуклом пространстве инфинитезимально близок к нестандартному многоульнику с вершинами на экстремальной границе компакта.

В нестандартном анализе рассматриваются две структуры: стандартный универсум $\mathcal{U}$ со стандартными индивидами S и нестандартный универсум $^*\mathcal{U}$ с индивидами W, которые определяются специальным построением [1].

В универсуме $\mathcal{U}$ для любого множества X пишем

$$\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \leq X\}$$

($\leq$ - операция включения множества $Y \in \mathcal{U}$ в множество X, знак $:=$ читается "присвоить"). $\mathcal{P}(X)$ называется множеством-степенью X. Для любых объектов x, y универсума $\mathcal{U}$ пишем

$$<x,y> := \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

(фигурные скобки используются в универсуме $\mathcal{U}$ для записи конкретных множеств универсума). $<x,y>$ называется упорядоченной парой объектов x и y.

Пусть X, Y - множества универсума $\mathcal{U}$. Тогда $X \times Y$ есть обозначение для $\{<x,y> : x : X, y \in Y\}$ ($x \in X$ читается " x элемент X ").

Если множество Z универсума $\mathcal{U}$ содержится в $X \times Y$, то Z называется отношением между X и Y. Область определения Z

обозначается $dom(\mathcal{Z})$ и определяется следующим образом: $dom(\mathcal{Z}) := \{x \in X$: существует элемент y из Y такой, что $\langle x, y \rangle \in \mathcal{Z}\}$. Область значения отношений $\mathcal{Z}$ обозначается $im(\mathcal{Z})$ и определяется следующим образом: $im(\mathcal{Z}) := \{y \in Y$: существует элемент x из X такой, что $\langle x, y \rangle \in \mathcal{Z}\}$.

Если каждому элементу x из $dom(\mathcal{Z})$ отвечает единственный элемент y из $im(\mathcal{Z})$ при отношении $\mathcal{Z}$, то $\mathcal{Z}$ называется отображением с областью определения $dom(\mathcal{Z})$ и множеством значений $im(\mathcal{Z})$; при этом положим $\mathcal{Z} \upharpoonright x = y$.

Для того чтобы формулировать и доказывать утверждения об объектах универсумов $\mathcal{U}$ и ${}^*\mathcal{U}$, имеются языки $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$. Языки $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$ содержат символы $\exists = \in \neg \wedge (\,) < > \upharpoonright, \cdot$, с помощью которых из переменных и констант языков по рекурсии выстраиваются формулы, высказывания языков $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$ [I]. Используя сокращения, вводим некоторые основные логические операции языков $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$. Пусть λ, μ – произвольные формулы языка $\mathcal{L}\,({}^*\mathcal{L})$ и пусть x – переменная языка $\mathcal{L}\,({}^*\mathcal{L})$. Тогда

$$(\lambda \vee \mu) := \neg(\neg\lambda \wedge \neg\mu);$$

$$(\lambda \to \mu) := \neg(\lambda \wedge \neg\mu);$$

$$(\lambda \leftrightarrow \mu) := ((\lambda \to \mu) \wedge (\mu \to \lambda));$$

$$(\forall x \in \lambda)\mu := \neg(\exists x \in \lambda)\neg\mu.$$

Между языками $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$ определено отображение $*$ [I]. Поясним на примере действие отображения $*$. Пусть $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – совокупность натуральных чисел – содержится во множестве стандартных индивидов S и пусть высказывание λ языка $\mathcal{L}$ определяется следующим образом:

$$(\forall x \in N)(\forall y \in N)(x = y) \vee \neg(x = y).$$

Тогда высказывание ${}^*\lambda$ из ${}^*\mathcal{L}$ имеет вид:

$$(\forall x \in {}^*N)(\forall y \in {}^*N)(x = y) \vee \neg(x = y),$$

т.е. высказывание ${}^*\lambda$ получается из высказывания λ "навешиванием" над константами высказывания λ $*$.

Так как каждый элемент универсума и каждая операция над элементами универсума однозначно изображаются в языке, а различные утверждения об объектах универсума предстают в языке в виде высказываний истинных или ложных, то отображение $*$ между языками $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$ удобно мыслить как отображение между универсумами $\mathcal{U}$ и ${}^*\mathcal{U}$. "Решающим моментом в построении нестандартного универсума является тесная взаимосвязь семантик $\mathcal{L}$ и ${}^*\mathcal{L}$ относительно только что введенного отображения" [I], которая выражается в принципе переноса.

ПРИНЦИП ПЕРЕНОСА. Пусть λ - высказывание в $\mathcal{L}$. Тогда $* \models {}^*\lambda$ в том и только в том случае, когда $\models \lambda$, где $\models \lambda$ и $* \models {}^*\lambda$ означают соответственно " λ истинно в $\mathcal{L}$ " и "${}^*\lambda$ истинно в ${}^*\mathcal{L}$ ".

Отметим, что в дальнейшем, пользуясь принципом переноса, будем опускать знаки $\models$ и $* \models$, предполагая, что истинность употребляемых высказываний несомненно следует из контекста.

Важным инструментом нестандартного анализа является теорема направленности. Она обеспечивает что-то вроде универсальной компактификации.

Отношение $\mathcal{Z}$ в $\mathcal{U}$ называется направленным относительно $\mathcal{U}$, если $\mathcal{Z} \in \mathcal{U}$, и для $x_1,\dots,x_n$ (n - натуральное число) из области определения отношения $\mathcal{Z}$ найдется такой элемент y, что $\langle x_i, y \rangle \in \mathcal{Z}$ при $i \in \{1,\dots,m\}$.

ТЕОРЕМА НАПРАВЛЕННОСТИ. Пусть отношение $\mathcal{Z}$ направлено относительно $\mathcal{U}$. Тогда существует такой элемент $y \in {}^*\mathcal{U}$, что $\langle {}^*x, y \rangle \in {}^*\mathcal{Z}$ для всех x из области определения отношения $\mathcal{Z}$.

Отметим, что при отображении $*$ стандартный универсум $\mathcal{U}$ погружается в нестандартный универсум ${}^*\mathcal{U}$, а именно,

$$\{ {}^*x : x \in \mathcal{U} \} \subseteq {}^*\mathcal{U}.$$

При этом элементы ${}^*\mathcal{U}$ вида ${}^*x$, где $x \in \mathcal{U}$, называются стандартными, остальные называются нестандартными.

I. В дальнейшем используются следующие обозначения:

E - локально-выпуклое пространство;

τ - локально-выпуклая топология на E;

E' - совокупность всех линейных непрерывных функционалов на E;

X - выпуклый компакт в E;

$C(X)$ - пространство непрерывных функций на X;

$\mathcal{B}$ - алгебра борелевских подмножеств X ;
$\mathfrak{M}_1^+(X)$ - совокупность всех вероятностных мер на X ;
N - множество $\{1,2,3,\ldots\}$ натуральных чисел;
R^+ - множество неотрицательных вещественных чисел;
$seg_R(z,y):=\{\alpha z+\beta y : \alpha,\beta\in(0,1)\subseteq R^+,\ \alpha+\beta=1\}$
- отрезок, соединяющий точки z и y из E ;
$ex_R\text{-}X:=\{e\in X:(\forall z\in X)(\forall y\in X)e\in seg_R(z,y)\to$
$\to e=z=y\}$ - экстремальная граница X .

Мера $\mu\in\mathfrak{M}_1^+(X)$ сосредоточена на борелевском множестве $A\subseteq X$, если $(\forall B\in\mathcal{B})\,B\cap A=\varnothing\to\mu(B)=0$, при этом $A:=supp\,\mu$ - носитель меры μ . Мера $\mu\in\mathfrak{M}_1^+(X)$ называется представляющей мерой для точки x из X , если

$$(\forall f\in E')f(x)=\mu(f).$$

Пусть $E\subseteq S$, при этом предполагается, что поле вещественных чисел R , над которым рассматривается E , также содержится в S . Тогда для каждой точки x из E $\tau(x)$ - фильтр окрестностей x относительно τ ; $monad_\tau(x):=\bigcap\{{}^*U : U\in\tau(x)\}$ называется монадой точки x из E относительно топологии τ . Так как τ - хаусдорфова топология, то

$$(\forall x,y\in E)\,x\neq y\to monad_\tau(x)\cap monad_\tau(y)=\varnothing.$$

Вместо $y\in monad_\tau(x)$ будем писать $y\approx x$ и называть y инфинитезимально близким к x. Если X - выпуклое компактное множество в (E,τ) , то X можно рассматривать как компактное топологическое пространство в индуцированной топологии. Каждая точка y из ${}^*X$ околостандартна [I], т.е. существует x из X , так что $y\approx x$. При этом точку x называют стандартной частью y и используют обозначение $x:={}^\circ y$.

2. Рассмотрим локально-выпуклое пространство E над полем вещественных чисел R , и пусть $R,E\subseteq S$, а X - метризуемый выпуклый компакт с замкнутой экстремальной границей в E .

Пусть $\mathcal{R}$ - совокупность всех конечных дизъюнктных разложений компакта X , т.е. для всех x из $\mathcal{R}$ имеем

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}x(i),$$

где $x=\{x(1),\ldots,x(n)\}(n\in N)$; $x(i)\cap x(j)=\varnothing$ при $i\neq j$; $x(i)\in\mathcal{B}$ для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Для произвольных $x=\{x(1),\dots,x(n)\}$ и $y=\{y(1),\dots,y(m)\}$ из $\mathcal{R}$ рассмотрим отношение

$$x \prec y \leftrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\})(\exists j \in \{1,\dots,m\})\, x(i) \le y(j).$$

Пусть $\mathcal{V}=\{\langle x,y\rangle / x\in\mathcal{R},\ y\in\mathcal{R},\ y\prec x\}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{V}$ – направленное отношение, поэтому по теореме направленности существует такое множество $\mathcal{D}\in{}^*\mathcal{U}$, что для любого $A\in\mathcal{R}$ имеет место $\langle {}^*A,\mathcal{D}\rangle\in{}^*\mathcal{V}$.

Далее, имеем

$(x\in\mathcal{R})\leftrightarrow(\exists n\in N)$ (x – отображение из $\{j\in N: j\le n\}$ в $\mathcal{B}$) $\wedge$ (X – образ $\{j\in N: j\le n\}$ при отображении x) $\wedge$ (значения отображения x в различных точках множества $\{j\in N: j\le n\}$ дизъюнктны между собой).

Для того чтобы к этой эквивалентности можно было применить принцип переноса, необходимо все ее фрагменты выразить средствами языка $\mathcal{L}$ стандартного универсума $\mathcal{U}$. Дешифровка последней эквивалентности в языке $\mathcal{L}$ дает нам следующие эквивалентности:

(x – отображение из $\{j\in N: j\le n\}$ в $\mathcal{B}$) $\leftrightarrow$
$\leftrightarrow(\forall j\in N)\, j\le n \longrightarrow (\exists!\, B\in\mathcal{B})\langle j,B\rangle\in x$

(значения отображения x в различных точках множества $\{j\in N: j\le n\}$ дизъюнктны между собой)
$\leftrightarrow(\forall j\in N)(\forall i\in N)(j\le n)\wedge(i\le n)\wedge(i\ne j)\longrightarrow$
$\longrightarrow((\exists!\, B\in\mathcal{B})\langle j,B\rangle\in x \wedge (\exists!\, A\in\mathcal{B})\langle i,A\rangle\in x) A\cap$
$\cap B=\varnothing$

(отметим, что $\exists!$ читается "существует единственное");

(X – образ $\{j\in N: j\le n\}$ при отображении x) $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow((\forall y\in X)(\exists j\in N)\, j\le n \wedge (\exists!\, B\in\mathcal{B})\langle j,B\rangle\in$

$\in x\wedge y\in B)\wedge((\forall_i\in N)\, i\le n\longrightarrow(\exists!\, A\in\mathcal{B})\langle i,A\rangle\in$
$\in x\wedge A\subseteq X)$.

Теперь уже можно применить принцип переноса. В результате его применения получим:

$(x\in{}^*\mathcal{R})\leftrightarrow(\exists n\in{}^*N)(\forall j\in{}^*N)\, j\le n\longrightarrow$
$\longrightarrow(\exists!\, B\in{}^*\mathcal{B})\langle j,B\rangle\in x\wedge$

$$\wedge (\forall j \in {}^*N)(\forall i \in {}^*N)(j \le n) \wedge (i \le n) \wedge (i \ne j) \to$$

$$\to ((\exists! B \in {}^*\mathcal{B}) \langle j, B\rangle \in x \wedge (\exists! A \in {}^*\mathcal{B}) \langle i, A\rangle \in$$

$$\in x) A \cap B = \emptyset \wedge$$

$$\wedge ((\forall y \in {}^*X)(\exists j \in {}^*N) j \le n \wedge (\exists! B \in {}^*\mathcal{B}) \langle j, B\rangle \in$$

$$\in x \wedge y \in B) \wedge$$

$$\wedge ((\forall i \in {}^*N) i \le n \to (\exists! A \in {}^*\mathcal{B}) \langle i, A\rangle \in$$

$$\in x \wedge A \subseteq {}^*X .$$

Последнее означает, что

$$(\forall x \in {}^*\mathcal{R})(\exists n \in {}^*N)\, {}^*X = \bigcup \{x(j) : j \in {}^*N \wedge$$

$$\wedge j \le n\} \wedge (\forall j \in {}^*N)(\forall i \in {}^*N)(j \le n) \wedge$$

$$\wedge (i \le n) \wedge (i \ne j) \to x(i) \cap x(j) = \emptyset,$$

где $x(j)$ обозначает образ j при отображении x для каждого $j \in {}^*N$ и $j \le n$ ($n \in {}^*N$). Отношение τ символически определяется следующим образом:

$$(\forall x \in \mathcal{R})(\forall y \in \mathcal{R})(\langle x, y\rangle \in \tau \longleftrightarrow y \prec x),$$

поэтому, применяя принцип переноса, получим,

$$(\forall x \in {}^*\mathcal{R})(\forall y \in {}^*\mathcal{R})(\langle x, y\rangle \in {}^*\tau \longleftrightarrow y \prec x).$$

Следовательно, имеет место следующее представление:

$${}^*X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{D}(i),$$

где $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}(1), \ldots, \mathcal{D}(n)\}$, $n \in {}^*N$; $\mathcal{D}(i) \in {}^*\mathcal{B}$ при всех $i \in \{j \in {}^*N : j \le n\}$; $\mathcal{D}(i) \cap \mathcal{D}(j) = \emptyset$ при $i \ne j$; $\mathcal{D} \prec {}^*x$ для всех $x \in \mathcal{R}$.

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для произвольной вероятностной меры $\mu \in \mathcal{M}_1^+(X)$ и произвольной непрерывной функции f на X имеет место соотношение:

$$\mu(f)=\int_X f d\mu = {}^{\circ}\left(\sum_{i=1}^{n} {}^{*}f(d_i)\, {}^{*}\mu(\mathcal{D}(i))\right), \qquad (1)$$

где $d_i \in \mathcal{D}(i)$ для всех $i \in \{j \in {}^{*}N : j \le n\}$ $(n \in {}^{*}N)$, ${}^{*}f(x) \approx {}^{*}f(y)$ для всех x, y из $\mathcal{D}(i)$, когда $i \in \{j \in {}^{*}N : j \le n\}$.

Функция ${}^{*}f$ действует из ${}^{*}X$ в ${}^{*}R$ и ${}^{*}f|_X = f$, а ${}^{*}\mu$ действует из ${}^{*}\mathcal{B}$ в ${}^{*}R^{+}$. Суммирование в правой части (1) производится в ${}^{*}R$ и является конечным суммированием в нестандартном смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X - метризуемый выпуклый компакт с замкнутой экстремальной границей в локально-выпуклом пространстве E. Тогда для каждой точки x из X эквивалентны следующие утверждения:

(1) существует мера $\mu \in \mathcal{M}_1^{+}(X)$, представляющая точку x и сосредоточенная на экстремальной границе X;

(2) точка x допускает представление вида

$$x = {}^{\circ}\left(\sum_{i=1}^{n_2} \mu_i e_i\right), \qquad (2)$$

где $\{\mu_i : i \in {}^{*}N,\ i \le n_2\} \subseteq {}^{*}[0,1]$, $\sum_{i=1}^{n_2} \mu_i = 1$, $n_2 \in {}^{*}N$, $\{e_i : i \in {}^{*}N,\ i \le n_2\} \subseteq ex_R - X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ◁ (1)→(2). ◁ Предположим, что для точки x из X существует представляющая мера $\mu \in \mathcal{M}_1^{+}(X)$, сосредоточенная на экстремальной границе компакта X, т.е.

$$(\forall f \in E')\, f(x) = \mu(f) \wedge supp \subseteq ex_R - X.$$

Применяя принцип переноса, получим

$$(\forall f \in {}^{*}E')\, f(x) = {}^{*}\mu(f) \wedge supp\, {}^{*}\mu \subseteq {}^{*}(ex_R - X).$$

(Отметим, что мы применяем здесь принцип переноса для высказывания языка $\mathcal{L}$, которое содержит сокращение $supp\,\mu \subseteq ex_R - X$.)

Рассмотрим все те множества из $\{\mathcal{D}(1), \ldots, \mathcal{D}(n)\}$ которые пересекаются с ${}^{*}(ex_R - X)$. В результате получим набор множеств $\{\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_{n_1}\}(n_1\in{}^*N)$, содержащийся в ${}^*\mathcal{B}$ и такой, что

(I) ${}^*(ex_R - X) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \mathcal{D}_i$;

(2) $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ для всех $i,j\in\{1,\dots,n_1\}$ и $i\neq j$;

(3) для каждого i из $\{1,\dots,n_1\}$ существует j из $\{1,\dots,n\}$ такой, что

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(j) \cap {}^*(ex_R - X).$$

Применяя принцип переноса к высказыванию

$$(\forall x\in\mathcal{R})(\exists n\in N)\,\mu(X) = \sum_{j=1}^{n} \mu(x\restriction j),$$

получим

$$(\forall x\in{}^*\mathcal{R})(\exists n\in{}^*N)\,{}^*\mu({}^*X) = \sum_{j=1}^{n} {}^*\mu(x\restriction j).$$

Принцип переноса нам также дает ${}^*\mu({}^*X) = 1$. В силу замкнутости $ex_R - X$ любая точка из ${}^*(ex_R - X)$ околостандартна.

Для меры μ справедливо представление (I), поэтому

$$(\forall f\in E')\,f(x) = \mu(f) = \int_X f\,d\mu = {}^\circ\Big(\sum_{i=1}^{n} {}^*\mu(\mathcal{D}(i))\,{}^*f(d_i)\Big) =$$
$$= {}^\circ\Big(\sum_{i=1}^{n_1} {}^*\mu(\mathcal{D}_i)\,{}^*f({}^\circ v_i)\Big),$$

где $v_i\in\mathcal{D}_i$ для всех $i\in\{1,\dots,n_1\}$.

Рассмотрим отношение $w\subseteq\{1,\dots,n_1\}\times\{1,\dots,n_1\}$, которое определяется следующим образом:

$$w(k) := \{l\in\{1,\dots,n_1\} : {}^\circ v_l = {}^\circ v_k\} \quad \forall k\in\{1,\dots,n_1\}.$$

w задает отношение эквивалентности на $\{1,\dots,n_1\}$; $\{1,\dots,n_1\}/w$ - совокупность различных классов эквивалентности на $\{1,\dots,n_1\}$. Пусть их количество равно n_2 ($n_2\in{}^*N$, $n_2\leq n_1$), т.е. существует n_2 номеров $\{k_1,\dots,k_{n_2}\}\subseteq\{1,\dots,n_1\}$, не эквивалентных между собой.

Следовательно,

$$(\forall f\in E')\,f(x) = {}^\circ\Big(\sum_{i=1}^{n_1} {}^*\mu(\mathcal{D}_i)\,{}^*f(v_i)\Big) =$$

$$= {}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\Big(\sum_{l\in w(k_i)} {}^{*}\mu(\mathcal{D}_l)\,{}^{*}f({}^{\circ}v_l)\Big)\Big) =$$

$$= {}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\Big(\sum_{l\in w(k_i)} {}^{*}\mu(\mathcal{D}_l)\Big){}^{*}f({}^{\circ}v_{k_i})\Big) = {}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i f(e_i)\Big),$$

где $\mu_i := \sum_{l\in w(k_i)} {}^{*}\mu(\mathcal{D}_l)$, $e_i := {}^{\circ}v_{k_i}$ для всех $i \in \{1,\dots,n_2\}$, т.е. для точки x из X получено требуемое представление (2). $\triangleright$

(2) $\to$ (I). $\triangleleft$ Пусть для точки x из X имеет место представление (2). Рассмотрим функционал $F: C(X)\to R$, который определяется следующим образом

$$(\forall f\in C(X))\; F(f) := {}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i\,\varepsilon_{e_i}(f)\Big).$$

Этот функционал F аддитивен и положителен на положительных непрерывных функциях на компакте X. Поэтому функционал F непрерывен, а значит, по теореме Рисса [2] существует неотрицательная регулярная борелевская мера μ на X такая, что

$$(\forall f\in C(X))\; F(f) = \mu(f).$$

Нетрудно видеть, что $\mu(\mathbb{1}) = 1$ ($\mathbb{1}$ - тождественно равная единице функция на X). Покажем, что мера $\mu\in\mathfrak{M}_1^{+}(X)$ является представляющей для точки x из X.

Действительно, имеем

$$(\forall f\in E')\; f(x) = f\Big({}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i e_i\Big)\Big) = {}^{*}f\Big({}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i e_i\Big)\Big) =$$

$$= {}^{\circ}\Big({}^{*}f\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i e_i\Big)\Big) = {}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i\,{}^{*}f(e_i)\Big) = {}^{\circ}\Big(\sum_{i=1}^{n_2}\mu_i f(e_i)\Big) =$$

$$= F(f) = \mu(f).$$

Покажем, что мера μ сосредоточена на экстремальной границе X. Метризуемый компакт X будем рассматривать как метризуемое компактное топологическое пространство в индуцированной топологии. Тогда $X \setminus ex_R - X$ – открытое подмножество X и, значит, для полунепрерывной снизу на X функции $\chi_{X\setminus ex_R - X}$ ($\chi_{X\setminus ex_R - X}$ – характеристическая функция множества $X \setminus ex_R - X$) существует монотонно возрастающая последовательность $\{f_n\}_{n\in N}$ непрерывных на X функций такая, что [3]:

$$(\forall x \in X) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{X\setminus ex_R - X}(x).$$

По теореме Лебега [4] о предельном переходе под знаком интеграла получим

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(\chi_{X\setminus ex_R - X}).$$

Отметим, что

$$(\forall n \in N)(\forall x \in X) f_n(x) \leq \chi_{X\setminus ex_R - X}(x).$$

Далее,

$$(\forall \varepsilon \in R^+)(\exists n_0 \in N)(\forall n \in N) n \geq n_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu(\chi_{X\setminus ex_R - X}) - \mu(f_n) < \varepsilon,$$

$$(\forall n \in N) \mu(f_n) = {}^{o}\left(\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \mu_i f_n(e_i)\right) \leq$$

$$\leq {}^{o}\left(\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \mu_i \chi_{X\setminus ex_R - X}(e_i)\right) = 0,$$

т.е. $(\forall n \in N) \mu(f_n) \leq 0$, поэтому $(\forall \varepsilon \in R^+) \mu(\chi_{X\setminus ex_R - X}) < \varepsilon$. Следовательно, $\mu(\chi_{X\setminus ex_R - X}) = 0$, т.е. мера μ сосредоточена на $ex_R - X$. $\triangleright\triangleright$

ЛИТЕРАТУРА

1. ДЕВИС М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980.
2. ФЕЛПС Р. Лекции о теоремах Шоке. –М.: Мир, 1968.

3. БУРБАКИ Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. - М.: Наука, 1975.
4. КОЛМОГОРОВ А.Н., ФОМИН С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
21.10.1985 г.