УДК 330.115:519.95

ЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В КОМПАКТАХ

А.Г.Пинскер

Все возрастающая роль математических методов в различных областях науки, техники и особенно экономики предполагает введение и исследование новых обобщенных моделей линейной оптимизации. К их числу, в частности, относятся линейные параметрические задачи оптимизации в компактах.

Пусть $Q=\{t\}$ - компакт (хаусдорфово компактное топологическое пространство), $a_{ij}(t), b_i(t)$ и $c_j(t)$ ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$) - вещественные непрерывные функции параметра $t\in Q$, и пусть при всяком фиксированном значении $t\in Q$ обычная ("числовая") задача линейного программирования, состоящая в максимизации целевой функции

$$f[X(t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(t)x_j(t),\ X(t)=\{x_j(t)\}, \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)=b_i(t),\ x_j(t)\geq 0, \tag{2}$$

имеет решение.

Максимальное значение целевой функции (1) в точке $t\in Q$ обозначим через $\varphi(t)$. Если существует точка $t^*\in Q$ такая, что $\varphi(t^*)\geqslant\varphi(t)$ для всех $t\in Q$, то будем говорить, что линейная параметрическая задача максимизации (1)-(2) имеет решение.

Перейдем к исследованию задачи.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_s$ – всевозможные оптимальные (хотя бы для одного $t \in Q$) базисы задачи и $\Delta_1(t), \Delta_2(t), \ldots, \Delta_s(t)$ – соответствующие им базисные определители. Так как все функции $a_{ij}(t)$ непрерывны в Q, то непрерывны в Q и все базисные определители, и потому множества $D_1, D_2, \ldots, D_s$ точек $t \in Q$, в которых эти определители отличны от нуля, открыты в Q. Эти множества будем называть базисными для соответствующих оптимальных базисов.

Пусть, например, оптимальный базис $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, тогда для всех $t \in D_1$ базисные неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ и целевая функция (I) могут быть выражены через свободные неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$ в виде

$$x_i(t) = a_i(t) + a'_{i,k+1}(t) + \cdots + a'_{in}(t) x_n(t) \quad (i = 1, \ldots, k); \tag{3}$$

$$f[X(t)] = c(t) + c'_{k+1}(t) x_{k+1}(t) + \cdots + c'_n(t) x_n(t), \tag{4}$$

где

$$X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), 0, \ldots, 0) \tag{5}$$

– базисное решение системы уравнений (2).

Легко видеть, что все коэффициенты при неизвестных и свободные члены в равенствах (3) и (4)-функции, непрерывные в D_1; в частности, непрерывна в D_1 функция $c(t)$.

Пусть P_1 – множество всех точек $t \in Q$, для которых задача имеет решение с оптимальным базисом B, назовем его оптимальным базисным множеством базиса B_1. Очевидно, $P_1 \subset D_1$. Если точка $t \in P_1$, то из равенств (3) и (4) следует, что

$$x_i(t) = a_i(t) \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, k); \ c'_j(t) \leq 0 \ (j = k+1, \ldots, n), \tag{6}$$

и при этом функция $c(t)$ в множестве P_1 совпадает с $\varphi(t)$ – максимальным значением целевой функции (I):

$$\varphi(t) = c(t) \quad (t \in P_1). \tag{7}$$

ЛЕММА I. Оптимальное базисное множество P_1 замкнуто в базисном множестве D_1, т.е. если $t_0 \in D_1$ – точка замыкания множества P_1, то $t_0 \in P_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $t_0 \notin P_1$, тогда по крайней мере одно из неравенств (6) не выполняется. Пусть, например, $x_1(t_0)=a_1(t_0)<0$. Так как функция $a_1(t)$ непрерывна в D_1, то найдется окрестность $U(t_0)$ точки t_0, содержащаяся в D_1, такая, что во всякой точке $t \in U(t_0)$ $x_1(t)=a_1(t)<0$. Это значит, что окрестность $U(t_0)$ точки t_0 не пересекается с множеством P_1 и эта точка не является точкой его замыкания вопреки предположению. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если F – замкнутое подмножество компакта Q, содержащееся в базисном множестве D_1, то пересечение $F_1=F \cap P_1$ также замкнуто в Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – точка замыкания множества F_1, тогда $x_0 \in F$, и по предыдущей лемме $x_0 \in P_1$, откуда $x_0 \in F_1$, что и требовалось доказать.

Соображения, изложенные выше для случая оптимального базиса B_1, сохраняют, очевидно, свое значение и для всех остальных оптимальных базисов $B_1, \ldots, B_s$, соответствующих им базисных определителей $\Delta_1(t), \ldots, \Delta_s(t)$ и оптимальных базисных множеств $P_\ell, \ldots, P_s$, и при этом имеют место соотношения

$$P_r \subset D_r, \ \bigcup_r P_\ell = \bigcup_r D_r = Q \quad (r=1, \ell, \ldots, s). \qquad (8)$$

ТЕОРЕМА I. Линейная параметрическая задача максимизации в любом компакте Q всегда имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть t_0 – произвольная точка компакта Q, D_0 – пересечение всех базисных множеств, ее содержащих (очевидно, непустое открытое подмножество Q), и $U(t_0)$ – окрестность точки t_0, содержащаяся в D_0 вместе со своим замыканием $\bar{U}(t_0)$ (как известно, компакт – регулярное (и даже нормальное) топологическое пространство). Замкнутое подмножество $\bar{U}(t_0)$ представляет собой объединение его непустых пересечений с некоторыми оптимальными базисными множествами (так как в силу (8) $\bar{U}(t_0) \subset \bigcup_r P_r$). По лемме 2 каждое из этих пересечений замкнутое и, следовательно, компактное подмножество Q и в нем функция $\varphi(t)$ достигает своего наибольшего значения. Так как таких пересечений конечное множество, то в некоторой точке t_0^* функция $\varphi(t)$ достигает своего наибольшего значения в $\mathcal{U}(t_0)$. Совокупность всех окрестностей $\mathcal{U}(t_0)$ ($t_0 \in Q$) образует покрытие компакта Q, из которой можно извлечь конечное подпокрытие и, следовательно, найдется точка t^*, в которой функция $\varphi(t)$ достигает своего наибольшего значения во всем компакте Q. Теорема доказана.

Отметим часто встречающийся в приложениях частный случай рассматриваемой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Если все базисные определители $\Delta_1(t), \dots, \Delta_s(t)$, соответствующие оптимальным базисам задачи, отличны от нуля в компакте Q, то функция $\varphi(t)$ непрерывна в Q (и, следовательно, достигает в нем своего максимального значения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы по лемме I все оптимальные базисные множества $P_1, \dots, P_r$ замкнуты в компакте Q и поэтому на каждом из них функция $\varphi(t)$ (совпадающая с соответствующим свободным членом равенства (4)), очевидно, непрерывна, а в их общих точках ее значения равны между собой. Отсюда следует, что она непрерывна и во всем Q.

Теоремы, аналогичные теоремам I и 2, имеют место, очевидно, и для случая линейной параметрической задачи минимизации.

Заметим также, что параметрические задачи с ограничениями в форме неравенств обычным путем сводятся к эквивалентным им задачам с ограничениями в форме уравнений.

Обратимся теперь к понятию параметрической матричной игры.

Пусть $P=\{s\}$ и $Q=\{t\}$ – компакты, $P \times Q = \{s,t\}$ – их произведение, следовательно, также компакт, и пусть $a_{ij}(s,t)\,(i=1,\dots,m;\, j=1,\dots,n)$ – вещественные непрерывные в $P \times Q$ функции. При всяких фиксированных значениях $s \in P$ и $t \in Q$ матрица $\|a_{ij}(s,t)\|$ определяет обычную ("числовую") матричную игру. Пусть $v(s,t)$ – цена этой игры. Справедливо следующее предложение.

ТЕОРЕМА 3. С у щ е с т в у ю т $s_1^*, s_2^* \in P$ и $t_1^*, t_2^* \in Q$ т а к и е , ч т о

$$v(s_1^*, t_1^*) \leq v(s,t) \leq v(s_2^*, t_2^*) \quad (s \in P, t \in Q). \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как непрерывные в компакте функции ограничены в нем, то, добавив ко всем функциям $a_{ij}(s,t)$ достаточно большое положительное число C , получим матрицу игры со строго положительными элементами $a'_{ij}(s,t)$. Для этой вспомогательной игры составим, как обычно, пару симметричных двойственных параметрических задач максимизации и минимизации:

$$f[X(s,t)] = \sum_{j=1}^{n} x_j(s,t) \to max, X(s,t) = \{x_j(s,t)\}, \tag{10}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(s,t) x_j(s,t) \leq 1 \ , \ x_j(s,t) \geq 0, \tag{11}$$

и

$$g[Y(s,t)] = \sum_{i=1}^{m} y_i(s,t) \to min, \ y_i(s,t) \geq 0, \tag{12}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a'_{ij}(s,t) y_i(s,t) \geq 1, \ y_i(s,t) \geq 0. \tag{13}$$

Для каждых $s \in P$ и $t \in Q$ максимальное значение целевой функции (10) совпадает с минимальным значением целевой функции (12), и их общее значение $W(s,t)$ строго положительно. По теореме I существуют $s_1^* \in P$ и $t_1^* \in Q$ такие, что $W(s_1^*, t_1^*) \geq W(s,t)$ при всех $s \in P$ и $t \in Q$. Как известно, цена вспомогательной матричной игры, обозначим ее через $v'(s,t)$, обратна по величине числу $W(s,t)$. В таком случае

$$v'(s_1^*, t_1^*) \leq v'(s,t) \quad (s \in P, t \in Q). \tag{14}$$

Применяя к задаче (12)-(13) теорему, аналогичную теореме I, придем к неравенству

$$\vartheta'(s_2^*, t_2^*) \geq \vartheta'(s,t) \quad (s \in P, t \in Q). \tag{I5}$$

Принимая во внимание, что цена исходной игры

$$\vartheta(s,t) = \vartheta'(s,t) - c \quad (s \in P, t \in Q),$$

из (I4) и (I5) получаем

$$\vartheta(s_1^*, t_1^*) \leq \vartheta(s,t) \leq \vartheta(s_2^*, t_2^*) \ (s \in P, t \in Q),$$

и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы в организации и планировании производства. - Л.: Изд-во Ленигр. ун-та, I939.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд-во АН СССР, I959.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, I977.
4. ДАНЦИГ Дж. Линейное программирование, его применение и обобщения. - М.: Прогресс, I965.
5. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г., ЮДИН Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Советское радио, I966.
6. ПИНСКЕР А.Г. Компактные системы задач линейного программирования. - Оптимизация. I984, вып. 34(5I), с.53-65.

Поступила в ред.-изд. отдел
I0.II.I985 г.