

УДК 513.88+512.25

ОБ ЭКСТЕНСИОНАЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРНО-ВЫПУКЛЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.С.Кутателадзе

Настоящая заметка примыкает к [1]. Напомним, что наличие выпуклого анализа в модуле над кольцом A накладывает исключительно жесткие условия на A , сводя дело, по существу, к случаю, когда A - это алгебра ортоморфизмов (или ее представительная часть, например идеальный центр) некоторого (расширенного) K -пространства Y [2]. В этой связи встает вопрос об экстенциональности операторно-выпуклого отображения. Оказывается, как того и следовало ожидать, что экстенциональность в типичных случаях возникает автоматически. Именно, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $F: X \rightarrow Y$ - операторно-выпуклое отображение и точки \bar{x}, \bar{y} из X лежат в ядре эффективной области определения F . Тогда для любого проектора P_n в Y выполнено соотношение экстенциональности:

$$P_n \bar{x} = P_n \bar{y} \Rightarrow P_n F \bar{x} = P_n F \bar{y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \partial F(\bar{x})$ - аддитивный элемент субдифференциала F в точке \bar{x} . Не нарушая общности, при проверке того, что A экстенционально, будем считать $\bar{x} := 0$ и $F \bar{x} := 0$. Раз речь идет о точке ядра, переходя, если требуется, к элементу $h := th$ при некотором положительном скаляре t , для произвольного $h \in X$ выводим

$$-P_n F(-h) \leq AP_n h \leq F(P_n h) \leq P_n Fh.$$

Отсюда вытекает

$$P_n A P_n = A P_n, P_n A P_n^d = 0.$$

Значит, A коммутирует с проекторами.

Пусть теперь

$$F^* A := \sup \{ Ax - Fx : x \in \text{dom } F \}$$

— преобразование Юнга — Фенхеля оператора F в точке A .

Ясно, что справедливы соотношения

$$A\bar{x} = F\bar{x} + F^* A; F^* A + F\bar{y} \geq A\bar{y}.$$

Значит, последовательно получаем

$$\begin{aligned} P_n F\bar{x} &= P_n (A\bar{x} - F^* A) = A P_n \bar{x} - P_n F^* A = \\ &= A P_n \bar{y} - P_n F^* A = P_n (A\bar{y} - F^* A) \leq P_n F\bar{y}. \end{aligned}$$

Меня в приведенном рассуждении \bar{x} и \bar{y} местами, заключаем:

$$P_n F\bar{x} = P_n F\bar{y}. \text{ Тем самым теорема доказана.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ГЕЙДЕР В.А. К теореме Куна — Таккера в расширенных K — пространствах. — Наст. сб., с. 64—68.
2. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. О выпуклом анализе в модулях. — Сиб. мат. журн., 1981, т.22, № 4, с.118—128.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.11.1985 г.