Выпуклый анализ и полуупорядоченные пространства

УДК 517.98

О БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ В РЕШЕТОЧНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Г.Н.Шотаев

Решеточно-нормированные пространства (РНП), введенные Л.В.Канторовичем, имеют интересные приложения в различных вопросах анализа (см. [1,2]). В последние годы эти объекты интенсивно изучались. Были получены важные результаты о строении общих решеточно-нормированных пространств, а также исследованы многочисленные конкретные примеры (см., например, [3,4]). Одной из основных идей, заложенных в этих работах, является то, что операторы с "хорошими" мажорантами должны обладать "хорошими" свойствами. С этой точки зрения билинейные операторы в РНП не рассматривались. Вообще, о линейных операторах в РНП известно мало. В настоящей заметке рассматриваются некоторые вопросы, связанные с мажорацией билинейных операторов. В п.1° вводится понятие мажорированного билинейного оператора и устанавливается, что всякий мажорированный билинейный оператор имеет наименьшую мажоранту, приводятся некоторые примеры РНП. В п.2° доказывается, что пространство мажорированных билинейных операторов является bo-полным РНП, а также показывается, что для билинейных операторов, обладающих o-непрерывными мажорантами, возможно продолжение по bo-непрерывности, и, наконец, в п.3° дается аналитическое описание билинейных операторов с абстрактной нормой.

1°. Приведем необходимые определения и факты (см. также [1-7]. Пусть E, F, G - некоторые K-пространства, X, Y, Z - вещественные векторные пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Билинейный оператор $b: E \times F \longrightarrow G$ называется положительным, если $b(e,f) \geq 0$ для любых $e \geq 0$, $f \geq 0$;

регулярным, если он представим в виде $b=a-c$, где a и c - некоторые положительные билинейные операторы.

Введем обозначения: $\mathcal{L}(F,G)$ - векторное пространство линейных операторов из F в G; $\mathcal{B}(E,F;G)$ - векторное пространство билинейных операторов из $E\times F$ в G; $\mathcal{L}_r(F,G)$ - векторное пространство линейных регулярных операторов из F в G; $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ - векторное пространство билинейных регулярных операторов из $E\times F$ в G. Известно (см. [I]), что $\mathcal{L}_r(F,G)$ является K-пространством, следовательно, $\mathcal{L}_r(E,\mathcal{L}_r(F,G))$ также будет K-пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Билинейный оператор $b: E\times F \longrightarrow G$ называется раздельно o-непрерывным, если частные отображения $b(e,\cdot): F\longrightarrow G$ и $b(\cdot,f): E\longrightarrow G$ o-непрерывны при любом $f\in F$ и $e\in E$.

Можно показать, что из раздельной o-непрерывности билинейного оператора следует его o-непрерывность по совокупности переменных, и потому в дальнейшем будем говорить просто о порядковой непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $p: X\longrightarrow E$ называется решеточной нормой, если выполнены аксиомы нормы:

(I) $p(x)\geq 0 \quad (x\in X), p(x)=0 \Longleftrightarrow x=0,$

(2) $p(x_1+x_2)\leq p(x_1)+p(x_2) \qquad (x_1,x_2\in X),$

(3) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x) \qquad (x\in X, \lambda\in R).$

Говорят, что p - норма Канторовича, если, кроме того, выполнено следующее условие разложимости:

(4) для любых $x\in X$ и $e_1, e_2\in E^+$ из $p(x)=e_1+e_2$, $e_1 d e_2$ следует существование представления $x=x_1+x_2$, где $x_1, x_2\in X$ и $p(x_i)=e_i$, $i=1,2$.

Векторное пространство X, снабженное нормой Канторовича p, будем называть решеточно-нормированным пространством и обозначать (X,p,E) или, короче, (X,p).

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякое K-пространство E можно рассматривать как РНП с нормой, совпадающей с модулем элемента, т.е. $(E,|\cdot|)$. Всякое банахово пространство X также является РНП с естественной нормой $\|\cdot\|$, т.е. $(X,\|\cdot\|)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (X,p,E) называется:

bo-полным, если для любой сети $(x_\alpha)\subset X$ из $p(x_\alpha-x_\beta)\xrightarrow{(o)} 0$

следует существование такого $x \in X$, что $\rho(x_\alpha - x) \xrightarrow{(o)} 0$;

br-полным, если для любой последовательности $(x_n) \subset X$ из $\rho(x_n - x_m) \xrightarrow{(r)} 0$ следует существование такого $x \in X$, что $\rho(x_n - x) \xrightarrow{(r)} 0$;

дизъюнктно-полным, если для любого полного семейства $\{\pi_\xi : \xi \in \Xi\}$ попарно-дизъюнктных порядковых проекторов (на компоненты) в E и любого ограниченного семейства $\{x_\xi : x_\xi \in X, \xi \in \Xi\}$ существует такой $x \in X$ (обозначаемый $\underset{\xi \in \Xi}{mix}\, \pi_\xi x_\xi$), что $\pi_\xi \rho(x - x_\xi) = 0$ для каждого $\xi \in \Xi$.

Пополнение произвольного РНП подробно описано в[3,4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Векторное пространство $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ билинейных регулярных операторов является K-пространством.

Очевидное доказательство состоит в установлении линейного и решеточного изоморфизма между пространствами $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ и $\mathcal{L}_r(E,\mathcal{L}_r(F,G))$.

Обозначим через $\mathcal{L}_n(F,G)$ векторное пространство линейных регулярных порядково-непрерывных операторов из F в G, через $\mathcal{B}_n(E,F;G)$ - векторное пространство билинейных регулярных порядково-непрерывных операторов из $E \times F$ в G. Пусть h - линейный и решеточный изоморфизм между пространствами $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ и $\mathcal{L}_r(E,\mathcal{L}_r(F,G))$. Используя предложение I и биекцию h, можно сформулировать очевидное утверждение:

K-пространства $\mathcal{B}_n(E,F;G)$ и $\mathcal{L}_n(E,\mathcal{L}_n(F,G))$ линейно- и решеточно-изоморфны.

Пусть (X,ρ,E), (Y,q,F), (Z,g,G) - некоторые РНП. Через $\mathcal{B}_m(X,Y;Z)$ обозначим векторное пространство всех билинейных операторов $b : X \times Y \to Z$, имеющих положительные мажоранты, т.е. $b \in \mathcal{B}_m(X,Y;Z)$ в том и только в том случае, если существует положительный билинейный оператор, называемый мажорантой, $\tilde{b} : E \times F \to G$ такой, что выполняется

$$g(b(x,y)) \leq \tilde{b}(\rho(x), q(y)) \text{ для любых } x \in X,\ y \in Y.$$

Сказанное можно изобразить диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[rr, "\hat{b}"] & & G \\
X \times Y \arrow[u, "p", shift left=3] \arrow[u, "q"', shift right=3] \arrow[rr, "b"] & & Z \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всякого мажорированного билинейного оператора существует наименьшая мажоранта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Биекция $h : \mathcal{B}_r(E,F;G) \to \mathcal{L}_r(E,\mathcal{L}_r(F,G))$ из предложения I является линейным и решеточным изоморфизмом. Через $M(X,Y)$ обозначим векторное пространство всех линейных операторов из Y в Z, имеющих положительные мажоранты. Рассмотрим отображение $h' : \mathcal{B}_m(X,Y;Z) \to M(X,M(Y,Z))$, сопоставляющее каждому $b \in \mathcal{B}_m(X,Y;Z)$ оператор $h'(b) \in M(X,M(Y,Z))$ по правилу $h'(b) : x \to b(x,\cdot)$. Ясно, что h' задает изоморфизм между $\mathcal{B}_m(X,Y;Z)$ и $M(X,M(Y,Z))$. Пусть $b \in \mathcal{B}_m(X,Y;Z)$. Обозначим множество мажорант билинейного оператора b через $\mathcal{M}(b)$, $\mathcal{M}(b) \subset \mathcal{B}_r(E,F;G)$. Тогда очевидно выполняется

$$h(\mathcal{M}(b)) = \mathcal{M}(h'(b)), \mathcal{M}(h'(b)) \subset M(X,M(Y,Z)).$$

Так как среди $\mathcal{M}(h'(b))$ всегда существует наименьшая мажоранта, то будет существовать наименьшая мажоранта и среди $h(M(b))$ и, следовательно, всякий билинейный мажорированный оператор имеет наименьшую мажоранту в силу произвольности оператора b.

Примем за норму билинейного мажорированного оператора наименьшую среди всех его мажорант, т.е. $|b| = \inf \mathcal{M}(b)$, где нижняя грань берется в K-пространстве регулярных билинейных операторов $\mathcal{B}_r(E,F;G)$.

Тем самым отображение $|\cdot|$, действующее из векторного пространства $\mathcal{B}_m(X,Y;Z)$ в K-пространство $\mathcal{B}_r(E,F;G)$, является решеточной нормой. Рассмотрим некоторые частные случаи пространства билинейных мажорированных операторов с решеточной нормой $|\cdot|$.

(а) Пусть X, Y, Z – банаховы пространства, т.е. $E = F = G = R$. Билинейный оператор $b : X \times Y \to Z$ является мажорированным тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует число $L \geq 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\|b(x,y)\| \leq L\|x\|\,\|y\| \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

(б) Пусть $X=E,\ Y=F,\ Z=G$. Мажорированными билинейными операторами $b: E\times F \longrightarrow G$ являются регулярные билинейные операторы и выполняется соотношение

$$|b(e,f)| \leq |b|(|e|,|f|) \qquad (e\in E,\ f\in F).$$

При этом $\mathbf{|} b \mathbf{|} = |b|$, где $|b|$ – модуль элемента b.

(в) Билинейные операторы с абстрактной нормой. Пусть X и Y – банаховы пространства, G – некоторое K-пространство. Мажорированными билинейными операторами являются билинейные операторы, действующие из произведения нормированных пространств $(X, \|\cdot\|)$ и $(Y, \|\cdot\|)$ в bo-полное РНП $(G, |\cdot|)$, такие, что $b[S_X \times S_Y]$ – ограниченное (в смысле порядка) множество в K-пространстве G, т.е. существует $g \in G$ такой, что $|b(x,y)| \leq g$ для любых $x \in S_X$ и $y \in S_Y$, где S_X и S_Y – единичные шары в X и Y соответственно. Норма оператора b вычисляется по формуле

$$\mathbf{|} b \mathbf{|} = \sup\{|b(x,y)| : \|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1\}.$$

Выполнимость нормативного неравенства $|b(x,y)| \leq \mathbf{|} b \mathbf{|}\,\|x\|\,\|y\|$ следует из определения абстрактной нормы.

(г) Доминированные билинейные операторы. Пусть E и F – некоторые K-пространства, Z – банахово пространство. Рассматривая билинейные мажорированные операторы, действующие из произведения РНП $(E, |\cdot|)$ и $(F, |\cdot|)$ в РНП $(Z, \|\cdot\|)$, получаем пространство билинейных доминированных операторов с решеточной нормой. Для всякого билинейного доминированного оператора b выполняется неравенство

$$\|b(e,f)\| \leq \mathbf{|} b \mathbf{|}(|e|,|f|) \quad \text{для любых } e\in E,\ f\in F,$$

где $\mathbf{|} b \mathbf{|} : E\times F \longrightarrow R$ – положительный билинейный функционал.

2^0. В [4] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА I. Пусть (X, p, E) – произвольное, а (Y, q, F) – некоторое bo-полное РНП. Тогда пространство мажорированных линейных операторов $(M(X,Y), \mathbf{|}\cdot\mathbf{|}, \mathcal{L}_r(E,F))$ является bo-полным пространством с разложимой решеточной нормой.

Аналогичное утверждение имеет место и для билинейных мажорированных операторов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X,ρ,E), (Y,q,F) – произвольные, а (Z,g,G) – некоторое bo-полное РНП. Тогда $(\mathcal{B}_m(X,Y;Z), |\cdot|, \mathcal{B}_r(E,F;G))$ является bo-полным РНП с разложимой решеточной нормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 1, получаем, что $(M(X,M(Y,Z)), |\cdot|, \mathcal{L}_r(E,\mathcal{L}_r(F,G)))$ является bo-полным РНП, а поскольку $\mathcal{B}_m(X,Y;Z)$ и $M(X,M(Y,Z))$ изоморфны, то и $(\mathcal{B}_m(X,Y;Z), |\cdot|, \mathcal{B}_r(E,F;G))$ является bo-полным РНП.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем bo-полные РНП будем называть пространствами Банаха – Канторовича (ПБК). Ясно, что пространства билинейных мажорированных операторов из примеров (а)-(г) п. 1° являются ПБК. Они исследуются в [3,8].

Через $\mathcal{B}_{mn}(X,Y;Z)$ обозначим линейное подпространство $\mathcal{B}_m(X,Y;Z)$, состоящее из всех билинейных операторов, имеющих порядково-непрерывные мажоранты. Пусть (Z,g,G) – некоторое bo-полное РНП. Через $(\tilde{X},\tilde{\rho},E)$ и $(\tilde{Y},\tilde{q},F)$ обозначим bo-пополнения (X,ρ,E) и (Y,q,F) соответственно (см. [3,4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Всякий билинейный мажорированный оператор $b\in\mathcal{B}_{mn}(X,Y;Z)$ однозначно распространяется до билинейного мажорированного оператора $\tilde{b}\in\mathcal{B}_{mn}(\tilde{X},\tilde{Y};Z)$ без увеличения решеточной нормы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в несколько этапов. Распространим сначала билинейный оператор b на элементы вида $(\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}\pi_\xi x_\xi)$, т.е. до оператора $\bar{b}:\bar{X}\times Y\longrightarrow Z$. Пусть Θ – множество конечных подмножеств индексного множества Ξ, упорядоченное по включению. Положим $x_\theta=\sum_{\xi\in\Xi}\pi_\xi x_\xi$. Тогда для $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ имеем

$$g(b(x_{\theta_1},y)-b(x_{\theta_2},y))=$$
$$=g(b(x_{\theta_1}-x_{\theta_2},y)\le|b|(\tilde{\rho}(x_{\theta_1}-x_{\theta_2}),q(y))\xrightarrow{(0)}0.$$

Этим показано, что направление $(b(x_\theta, y))_{\theta\in\Theta}$ является bo-фундаментальным. Положим $x = bo\text{-}\lim x_\theta$, $\bar{b}(\underset{\xi\in\Xi}{mix}\, \pi_\xi x_\xi, y) = bo\text{-}\lim b(x_\theta, y) = \bar{b}(\bar{x}, y)$. Очевидно, что оператор $\bar{b}$ линеен по обеим переменным. Покажем, что порядково-непрерывный билинейный оператор $|b|$ является мажорантой оператора $\bar{b}$. Для $x = \underset{\xi\in\Xi}{mix}\, \pi_\xi x_\xi$, где (x_ξ) – ограниченное семейство элементов X и $\theta \in \Theta$, имеем

$$g(b(\sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi x_\xi, y)) \le |b|(\beta(\sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi x_\xi), q(y)) \le$$

$$\le |b|(\sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi \beta(x_\xi), q(y)) \le$$

$$\le |b|(o\text{-}\sum \pi_\xi \tilde{\beta}(x_\xi), q(y)) = |b|(\tilde{\beta}(x), q(y)),$$

т.е. получаем, что $g(\bar{b}(x,y)) \le |b|(\tilde{\beta}(x), q(y))$.

Докажем теперь, что значение $\bar{b}$ не зависит от представления элемента x. Пусть $x = \underset{\xi\in\Xi}{mix}\, \pi_\xi x_\xi$ и $x = \underset{\eta\in H}{mix}\, \sigma_\eta z_\eta$, где (x_ξ) и (z_η) – ограниченные семейства в X. Положим $x_\theta = \sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi x_\xi$, $z_{\bar\theta} = \sum_{\eta\in\bar\theta}\sigma_\eta z_\eta$ для всех $\theta\in\Theta$, $\bar\theta \in \bar\Theta$, где Θ и $\bar\Theta$ – множества упорядоченных по включению конечных подмножеств множеств Ξ и H соответственно. Имеем

$$g(bo\text{-}\lim b(x_\theta, y) - \sum_{\eta\in\bar\theta} b(\sigma_\eta z_\eta, y)) \le g(bo\text{-}\lim b(x_\theta, y) -$$

$$- \sum_{\xi\in\theta} b(\pi_\xi x_\xi, y)) + g(\sum_{\xi\in\theta} b(\pi_\xi x_\xi, y) - \sum_{\eta\in\bar\theta} b(\sigma_\eta z_\eta, y)) \le$$

$$\le g(bo\text{-}\lim (x_\theta, y) - \sum_{\xi\in\theta} b(\pi_\xi x_\xi, y)) +$$

$$+ |b|(\tilde{\beta}(\sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi x_\xi - \sum \sigma_\eta z_\eta), q(y)).$$

Переходя к пределу по $\theta\in\Theta$, получаем

$$g(bo\text{-}\lim b(x_\theta, y) - \sum_{\eta\in\bar\theta} b(\sigma_\eta z_\eta, y)) \le |b|(\tilde{\beta}(x - \sum_{\eta\in\bar\theta}\sigma_\eta z_\eta), q(y)).$$

Переходя к пределу по $\bar\theta\in\bar\Theta$, получаем

$$g(bo\text{-}\lim b(x_\theta, y) - bo\text{-}\lim b(z_{\bar\theta}, y)) = 0.$$

Или, окончательно, имеем: $bo\text{-}\lim b(x_\theta, y) = bo\text{-}\lim b(z_{\bar\theta}, y)$.

Аналогично можно распространить оператор b до оператора $\bar{\bar{b}}: \bar{X} \times \bar{Y} \to Z$, положив $\bar{\bar{b}}(\bar{x}, \min_{\varepsilon\in H} \sigma_\varepsilon y_\varepsilon) = bo\text{-}\lim \bar{b}(\bar{x}, y_\sigma)$ и показать, что $|b|$ является мажорантой оператора $\bar{\bar{b}}$. Далее, распространим оператор b на всевозможные пределы br-сходящихся последовательностей $(x_n, y_n) \subset X \times Y$. Пусть $x = br\text{-}\lim x_n$, $y = br\text{-}\lim y_n$. Имеем

$$g(b(x_n,y_n) - b(x_m,y_m)) \le g(b(x_n - x_m, y_n) + b(x_m, y_n - y_m)) \le$$

$$\le g(b(x_n - x_m, y)) + g(b(x_m, y_n - y_m)) \le$$

$$\le |b|(\widetilde{p}(x_n - x_m), \widetilde{q}(y_n)) + |b|(\widetilde{p}(x_m), \widetilde{q}(y_n - y_m)).$$

Так как $\widetilde{p}(x_m)$ и $\widetilde{q}(y_n)$ - ограниченные последовательности в K-пространствах E и F соответственно, то существуют $u \in E$ и $v \in F$ такие, что $\widetilde{p}(x_m) \le u$ и $\widetilde{q}(y_n) \le v$. Тогда выполняется

$$g(b(x_n, y_n) - b(x_m, y_m)) \le$$
$$\le |b|(\widetilde{p}(x_n - x_m), v) + |b|(u, \widetilde{q}(y_n - y_m)).$$

Оба члена, стоящие в правой части неравенства, br-сходятся к 0 и, следовательно, последовательность $(b(x_n, y_n))$ является br-фундаментальной. Положим $\hat{b}(x,y) = br\text{-}\lim b(x_n, y_n)$. Оператор $\hat{b}$ билинеен и для всех $x = br\text{-}\lim x_n$ и $y = br\text{-}\lim y_n$ имеем

$$g(\hat{b}(x,y)) = r\text{-}\lim g(b(x_n, y_n)) \le r\text{-}\lim |b|(\widetilde{p}(x_n), \widetilde{q}(y_n)) =$$

$$= |b|(r\text{-}\lim \widetilde{p}(x_n), r\text{-}\lim \widetilde{q}(y_n)) = |b|(\widetilde{p}(x), \widetilde{q}(y)).$$

Тем самым показали, что порядково-непрерывный билинейный оператор $|b|$ является мажорантой билинейного оператора $\hat{b}$. Из всего следует, что всякий билинейный оператор $b \in \mathcal{B}_{mn}(X, Y; Z)$ распространим до билинейного оператора $\widetilde{b} \in \mathcal{B}_{mn}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}; Z)$ с сохранением решеточной нормы. Однозначность распространения следует из того, что положительный билинейный оператор является τ-непрерывным по каждой из переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве теоремы при распространении билинейного мажорированного оператора на $b\tau$-замыкания (X,ρ,E) и (Y,q,F) не в полном объеме использовалось требование порядковой непрерывности мажоранты. Используя этот факт, а также τ-непрерывность билинейного положительного оператора, можно сформулировать следующее очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть (X,ρ,E) и (Y,q,F) – произвольные РНП, $(\bar{X},\bar{\rho},E)$ и $(\bar{Y},\bar{q},F)$ – их $b\tau$-замыкания соответственно, (Z,g,G) – некоторое $b\tau$-полное РНП. Тогда для всякого мажорированного оператора $b: X\times Y \to Z$ существует единственное распространение до билинейного оператора $\bar{b}: \bar{X}\times\bar{Y}\to Z$ без увеличения решеточной нормы.

3°. Аналитические представления линейных операторов с абстрактной нормой изучались в работах [3,7,9,10]. Приведем предварительно некоторые факты и определения из [7].

Через $\mathcal{L}_A(X,E)$, где X – банахово пространство, обозначим ПБК линейных операторов с абстрактной нормой. Будем считать, что K-пространство E является фундаментом расширенного K-пространства $C_\infty(Q)$.

Пусть $X\otimes Y$ – алгебраическое тензорное произведение банаховых пространств X и Y, $X\hat{\otimes} Y$ – пополнение пространства $X\otimes Y$ по сильнейшей кросснорме γ (см. [11,12]), называемое проективным тензорным произведением. Через $(X\hat{\otimes} Y)'$ обозначим банахово сопряженное пространство к $X\hat{\otimes} Y$, через $\otimes$-вложение пространства $X\times Y$ в $X\otimes Y$ и тем самым в пространство $X\hat{\otimes} Y$. Свойства отображения $\otimes$ см., например, в [12]. Пусть $B(X,Y)$ – банахово пространство билинейных ограниченных функционалов, заданных на произведении $X\times Y$ банаховых пространств X и Y.

Через $E_s(B(X,Y))$ обозначим пространство классов эквивалентностей всех вектор-функций $z: \mathfrak{M}_z \to B(X,Y)$ таких, что:

(а) множество $\mathfrak{M}_z$ является котощим подмножеством Q;

(б) z является непрерывной в слабой топологии $\sigma(B(X,Y), (X\otimes Y)$;

(в) множество $\{<z, x\otimes y>(\cdot): x\otimes y\in X\otimes Y, \|x\|\le 1, \|y\|\le 1\}$ ограничено в E, где $<z, x\otimes y>(\cdot)$ означает непрерывное продолжение функции $t\to <z(t), x\otimes y>, t\in \mathfrak{M}_z$ на весь компакт Q, а $<\cdot,\cdot>$ – каноническая билинейная форма двойственности $(B(X,Y), X\hat{\otimes} Y)$.

Вектор-функции z_1 и z_2 считаем эквивалентными, если $z_1(t)=z_2(t)$ для всех $t\in dom(z_1)\cap dom(z_2)$.

Отображение $\rho: E_s(B(X,Y))\to E$, задаваемое соотношением

$$\rho(z)=sup\{|<z_1, x\otimes y>(\cdot)|: x\in X, y\in Y, \|x\|\le 1, \|y\|\le 1\},$$

где z_1 – произвольный представитель класса эквивалентности z, является абстрактной нормой, и нетрудно показать, что решеточно-нормированное пространство $(E_s(B(X,Y), \rho, E)$ является bo-полным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Отображение $T\to T\circ\otimes$ устанавливает линейную изометрию между пространствами $\mathcal{L}_A(X\hat{\otimes} Y, E)$ и $\mathcal{B}_A(X, Y; E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность отображения очевидна. Легко проверить также, что $T\circ\otimes$ – билинейный оператор.

Покажем, что отображение инъективно, т.е. если $T\neq 0$, то $T\circ\otimes\neq 0$. $T\neq 0$ означает, что существует элемент $z\in X\hat{\otimes} Y$ такой, что $Tz\neq 0$. Так как $X\otimes Y$ плотно в $X\hat{\otimes} Y$, то существует последовательность (z_n) элементов $X\otimes Y$ такая, что $z_n \xrightarrow{(r)} z$. Тогда $Tz_n \xrightarrow{(o)} Tz\neq 0$, поскольку $|Tz-Tz_n|=|T(z-z_n)|\le |T|\gamma(z-z_n)$. Поэтому существует такое n, что $Tz_n\neq 0$. Тогда $0\neq z_n=\sum_{i=1}^{k} x_i\otimes y_i$ и выполняется $0\neq T(\sum_{i=1}^{k} x_i\otimes y_i)=\sum_{i=1}^{k} Tx_i\otimes y_i$ и существует такой элемент $x\otimes y$, что $T(x\otimes y)\neq 0$, т.е. $(T\otimes)(x,y)\neq 0$ и $T\otimes\neq 0$.

Покажем, сюръективность отображения, т.е. что по произвольному билинейному оператору $b\in\mathcal{B}_A(X,Y;E)$ можно построить линейный оператор $T\in\mathcal{L}_A(X\hat{\otimes} Y, E)$ такой, что $b=T\circ\otimes$. Известно, что пространства $\mathcal{L}(X\otimes Y, E)$ и $\mathcal{B}(X,Y;E)$ изоморфны (см. [12]). Тогда для произвольного $b\in\mathcal{B}_A(X,Y;E)$ существует оператор T такой, что $b=T\circ\otimes$.

Покажем, что T является оператором с абстрактной нормой. Пусть $z=\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. Тогда

$$|Tz|=|\sum_{i=1}^{k} T(x_i\otimes y_i)|\leq \sum_{i=1}^{k} |T(x_i\otimes y_i)|=$$
$$=\sum_{i=1}^{k} |b(x_i,y_i)|\leq \sum_{i=1}^{k} \mathbf{|}b\mathbf{|}\,\|x_i\|\|y_i\|=\mathbf{|}b\mathbf{|}\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|\|y_i\|$$

или $|Tz|\leq \mathbf{|}b\mathbf{|}\gamma(z)$ для любого $z\in X\otimes Y$. Воспользовавшись предложением 3, положим $Tz=O\text{-}\lim Tz_n$ и тем самым зададим оператор T на всем пространстве $X\hat{\otimes} Y$. Оператор T линеен. Покажем, что T – оператор с абстрактной нормой. Привлекая неравенство $\mathbf{|}T\mathbf{|}\leq \mathbf{|}b\mathbf{|}$, имеем

$$|Tz|=O\text{-}\lim|Tz_n|\leq O\text{-}\lim\mathbf{|}b\mathbf{|}\gamma(z_n)=$$
$$=\mathbf{|}b\mathbf{|}(\lim\gamma(z_n))=\mathbf{|}b\mathbf{|}\gamma(z),$$

т.е. получаем, что $|Tz|\leq\mathbf{|}b\mathbf{|}\gamma(z)$ для любого $z\in X\hat{\otimes}Y$.

Покажем, что отображение является изометрией, т.е. сохраняется абстрактная норма $\mathbf{|}T\mathbf{|}=\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}$. Используя определение сильнейшей кросснормы, имеем

$$|T\circ\otimes|=\sup\{|T\otimes(x,y)|:\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1\}=$$
$$=\sup\{|T(x\otimes y)|:\|x\|\leq 1,\|y\|\leq 1\}\leq$$
$$\leq\sup\{|T(x\otimes y)|: x\otimes y\in X\otimes Y:\gamma(z)\leq 1\}\leq$$
$$\leq\sup\{|Tz|: z\in X\hat{\otimes}Y:\gamma(z)\leq 1\}=\mathbf{|}T\mathbf{|},$$

т.е. $\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}\leq\mathbf{|}T\mathbf{|}$. С другой стороны, очевидно выполняется $|Tz|\leq\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}\gamma(z)$. При $\gamma(z)\leq 1$ получаем $|Tz|\leq\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}$. Тогда $\sup\{|Tz|:\gamma(z)\leq 1\}\leq\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}$, что равносильно $\mathbf{|}T\mathbf{|}\leq\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}$. Окончательно имеем: $\mathbf{|}T\mathbf{|}=\mathbf{|}T\circ\otimes\mathbf{|}$ и предложение доказано полностью.

Следующая теорема дает аналитическое описание билинейных операторов с абстрактной нормой.

ТЕОРЕМА 3. Пространства $(\mathcal{B}_A(X,Y;E),\mathbf{|}\cdot\mathbf{|},E)$ и $(E_s(B(X,Y)),\mathbf{|}\cdot\mathbf{|},E)$ линейно-изометричны. Если E реализовано в виде фундамента в $C_\infty(Q)$, то указанная изометрия сопоставляет вектор-функции $w \in E_s(B(X,Y))$ билинейный оператор b_w по правилу $b_w(x,y) = \langle w(\cdot), x \otimes y \rangle$ $(x \in X, y \in Y)$.

Доказательство вытекает из предложения 4 с применением соответствующего предложения о реализации операторов с абстрактной нормой в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятно, что все изложенные результаты с очевидными уточнениями имеют место и для полилинейных операторов.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность А.Г. Кусраеву и В.З.Стрижевскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.– М.: Физматгиз, 1961.
3. КУСРАЕВ А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. – Новосибирск; Наука, 1985.
4. КУСРАЕВ А.Г., СТРИЖЕВСКИЙ В.З. О структуре решеточно-нормированных пространств. – Новосибирск, 1984. – 30 с. – (Препринт/ ИМ СО АН СССР).
5. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. – Новосибирск: Наука, 1978.
6. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Основы функционального анализа. – Новосибирск: Наука, 1983.
7. КУСРАЕВ А.Г., СТРИЖЕВСКИЙ В.З. Решеточно-нормированные пространства и классы непрерывных вектор-функций. – Оптимизация, 1984, вып. 34(51), с.24-36.
8. КУСРАЕВ А.Г. О пространствах Банаха – Канторовича. – Сиб. мат. журн., 1985, т.26, № 2, с.119-126.
9. БУХВАЛОВ А.В. Об аналитическом представлении линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций. – Изв. вузов. Математика, 1977, № 7(182), с.21-31.
10. БУХВАЛОВ А.В. Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой. – Изв. вузов. Математика, 1975,

№ II(I62), с.2I-32.
II. SCHATTEN R. A theory of cross-spaces. - Princeton: Univ. Press, I950.
I2. ШЕФЕР X. Топологические векторные пространства. - M.: Мир, I97I.

Поступила в ред.-изд. отдел
04.07.I985 г.