Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

ЗАВИСИМОСТЬ ОБЪЕМА ПОТРЕБЛЕНИЯ ОТ ЧИСЛЕННОСТИ РАБОЧЕЙ СИЛЫ В ОДНОПРОДУКТОВОЙ МОДЕЛИ

А.А.Муканов, А.М.Рубинов

1. В работе изучается вопрос о зависимости объема потребления от численности рабочей силы в рамках простейшей однопродуктовой модели экономической динамики. Рассмотрим два смежных момента времени $\hat{t}$, t. Тогда модель задается соотношениями $F(\hat{K},\hat{L})=I+c$, $c=\omega L, K=\gamma \hat{K}+I$. Здесь $\hat{K}$ и $\hat{L}$ – объем фондов и численность рабочей силы в начальный момент времени $\hat{t}$; K и L – объем фондов и численность рабочей силы в следующий момент t (время предполагается дискретным); I – инвестиции, c – потребление, ω – удельное потребление (ставка заработной платы); F – производственная функция, γ – коэффициент сохранности фондов. Предполагается, что объем потребления c, произведенный с помощью рабочей силы $\hat{L}$ к моменту t, авансируется рабочей силе L, задействованной в этот момент.

При исследовании описанной модели часто предполагают, что задана неизменная норма накопления s, не зависящая от численности рабочей силы L.

Пусть $L=\varkappa\hat{L}$, где $\varkappa$ – темп роста рабочей силы. Тогда

$$c(L)=(1-s)F(\hat{K},\frac{1}{\varkappa}L).$$

Считая, что F – вогнутая однородная первой степени возрастающая по каждой переменной функция (это стандартные предположения), получим, что в случае неизменной нормы накопления объем потребления представляет из себя вогнутую возрастающую функцию численности рабочей силы. Заметим, что удельное потребление ω выражается через норму накопления S равенством

$$\omega = \frac{c(L)}{L} = (1-s)F\left(\bar{\tau}, \frac{1}{\varkappa}\right),$$

где $\hat{\tau} = \hat{K}/L$ – фондовооруженность в начальный момент t. Таким образом, s не зависит от L тогда и только тогда, когда ω не зависит от L (при условии, что темп роста $\varkappa$ фиксирован).

При более тонком анализе естественно считать, что удельное потребление ω зависит от общей численности рабочей силы. Один из способов учета такой зависимости предложен в [I]. Представляет интерес, сохранятся ли те свойства, которыми обладает функция $c(L)$ при неизменном ω (неизменном s), и в случае, когда ω зависит от L указанным в [I] способом. В первой части работы показывается, что ответ на этот вопрос существенно зависит от вида производственной функции. В частности, для функции с постоянной эластичностью замены (CES) потребление при достаточно больших L убывает и выпукло (как функция L), причем $\lim\limits_{L\to\infty} c(L) = 0$. Во второй части исследуется вопрос об оптимальном распределении рабочей силы между двумя однопродуктовыми моделями в случае, когда критерий оптимальности – суммарное потребление. При этом существенно используются результаты первой части.

2. В [I] предложен следующий способ выбора:

$$\omega = \frac{f(\tau) - \tau f'(\tau)}{\nu + f'(\tau)}, \tag{I}$$

где $\tau = \tau(L)$ есть корень уравнения

$$\tau = \frac{M}{L} - \frac{f(\tau) - \tau f'(\tau)}{\nu + f'(\tau)}. \tag{2}$$

Здесь $f(\tau) = F(\tau, 1)$, $\tau > 0$. Предполагается, что функция F положительно однородна первой степени, $F(0,L) = F(K,0) = 0$. Считаем, что функция f трижды непрерывно дифференцируема, причем $f'(\tau) > 0$, $f''(\tau) < 0$ при $\tau > 0$. Через M обозначена величина $\nu\hat{K} + F(\hat{K}, \hat{L})$ – национальное богатство в момент t.

В дальнейшем будет иногда удобнее рассматривать изучаемые величины как функции переменной τ. Определим следующие функции:

$$\alpha(\eta)=\nu\eta+f(\eta);\ \beta(\eta)=\nu+f'(\eta);$$

$$\gamma(\eta)=f''(\eta);\ \delta(\eta)=f(\eta)-\eta f'(\eta). \tag{3}$$

Понятно, что

$$\alpha'=\beta\ ,\ \beta'=\gamma,\ \delta'=-\eta\gamma. \tag{4}$$

Из (I) следует, что удельное потребление ω имеет вид $\omega=\delta/\beta$. Из уравнения (2) можно выразить L как функцию переменной η :

$$L(\eta)=M\frac{\beta(\eta)}{\alpha(\eta)}. \tag{5}$$

Заметим сразу же, что L - убывающая функция, причем

$$\lim_{\eta\to+\infty}L(\eta)=0\quad ,\ \lim_{\eta\to+0}L(\eta)=+\infty.$$

Имеем

$$c(L)=L\omega(L)=M\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\beta}=M\frac{\delta(\eta(L))}{\alpha(\eta(L))}\ , \tag{6}$$

где $\eta(L)$ - функция, обратная к функции, определенной формулой (5). Из (4) и (5) следует, что

$$\eta'(L)=\frac{1}{L'(\eta)}=\frac{1}{M}\ \frac{\alpha^2}{\alpha\gamma-\beta^2}.$$

Поэтому

$$c'(L)=M\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)'=\frac{\delta'\alpha-\alpha'\delta}{\alpha^2}\eta'(L)=\frac{\alpha'\delta-\delta'\alpha}{\beta^2-\alpha\gamma}\ . \tag{7}$$

Так как $\gamma(\eta)=f''(\eta)<0$, знак производной $c'(L)$ определяется знаком выражения $\alpha'\delta-\delta'\alpha$ (вычисленном в точке $\eta(L)$). Это, впрочем, следует непосредственно из (6).

Производя несложные выкладки, которые здесь опускаем, можно показать, что

$$c''(L)=\frac{(\alpha''\delta-\delta''\alpha)(\beta^2-\alpha\gamma)-(\beta\gamma-\alpha\gamma')c'}{(\beta^2-\alpha\gamma)^2}\eta'\ , \tag{8}$$

откуда после несложных преобразований следует равенство

$$c''(L)=\frac{\gamma(\beta^2-2\alpha\gamma)+\alpha\beta\gamma'}{(\beta^2-\alpha\gamma)^2}. \tag{9}$$

Учитывая, что $\alpha>0,\ \eta'<0$, получаем

$$\operatorname{sign}\ c''(L)=-\operatorname{sign}[\alpha\gamma'\beta-2\alpha\gamma^2+\gamma\beta^2]. \tag{10}$$

Заметим, что знак $c''(L)$ зависит от третьей производной функции f. Если $\gamma'(\eta)=f'''(\eta)<0$, то $c''(L)>0$. Если же $\gamma'(\eta)>0$, то ничего определенного о знаке $c''(L)$ сказать нельзя.

Рассмотрим отдельно случаи, когда F – функция Кобба – Дугласа и функция с постоянной эластичностью замены.

3. ТЕОРЕМА I. Пусть $F(K,L)=AK^{\tau}L^{1-\tau}$ – функция Кобба – Дугласа (здесь $0<\tau<1$), и удельное потребление ω вычисляется с помощью формул (I), (2). Тогда $c(L)$ – возрастающая вогнутая функция, причем $\lim\limits_{L\to\infty} c(L)<+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из (6), потребление есть убывающая функция от α/δ. Вычислим функцию α/δ. Имеем

$$\frac{\alpha(\eta)}{\delta(\eta)}=\frac{\nu\eta+A\eta^{\tau}}{A(1-\tau)\eta^{\tau}}=\frac{1}{A(1-\tau)}\left[\nu\eta^{1-\tau}+A\right], \tag{II}$$

откуда следует, что $\frac{\alpha(\eta)}{\delta(\eta)}$ – возрастающая функция переменной η. Так как функция $\eta(L)$ убывает, то функция $c(L)$ возрастает. Для определения знака второй производной функции c воспользуемся соотношением (I0). Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае $\alpha\beta\gamma'+\beta^2\gamma-2\alpha\gamma^2>0$ при всех η и, следовательно, $c''(L)<0$ при всех L. Как следует из (6) и (II),

$$\lim_{L\to+\infty} c(L)=\lim_{\eta\to+0} M\frac{\delta(\eta)}{\alpha(\eta)}=M(1-\tau)<+\infty.$$

Теорема доказана.

4. Пусть $F(K,L)=(AK^{-\rho}+BL^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$ – функция с постоянной эластичностью замены. Ограничимся в дальнейшем наиболее интересным случаем $\rho>1$. (Исследование случаев $\rho\in(0,1]$ и $\rho\in(-1,0]$ проводится по той же схеме, что и ниже.) Введем обозначение $Y=A+B\eta^{\rho}$. Тогда функция $f(\eta)=F(\eta,1)$ и ее производные примут вид:

$$f(\eta)=\eta Y^{-\frac{1}{\rho}};$$
$$f'(\eta)=AY^{-\frac{1}{\rho}-1}; \tag{12}$$
$$f''(\eta)=-(\rho+1)AB\eta^{\rho-1}Y^{-\frac{1}{\rho}-2};$$

$$f'''(\eta)=-(\rho+1)AB\eta^{\rho-2}Y^{-\frac{1}{\rho}-3}(A(\rho-1)-(2+\rho)B\eta^{\rho}). \tag{13}$$

Подставляя значения f, f', f'' в формулу (7), убедимся в том, что

$$c'(L)=Z(\nu B\eta^{\rho}-\nu A\rho-A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}}),$$

где $Z>0$. Таким образом,

$$\operatorname{sign} c'(L)=\operatorname{sign}(\nu B\eta^{\rho}-\nu A\rho-A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}}). \tag{14}$$

Здесь, как и выше, $\eta=\eta(L)$ есть функция, обратная к функции $L(\eta)$, определенной формулой (5). Положим $g(\eta)=$ $=\nu B\eta^{\rho}-\nu A\rho-A\rho(A+B\eta^{\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$.

ЛЕММА I. Уравнение $g(\eta)=0$ имеет на положительной оси единственный корень $\bar{\eta}_1$, причем $g(\eta)>0$ при $\eta>\bar{\eta}_1$ и $g(\eta)<0$ при $\eta<\bar{\eta}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что $g'(\eta)>0$, поэтому функция g возрастает. Положим $x=\eta^{\rho}$. Так как графики функций $g_1(x)=\nu Bx-\nu A\rho$ и $g_2(x)=A\rho(A+Bx)^{-\frac{1}{\rho}}$ пересекаются, то уравнение $g(\eta)=0$ имеет решение. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\eta\geq\bar{\eta}_1$, где $\bar{\eta}_1$ – корень уравнения $g(\eta)=0$, функции α и δ определены с помощью формул (3) по функции $f(\eta)=\eta Y^{-\frac{1}{\rho}}$, где $Y=A+B\eta^{\rho}$. Тогда

$$\alpha''(\eta)\,\delta(\eta)-\delta''(\eta)\alpha(\eta)\geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma(\eta)=f''(\eta)$. Используя формулы (12) и (13), легко показать, что

$$\gamma'=\gamma\,\frac{A(\rho-1)-B\eta^{\rho}(2+\rho)}{\eta Y}. \tag{15}$$

Преобразуем выражение $\alpha''\delta-\delta''\alpha$. Имеем

$$\alpha''\delta-\delta''\alpha=\gamma(\alpha+\delta)+\eta\alpha\gamma'=$$
$$=\frac{\gamma}{Y}[\alpha Y+\delta Y+\alpha(A(\rho-1)-(2+\rho)B\eta^{\rho}].$$

Проведя несложные, но громоздкие выкладки, можно показать, что выражение, стоящее в квадратных скобках, может быть записано в следующем виде:

$$\eta[(\nu A\rho-\nu B\eta^{\rho}+A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}})-B\eta^{\rho}\cdot\rho(Y^{-\frac{1}{\rho}}+Y)].$$

В силу леммы I первое слагаемое в квадратных скобках отрицательно, поэтому все выражение в квадратных скобках отрицательно. Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что $\gamma<0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(K,L)=(AK^{-\rho}+BL^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}}$, где $\rho>1$ и удельное потребление ω вычисляется с помощью формул (I), (2). Тогда: I) потребление $c(L)$ достигает на положительной полуоси максимума в некоторой точке $\bar{L}_1$, причем $\bar{L}_1$ является единственной точкой локального экстремума; 2) функция $c(L)$ имеет единственную точку перегиба $\bar{L}_2$, в которой меняет вогнутость на выпуклость, при этом $L_2>L_1$; 3) $\lim_{L\to+\infty}c(L)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\eta}_1$ – корень уравнения $g(\eta)=0$, существование которого гарантирует лемма I, и $\bar{L}_1=L(\bar{\eta}_1)$. Тогда, как следует из равенства (I4), леммы I и монотонного убывания функции $\eta(L)$, на промежутке $(0,\bar{L}_1)$ потребление $C(L)$ возрастает, а на промежутке $(\bar{L}_1,+\infty)$ убывает. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Положим

$$\tilde{\eta}=\left(\frac{A(\rho-1)}{B(2+\rho)}\right)^{1/\rho};\quad \tilde{L}=L(\tilde{\eta}).$$

Так как по условию теоремы $\rho>1$, то из (I3) следует, что $f'''(\eta)<0$ при $\eta<\tilde{\eta}$ и $f'''>0$ при $\eta>\tilde{\eta}$. Используя определение точки $\tilde{\eta}$, легко проверить, что

$$\nu B\tilde{\eta}^{\rho}-\nu A\rho-A\rho(A+B\tilde{\eta})^{-\frac{1}{\rho}}<0,$$

и поэтому, как следует из (14), $c'(\tilde{L})<0$. Привлекая п.1 теоремы, убедимся в справедливости неравенства $\tilde{L}>\bar{L}_1$.

Пусть $L\geqslant\tilde{L}$. Тогда $\eta=\eta(L)\leqslant\tilde{\eta}$ и, следовательно, $f'''(\eta)\leqslant 0$. В этом случае, как следует из (10), справедливо неравенство $c''(L)<0$. Покажем, что на промежутке $(0,\bar{L}_1)$ выполняется неравенство $c''(L)>0$. Действительно, поскольку на этом промежутке $\gamma''=f'''(\eta(L))\geqslant 0$ и в то же время $c'(L)>0$, привлекая лемму 2 и формулу 8, убедимся в справедливости требуемого неравенства.

Из сказанного выше следует, что непрерывная функция c'' принимает на концах промежутка $(\bar{L}_1,L)$ значения разных знаков, поэтому она имеет корень $\bar{L}_2$ на этом промежутке. Из (10) следует, что все корни c'' совпадают с корнями функции $h(\eta(L))$, где

$$h=\alpha\gamma'\beta+\beta^2\gamma-2\alpha\gamma^2;$$

α,β,γ определены по формуле (3). Воспользовавшись формулой (15), преобразуем h к виду

$$h(\eta)=(-\nu B\eta^{\rho}+\nu A\rho+A\rho Y^{-\frac{1}{\rho}})(1+\nu AY^{\frac{1-\rho}{\rho}})-$$
$$-\nu(1+\rho)B^2\eta^{2\rho}(1+\nu Y^{\frac{1}{\rho}})Y^{-1}.$$

На рассматриваемом промежутке $(\bar{L}_1,\tilde{L})$ выполняется неравенство $c'(L)<0$, поэтому, используя формулу (14), можно с помощью достаточно громоздких выкладок, которые здесь опускаются, проверить, что функция $h(\eta(L))$ монотонна. Таким образом, $\bar{L}_2$ – единственный корень функции c'' на интервале $(\bar{L}_1,\tilde{L})$ и, стало быть, на всей области определения.

3) Вычислим $\lim\limits_{L\to\infty}c(L)$. Имеем, используя (6),

$$c(L)=M\frac{\delta(\eta)}{\alpha(\eta)},$$

где $\eta=\eta(L)$. В рассматриваемом случае

$$\frac{\delta(\eta)}{\alpha(\eta)}=\frac{f(\eta)-\eta f'(\eta)}{\nu\eta+f(\eta)}=\frac{B\eta^{\rho}}{\nu(A+B\eta^{\rho})^{1+1/\rho}+(A+B\eta^{\rho})},$$

Поэтому

$$\lim_{L \to +\infty} c(L) = \lim_{\rho \to 0} c(\rho) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 утверждает, что для рассматриваемой в ней производственной функции потребление как функция численности рабочей силы L убывает вместе с ростом L, начиная с некоторой пороговой численности $\bar{L}_1$, и становится сколь угодно малым при достаточно больших L. Это, казалось бы, парадоксальное явление может быть объяснено так: если накопленное национальное богатство M несоразмерно мало по сравнению с численностью рабочей силы L, то следует прежде всего увеличить это богатство за счет увеличения капиталовложений I и, следовательно, уменьшения потребления C. При этом чем больше L или, что то же самое, меньше отношение M/L (именно оно фигурирует в основном уравнении (2)), тем большую часть выпуска следует направлять на увеличение национального богатства.

Приведем два замечания к теореме I.

ЗАМЕЧАНИЕ I. При фиксированном ρ точка $\bar{L}_1$ максимума функции $c(L)$ представляет собой функцию коэффициентов A и B. Нетрудно показать, что любое число $L > 0$ может выступать в качестве $\bar{L}_1$ при подходящем выборе этих коэффициентов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно проверить, что при $\rho \in (0,1]$ функция $c(L)$ имеет так же, как и в случае $\rho > 1$, единственную точку максимума и единственную точку перегиба. Если же $\rho \in$ $\in (-1;0)$, то $c(L)$ так же, как и в случае функции Кобба - Дугласа, является возрастающей вогнутой функции.

5. Рассмотрим две однопродуктовые модели. Первая задается производственной функцией F_1 и коэффициентом сохранности фондов ν_1, вторая - функцией F_2 и коэффициентом ν_2. Задана общая численность рабочей силы L, которая распределяется между этими моделями так, чтобы максимизировать суммарное потребление. Итак, рассматривается задача

$$c_1(\ell) + c_2(L - \ell) \to \max \qquad (16)$$

при условии $0 \le \ell \le L$. Здесь $c_i(\ell)$ - фонд потреблений в i-й модели в предположении, что удельное потребление ω_i выбирается по формулам (I), (2); $i = 1,2$. Казалось бы, что если в одной из моделей производственная функция "существенно лучше", чем в другой, то вся рабочая сила должна быть направлена в эту модель. Так, однако, бывает, не всегда. Ниже как раз изучается вопрос, когда решение задачи (I6) лежит внутри промежутка $[0, L]$ и когда – на его границе.

ЛЕММА 3. Пусть функции c_1 и c_2 возрастают и вогнуты на промежутке $[0,L]$, причем $c_1(0)=c_2(0)=0$. Тогда соотношение

$$c_1(L) \geq c_1(\ell) + c_2(L-\ell) \quad (\ell \in [0,L]) \tag{I7}$$

выполняется в том и только в том случае, когда $c_1'(L) \geq c_2'(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = L-\ell$ и пусть $c(m)=c_1(L)-c_1(L-m)$ $(0 \leq m \leq L)$. Тогда неравенство (I7) равносильно соотношению $c(m) \geq c_2(m), m \in [0,L]$. Так как $c''(m) = -c_1''(L-m) > 0$, то функция c выпукла. Кроме того, $c(0) = c_2(0)$. Из этого равенства, выпуклости c и вогнутости c_2 следует, что неравенство $c(m) \geq c_2(m)$ $(0 \leq m < L)$ равносильно соотношению $c'(0) \geq c_2'(0)$. Для завершения доказательство осталось заметить, что $c'(0) = c_1'(L)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть F_1 и F_2 – функции Кобба-Дугласа. Тогда решение задачи (I6) лежит в интервале $(0, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись формулой (7), нетрудно проверить, что в случае, когда F – производственная функция Кобба – Дугласа, производная потребления в нуле бесконечна. Привлекая лемму 3, убедимся в справедливости теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим модели (F_1, ν_1) и (F_2, ν_2), где F_1 и F_2 – функции с постоянной эластичностью замены:

$$F_i(K,L) = (A_i K^{-\rho_i} + B_i L^{-\rho_i})^{-\frac{1}{\rho_i}} \quad (i=1,2),$$

причем $\rho_i > 1$. Тогда суммарное потребление $c_1(\ell) + c_2(L-\ell)$ достигает максимума на отрезке $[0,L]$ в точке L тогда и только тогда, когда $L \leq \bar{L}_1$ и $c_1'(L) \geq \frac{1}{\nu_2} B_2^{-1/\rho_2}$. Здесь $\bar{L}_1$ – единственная точка максимума функции c_1 на положительной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 3, введем в рассмотрение функцию $c(m)=c_1(L)-c_1(L-m)$ $(0 \leq m \leq L)$.

Максимум функции $c_1(l)+c_2(L-l)$ достигается в точке L тогда и только тогда, когда $c(m) \geq c_2(m)$. Если $L>\bar{L}_1$, то функция c принимает на $[0,L]$ как положительные, так и отрицательные значения, в то время как функция c_2 всегда положительна, поэтому максимум в точке L не достигается. Пусть $L \leq \bar{L}_1$. Рассмотрим сначала случай, когда $L \leq \bar{L}_2$, где $\bar{L}_2$ – точка максимума функции F_2 на положительной полуоси. Тогда, привлекая теорему 2 и лемму 3, получим, что L является точкой максимума в том и только в том случае, когда $c_1'(L) \geq c_2'(0)$. Громоздкие, но несложные выкладки, опирающиеся на формулу (7), показывают, что $c_2'(0)=\frac{1}{\gamma_2}\beta_2^{-}F_2$. Если же $L>\bar{L}_2$, то можно сначала использовать лемму 3 для промежутка $[0,\bar{L}_2]$, а затем воспользоваться тем, что на отрезке $(\bar{L}_2, L)$ функция c_2 убывает, а функция c возрастает. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНОВ А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. – Л.: Наука, 1983.

Поступила в ред.-изд. отдел
14.06.1985 г.