Выпуск 39(56) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

# ДВА КРИТЕРИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

И.П.Глазырина

В работе обсуждаются приложения теоремы об интегральном представлении элементов субдифференциала сублинейного оператора из [1] к векторным задачам оптимизации. Терминология полностью соответствует монографиям [2,3]. Введем некоторые обозначения.

Всюду в этой работе $X$ - векторное пространство, $Y$ и $E$ - $K$-пространства с единицей, $\mathcal{B}$ - булева алгебра компонент для $Y$. Если $\mathfrak{A}$ - некоторое множество, то символом $l^\infty(\mathfrak{A},Y)$ будем обозначать множество ограниченных функций на $\mathfrak{A}$ со значениями в $Y$; ограниченность функции $f:\mathfrak{A}\to Y$ означает, что существуют такие элементы $y_1, y_2 \in Y$, что $\forall t\in\mathfrak{A}$, $y_1 \leq f(t) \leq y_2$. Отображение $\mu:\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}\to Y$ называется экстенсиональной мерой, если

(1) $\mu(b\pi) = b\mu(\pi)$ для всех $b\in\mathcal{B}$, $\pi\in\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}$;

(2) $\mu(\pi_1+\pi_2) = \mu(\pi_1)+\mu(\pi_2)$ для дизъюнктных элементов $\pi_1$, $\pi_2$.

В [1] предложена конструкция интеграла по экстенсиональной мере, описанная также в [3]. Каноническим сублинейным оператором в $l^\infty(\mathfrak{A},Y)$ называется отображение $\varepsilon_{\mathfrak{A}}: l^\infty(\mathfrak{A},Y)\to Y$, определенное равенством

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}}(f) = \sup\{f(t),\ t\in\mathfrak{A}\}$$

(см.[2]). Нам потребуется следующая теорема об интегральном представлении элементов субдифференциала канонического оператора.

ТЕОРЕМА I. Для всякого элемента $\mathcal{A}\in\partial\mathcal{E}_{\alpha}$ существует экстенсиональная мера $\mu:\beta^{\alpha}\to Y$, для которой

$$\mathcal{A}(f)=\int_{\alpha} f\,d\mu, \tag{I}$$

причем $\mu\geqslant \mathbb{O}$, $\mu(1)=1_Y$.

(Здесь $1_Y$ - единица в $K$-пространстве $Y$, $1\in\ell^{\infty}(\mathcal{C},Y)$- функция, тождественно равная $1_Y$ ).

Пусть $F:X\to Y$ - произвольное отображение, $\mathcal{C}\subset X$ - такое подмножество, что $F(\mathcal{C})$ ограничено в $Y$, $\omega:\mathcal{C}\to X$- тождественное вложение. Тогда $F\circ\omega:\mathcal{C}\to Y$- ограниченная на $\mathcal{C}$ функция, т.е. $F\circ\omega\in\ell^{\infty}(\mathcal{C},Y)$.

Экстенсиональную меру $\mu:\mathcal{B}^{\alpha}\to Y$, $\mu\geqslant 0$, $\mu(1)=1_Y$, будем называть минимизирующей для подмножества $\mathcal{C}\subset X$ и ограниченного на $\mathcal{C}$ оператора $F:X\to Y$, если

$$\int F\,d\mu:=\int_{\alpha}(F\circ\omega)\,d\mu=\inf\{F(t),\ t\in\mathcal{C}\}. \tag{2}$$

Важную роль в дальнейших приложениях будет играть следующие следствия теоремы [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F:X\to Y$, $\mathcal{C}$ - такое подмножество в $X$, что $F(\mathcal{C})$ ограничено в $Y$. Тогда для подмножества $\mathcal{C}\subset X$ и оператора $F$ существует минимизирующая экстенсиональная мера.

$\triangleright$Рассмотрим канонический сублинейный оператор $\mathcal{E}_{\alpha}$. Его субдифференциал, т.е. множество

$$\partial_{\varphi}(\mathcal{E}_{\alpha})=\{\mathcal{A}\in L(X,Y):\mathcal{A}f-\mathcal{A}\varphi\leqslant\mathcal{E}_{\alpha}(f)-\mathcal{E}_{\alpha}\varphi,\ f\in\ell^{\infty}(\mathcal{C},Y)\},$$

не пуст для всякого $\varphi\in\ell^{\infty}(\mathcal{C},Y)$. (Это одно из следствий теоремы Хана - Банаха - Канторовича, установленное в [2, 3].) Так как сужение $F\circ\omega\in\ell^{\infty}(\mathcal{C},Y)$, то существует линейный оператор $\mathcal{A}\in\partial_{-F\circ\omega}(\mathcal{E}_{\alpha})$. Это соотношение эквивалентно

$$\mathcal{A}\in\partial\mathcal{E}_{\alpha},\quad \mathcal{A}(-F\circ\omega)=\mathcal{E}_{\alpha}(-F\circ\omega)$$

(см.[2]), т.е.

$$\mathcal{A}f \leq \sup\{f(t),\ t\in\mathfrak{A}\} \quad (f\in\ell^{\infty}(\mathfrak{A},Y)); \tag{3}$$

$$\mathcal{A}(F\circ\omega) = -\sup\{-F(t),\ t\in\mathfrak{A}\} = \inf\{F(t),\ t\in\mathfrak{A}\}. \tag{4}$$

Согласно теореме I для $\mathcal{A}\in\partial\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}$ существует экстенсиональная мера $\mu:\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}\to Y$, удовлетворяющая условию (I), поэтому из (3) получаем равенство (2).◁

Пусть $X$ - векторное пространство, $Y$ и $E$ - некоторые $K$-пространства, $F:X\to Y$, $G:X\to E$ - выпуклые операторы. Рассмотрим векторную программу (векторную задачу оптимизации)

$$G(x)\leq 0,\quad F(x)\to\inf. \tag{P}$$

Оператор $F$ называется целью программы, оператор $G$ - ее ограничением, а элемент

$$e=\inf\{F(x): G(x)\leq 0\}\in Y$$

называется значением векторной программы (P). Множество

$$\mathcal{U}=\{x\in X;\ G(x)\leq 0\}$$

называется допустимым. Элемент $x^{*}\in\mathcal{U}$ называется оптимальным планом или решением программы (P), если $F(x^{*}) = \inf\{F(t),\ t\in\mathcal{U}\}$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{A}\subset\mathcal{U}$ - произвольное бесконечное подмножество. Следующие условия эквивалентны:

(I) $F\circ H\in\ell^{\infty}(\mathfrak{A},Y)$ для всякого $H\in\mathcal{U}^{\mathfrak{A}}$;

(2) множество $F(\mathcal{U})$ порядково ограничено в $Y$, т.е. существуют такие $y_1,y_2\in Y$, что $y_1\leq F(t)\leq y_2$ $\forall t\in\mathcal{U}$.

▷ Утверждение (2)⇒(I) очевидно. Докажем (I)⇒(2). Пусть множество $F(\mathcal{U})$ не ограничено. Тогда существуют последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F(\mathcal{U})$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathcal{U}$, $F(x_n)=y_n$, $(n=1,2,\ldots)$, $y_n\to\infty$. Выберем из множества $\mathfrak{A}$ последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ и зададим функцию $H:\mathfrak{A}\to\mathcal{U}$, например,

$$H(t)=\begin{cases} x_n, & \text{если } t=t_n\ (n=1,2,\ldots); \\ x_0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Ясно, что $F\circ H\notin\ell^{\infty}(\mathfrak{A},Y)$.◁

Если $\mathfrak{A}$ - конечное подмножество $\mathcal{U}$, то $F\circ H\in \ell^{\infty}(\mathfrak{A},Y)$ для всех $H\in \mathcal{U}^{\mathfrak{A}}$ в силу того, что $Y$ является $K$-пространством.

Напомним, что подмножество $\mathfrak{A}\subset\mathcal{U}$ называется обобщенным решением программы (P), если $\inf F(\mathfrak{A})=\inf F(\mathcal{U})$.

Справедлив следующий критерий обобщенного решения векторной программы (P).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathcal{U}$ - допустимое множество в векторной программе (P), $F(\mathcal{U})$ ограничено в $Y$. Подмножество $\mathfrak{A}\subset\mathcal{U}$ является обобщенным решением векторной программы (P) тогда и только тогда, когда его минимизирующая мера $\mu$ обладает свойством:*

$$\int_{\mathfrak{A}} F\,d\mu \le \int_{\mathfrak{A}} F\circ H\,d\mu \tag{M}$$

*для всех $H\in\mathcal{U}^{\mathfrak{A}}$.*

$\triangleright$ Если $\mathfrak{A}$ - обобщенное решение для (P), то, взяв минимизирующую меру, существование которой следует из теоремы 2, получим

$$\int F\,d\mu=\inf\{F(t),\ t\in\mathfrak{A}\}=\inf\{F(t),\ t\in\mathcal{U}\}. \tag{5}$$

А так как для всякого $H\in\mathcal{U}^{\mathfrak{A}}$ имеем $F\circ H(\mathfrak{A})\subset F(\mathcal{U})$, то

$$\inf\{F(t),\ t\in\mathcal{U}\}\le\inf\{F\circ H(t),\ t\in\mathfrak{A}\}. \tag{6}$$

Из (3) (в доказательстве теоремы 2) следует, что для любой функции $H\in\mathcal{U}^{\mathfrak{A}}$

$$\int(-F\circ H)\,d\mu\le\sup\{-F\circ H(t),\ t\in\mathfrak{A}\}=$$

$$=-\inf\{F\circ H(t),\ t\in\mathfrak{A}\}. \tag{7}$$

Теперь из (5)-(7) получаем

$$\int F\,d\mu\le\inf\{F\circ H(t),\ t\in\mathfrak{A}\}\le-\int(-F\circ H)\,d\mu=\int F\circ H\,d\mu.$$

Обратно, если для меры $\mu:\mathcal{B}^{\mathfrak{A}}\to Y$ выполняется условие (M), то

$$\inf\{F(t),\ t\in\mathfrak{A}\}\le\inf\{F(t),\ t\in\mathcal{U}\}=\int F\,d\mu\le\int F\cdot H \tag{8}$$

для всякой функции $H\in\mathcal{U}^{\mathfrak{A}}$. В [I] установлено, что дисперсный интеграл обладает следующим свойством: если $f(t)=y\in Y$ для всех $t\in \mathfrak{a}$, то $\int f d\mu = y\cdot\mu(1)$. Для всякого $x\in\mathcal{U}$ рассмотрим функцию $H_x\in\mathcal{U}^{\mathfrak{a}}: H_x = x$ для всех $t\in\mathfrak{a}$. Тогда $\int(F\circ H_x)d\mu = F(x)$, и из (8) следует, что

$$\inf\{F(t),\ t\in\mathfrak{a}\} \le \int F d\mu \le \int(F\circ H_x)d\mu \le \inf\{F(x),\ x\in\mathcal{U}\}.$$

Таким образом,

$$\inf\{F(t),\ t\in\mathfrak{a}\} = \inf\{F(x),\ x\in\mathcal{U}\}$$

и $\mathfrak{a}$ является обобщенным решением программы (P). $\triangleleft$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что идея вычисления значения выпуклой программы при помощи элементов субдифференциала канонического оператора, реализованная в теореме 2, была заимствована из [2]. Теорема 3 является, по существу, "интегральной формой" критерия обобщенного решения С.С.Кутателадзе (см.[2, п.II.4.2]). Заметим только, что в теореме 3 не требуется, чтобы функция $\omega$ была внутренней точкой в множестве $\mathcal{U}^{\mathfrak{a}}$.

В случае, когда (P) - регулярная задача, критерий, сформулированный в теореме 3, можно уточнить.

Выпуклую векторную программу

$$G(x)\le 0,\quad F(x)\to\inf; \qquad (PR)$$

$$F, G: X\to Y\cup\{\infty\}$$

будем называть регулярной, если выполняются условия:

(I) для каждого $x\in X$ либо $G(x)\ge 0$, либо $G(x)\le 0$;

(2) существует точка $x_0\in \operatorname{dom} F$ такая, что элемент $-G(x_0)$ является единицей в $Y$ (см. 2 ).

Будем считать, что $\operatorname{dom} G = X$.

Линейный оператор $\alpha: Y\to Y$ называется мультипликатором, если он удовлетворяет условию $0\le\alpha\le I_Y$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть для регулярной выпуклой программы* ($PR$) *множество* $F(\mathcal{U})$ *ограничено в* $Y$. *Подмножество* $\mathfrak{a}\subset\mathcal{U}$ *является обобщенным решением для* ($PR$) *тогда и только тогда, когда существуют такие мультипликаторы* $\alpha$ *и* $\beta$, *что*

$$\ker \alpha = \{\mathbb{O}\}, \quad \alpha + \beta = I_Y, \quad \beta \circ G(\omega) = \mathbb{O}, \tag{9}$$

и для минимизирующей меры $\mu$ (множества $\alpha$ и оператора $F$) выполняется неравенство

$$-\beta \circ \sup\{G \circ H(t),\ t \in \alpha\} \le \alpha \cdot [\int F \circ H\, d\mu - \int F d\mu] \tag{10}$$

для всех $H \in \mathcal{U}^\alpha$.

Определим операторы $\bar{F} : X^\alpha \to Y \cup \{\infty\}$ и $\bar{G} : X^\alpha \to Y \cup \{\infty\}$ равенствами

$$\bar{F}(H) = \begin{cases} \int F \circ H d\mu, & \text{если } H \in \mathcal{U}^\alpha; \\ \infty, & \text{если } H \notin \mathcal{U}^\alpha; \end{cases}$$

$$\bar{G}(H) = \sup\{G \circ H(t),\ t \in \alpha\}.$$

Выпуклость оператора $\bar{F}$ следует из выпуклости $F$, так как интеграл по экстенсиональной мере является линейным оператором [1]. Выпуклость $\bar{G}$ очевидна. Рассмотрим задачу

$$\bar{G}(H) \le \mathbb{O}, \quad \bar{F}(H) \to \inf \tag{11}$$

и покажем, что она регулярна.

Если $H \in \mathcal{U}^\alpha$, то $G \circ H(t) \le \mathbb{O}$ для всех $t \in \alpha$ и поэтому $\bar{G}(H) \le \mathbb{O}$. Если $H \in \mathcal{U}^\alpha$, то существует $t_0 \in \alpha$, для которого $H(t_0) \notin \mathcal{U}$, т.е. $G \cdot H(t) \geqslant \mathbb{O}$ (в силу регулярности исходной задачи), и поэтому $\bar{G}(H) \geqslant \mathbb{O}$. Мы показали, что выполнено условие (1). Справедливость условия (2) следует из того, что в пространстве $X^\alpha$ существует такая функция $H_0$, что $H_0(t) = x_0$ для некоторой точки $t \in \alpha$, и

$$-\bar{G}(H_0) = -\sup\{G \cdot H_0(t),\ t \in \alpha\}$$

также является единицей в $Y$.

Если $\alpha$ - обобщенное решение регулярной задачи $(PR)$, то по теореме 3

$$\int F \cdot H d\mu - \int F \cdot \omega\, d\mu \geqslant \mathbb{O} \quad (H \in \mathcal{U}^\alpha),$$

а это равносильно тому, что $\omega$ является оптимальным планом регулярной задачи (11). Пользуясь критерием оптимальности для регулярных задач из (2), получаем, что существуют такие мультипликаторы $\alpha, \beta \in \Lambda(Y)$, что $\ker \alpha = \{\mathbb{O}\}$, $\alpha + \beta = I_Y$, $\beta \circ G(\omega) = \mathbb{O}$, $\mathbb{O} \in \partial_\omega(\alpha \circ \bar{F}) + \partial_\omega(\beta \circ \bar{G})$. Последнее включение означает, что существует такой линейный оператор $\mathcal{A}: X^{\alpha} \to Y$, что

$$-\beta \cdot \bar{G}(H) \leq \mathcal{A}(H) - \mathcal{A}(\omega) \leq \alpha \cdot (\bar{F}(H) - \bar{F}(\omega)),$$

откуда немедленно следует (I0).

Обратно, если выполняются соотношения (9),(I0), то из неравенства $G(x) \leq 0$ для всякого $x \in \mathcal{U}$ следует

$$\alpha \circ \int (F \circ H - F \circ \omega)\, d\mu \geq \beta \cdot G(\omega) \geq 0$$

для всех $H \in \mathcal{U}^{\alpha}$. Так как $0 \leq \alpha \leq I_Y$ и $\ker \alpha = \{0\}$, то

$$\int F \circ H\, d\mu \geq \int F\, d\mu$$

Пользуясь критерием из теоремы 3, убеждаемся, что $\alpha$ - обобщенное решение исходной задачи. $\triangleleft$

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 3 справедлива оценка

$$\int F \circ H\, d\mu - \int F\, d\mu \geq y \sup\{G \cdot H(t), t \in \alpha\},$$

где $y$ - некоторый элемент $Y^+$ для всех $H \in \mathcal{U}^{\alpha}$.

$\triangleright$ В реализации $Y \subset C^{\infty}(Q)$ (см., например,[2]) мультипликаторы $\alpha$ и $\beta$ представляют собой операторы умножения на некоторые функции, которые будем обозначать теми же буквами. Условие $\ker \alpha = \{0\}$ гарантирует существование функции $\alpha^{-1}$. Таким образом, в реализации $y = \beta \cdot \alpha^{-1}$ осталось воспользоваться теоремой о представлении $K$-пространства в виде $C^{\infty}(Q)$. $\triangleleft$

## ЛИТЕРАТУРА


I. ГЛАЗЫРИНА И.П. Об интегральном представлении одного класса операторов при помощи векторных мер. - Сиб. мат. журн., I986, т.27, № 2, с.32-38.

2. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, I978.

3. КУСРАЕВ А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, I985.



Поступила в ред.-изд. отдел
0I.03.I986 г.