Выпуск 37(54) ОПТИМИЗАЦИЯ 1986 г.
Выпуклый анализ и полуупорядоченные
пространства

УДК 517.98

ОБ УСТОЙЧИВО РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВЕ L^2

Б.М.Макаров

Будем рассматривать операторы в пространстве $L^2 = L^2(\Omega,\Sigma,\mu)$, где (Ω,Σ,μ) – произвольное пространство с мерой. Оператор (т.е. линейное непрерывное отображение) $T: L^2\to L^2$ называется регулярным, если T-образ всякого порядково-ограниченного в L^2 множества снова есть порядково-ограниченное множество (см. [1], гл.X, § 2). Множество всех операторов в пространстве H и всех регулярных операторов в пространстве L^2 будем обозначать соответственно $L(H)$ и $H_r(L^2)$. Хорошо известно, что произведения UT, TU, где $T\in H_r(L^2)$, $U\in L(L^2)$, могут не быть регулярными операторами. Наша цель – описать "устойчиво регулярные" слева (справа) операторы, т.е. такие операторы $T\in H_r(L^2)$, что произведение $UT(TU)$ остается регулярным для любого $U\in L(L^2)$. Как следствие этого факта получаем, что единственным банаховым идеалом $\mathfrak{A}$ в алгебре $L(L^2)$, удовлетворяющим условиям:

1) $\mathfrak{A}$ есть подрешетка в $H_r(L^2)$;

2) операторы конечного ранга плотны в $\mathfrak{A}$,

является идеал $\mathfrak{S}_2(L^2)$ (см. ниже следствие 3). Под банаховым идеалом $\mathfrak{A}$ в $L(H)$, где H – гильбертово пространство, понимаем идеал (двусторонний или односторонний) в $L(H)$, являющийся банаховым пространством относительно некоторой нормы такой, что при $T\in\mathfrak{A}$, $U\in L(H)$ выполняется неравенство $\alpha(UT)\leq\|U\|\alpha(T)$, если идеал левый, и $\alpha(TU)\leq\|U\|\alpha(T)$, если идеал правый, и, кроме того, $\alpha(X'\otimes Y)=\|X'\|\|Y\|$ при всех $X',Y\in H$. Примерами (двусторонних) банаховых идеалов в $L(H)$ служат идеал ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(H)$

и идеал $\gamma_2(H)$ операторов Гильберта – Шмидта с соответствующими нормами. Напомним, что $\gamma_2(L^2)\subset H_2(L^2)$.

Основным результатом этой работы является следующая

ТЕОРЕМА. П у с т ь $T\in L(L^2)$. Э к в и в а л е н т н ы с л е д у ю щ и е у т в е р ж д е н и я:

I) $T\in\gamma_2(L^2)$;

2) о п е р а т о р T у с т о й ч и в о р е г у л я р е н с л е в а, т. е. $UT\in H_2(L^2)$ д л я л ю б о г о о п е р а т о р а $U\in L(L^2)$;

3) о п е р а т о р UT р е г у л я р е н д л я л ю б о г о у н и т а р н о г о о п е р а т о р а $U\in L(L^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации I $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3 очевидны. Докажем, что 3 $\Rightarrow$ I. Пусть T – оператор, удовлетворяющий условию 3 теоремы. Для доказательства того, что $T\in\gamma_2(L^2)$, проверим, что TV – ядерный оператор для любого $V\in\gamma_2(L^2)$. Если это так, то отображение $V\to TV$ из $\gamma_2(L^2)$ в $\gamma_1(L^2)$ непрерывно в силу теоремы о замкнутом графике, и поэтому функционал $F(V)=\operatorname{trace} TV$ непрерывен в $\gamma_2(L^2)$. Нам остается сослаться на теорему об общей форме функционала в $\gamma_2(L^2)$([2], гл. Ш, теорема I2.3), из которой следует, что $T\in\gamma_2(L^2)$.

Итак, будем доказывать, что $TV\in\gamma_1(L^2)$, если $V\in\gamma_2(L^2)$. Так как оператор Гильберта – Шмидта в L^2 переводит единичный шар в порядково-ограниченное множество, то существует такая функция $g\in L^2$, что $|Vx|\leqslant g$ при любом $x\in L^2$, $\|x\|\leqslant 1$. В этом случае оператор V допускает факторизацию через пространство $L^\infty = L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ вида $V=T_g V_1$, где $V_1: L^2\to L^\infty$, $V_1 x=\frac{1}{g}Vx$, а $T_g: L^\infty\to L^2$ – оператор умножения на функцию g. Ядерность оператора $TV=TT_g V_1$ будет установлена, если мы проверим ядерность оператора $W=TT_g$.

Заметим прежде всего, что образ $T(A)$ произвольного порядково-ограниченного множества $A\subset L^2$ остается порядково-ограниченным под действием любого унитарного оператора и, следовательно, содержится в некотором эллипсоиде Гильберта – Шмидта [3]. Пусть $I_g=\{x\in L^2 / |x|\leqslant g\}$. Поскольку множество $T(I_g)$ содержится в некотором эллипсоиде Гильберта – Шмидта, то найдется такой оператор Гильберта – Шмидта S : $H\to L^2$, что $T(I_g)\subset S(B)$, где H – гильбертово пространство, B – единичный шар в H. Следовательно, $Im W \subset Im S$. Не умаляя общности, можно считать, что $Ker S = \{0\}$. Определим теперь оператор $R: L^\infty \to H$ так, что $W = SR$. Для этого при любом $x \in L^\infty$ положим $Rx = S^{-1}W_x$. Непрерывность R немедленно следует из теоремы о замкнутом графике. По теореме Гротендика ([4], § 22.4) оператор R 2-абсолютно суммирующий, и по теореме умножения Пича ([4], § 20.2) получаем, что произведение $SR = W$ есть ядерный оператор. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $T \in L(L^2)$. Если оператор TU регулярен для любого унитарного оператора $U \in L(L^2)$, то $T \in \gamma_2(L^2)$.

Для доказательства достаточно заметить, что сопряженный оператор T^* удовлетворяет условию 3 теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – односторонний идеал в алгебре $L(L^2)$. Если $\mathfrak{A} \subset H_2(L^2)$, то $\mathfrak{A} \subset \gamma_2(L^2)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{A}$ – односторонний банахов идеал в $L(L^2)$, α – норма в $\mathfrak{A}$. Если – подрешетка в $\mathfrak{A} \subset H_2(L^2)$ и множество $\mathfrak{A}_0$ операторов конечного ранга плотно в $\mathfrak{A}$ по норме α, то $\mathfrak{A} = \gamma_2(L^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}^*$, сопряженное к $\mathfrak{A}$. Пусть $F_0 \in \mathfrak{A}, ^* F_0$ – сужение F на множество $\mathfrak{A}_0$. Тогда найдется единственный оператор $T_0 \in L(L^2)$ такой, что $F_0(A) = trace\, T_0 A$ $(A \in \mathfrak{A}_0)$. Пусть

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \{T \in L(L^2) \mid \exists F \in \mathfrak{A}^* : F(A) = trace\, TA \quad \text{при } A \in \mathfrak{A}_0\}.$$

Очевидно, имеется взаимно-однозначное соответствие между $\mathfrak{A}^*$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$. Так как каждый функционал из $\mathfrak{A}^*$ есть разность положительных (поскольку $\mathfrak{A}$ – подрешетка в $H_2(L^2)$), то и каждый оператор из $\tilde{\mathfrak{A}}$ есть разность положительных, т.е. $\tilde{\mathfrak{A}} \subset H_2(L^2)$. Кроме того, если $\mathfrak{A}$ – левый (правый) идеал, то $\tilde{\mathfrak{A}}$ – правый (левый) идеал. В самом деле, пусть $T \in \tilde{\mathfrak{A}}$, $F \in \mathfrak{A}^*$ – соответствующий T функционал, $U \in L(L^2)$. Будем для определенности считать, что $\mathfrak{A}$ – правый идеал. Тогда $F(AU) = trace\, TAU = trace\, UTA$ $(A \in \mathfrak{A}_0)$. Таким образом, оператор $\mathcal{U}T$ соответствует функционалу $F_1 \in \mathfrak{A}^*$, определяемому равенством $F_1(A)=F(A\mathcal{U})$ $(A\in\mathfrak{A})$ и, следовательно, $\mathcal{U}T\in\mathfrak{A}$. По следствию 2 получаем, что $\tilde{\mathfrak{A}}\subseteq\gamma_2(L^2)$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{A}\in\gamma_2(L^2)$, то $\tilde{\mathfrak{A}}\supseteq\gamma_2(L^2)$, и поэтому $\tilde{\mathfrak{A}}=\gamma_2(L^2)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{A}=\gamma_2(L^2)$.

Как установлено В.Г.Самарским и автором, если двусторонний идеал $\mathfrak{A}$ операторов в $L(L^2)$ обладает локальной безусловной структурой и операторы конечного ранга плотны в нем, то $\mathfrak{A}$ – подрешетка в $H_2(L^2)$. Вместе с предыдущим следствием это дает нам

СЛЕДСТВИЕ 4 (ср.[5]). Пусть H – гильбертово пространство, $\mathfrak{A}$ – двусторонний банахов идеал в $L(H)$, обладающий локальной безусловной структурой. Если операторы конечного ранга плотны в $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}=\gamma_2(H)$.

В заключение заметим, что если мера μ не чисто атомическая, то условие 3 теоремы можно формально ослабить, заменив следующим условием:

3′. Для любого порядково-ограниченного множества $A\subset L^2$ и любого унитарного оператора $\mathcal{U}\in L(L^2)$

$$\sup\{|\mathcal{U}Tx| \mid x\in A\}<\infty \text{ почти везде.}$$

Условие 3′ означает, что оператор $\mathcal{U}T$ регулярен как оператор из L^2 в пространстве всех почти везде конечных измеримых функций, заданных на Ω. Импликация 3′$\Longrightarrow$3 вытекает из того, что если абсолютно выпуклое подмножество пространства L^2 не содержится в эллипсоиде Гильберта – Шмидта, то с помощью некоторого унитарного оператора его можно так "повернуть", что супремум образа будет равен бесконечности на множестве положительной меры (см. [6], гл.II, §8, теорема 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.
2. ГОХБЕРГ И.Ц., КРЕЙН М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965.

3. СУДАКОВ В.Н. Об одном классе компактов гильбертова пространства. - Усп. мат. наук, 1963, т.18, №1, с.181-190.
4. ПИЧ А. Операторные идеалы. - М.: Мир, 1982.
5. GORDON Y. Unconditional Schauder decompositions of normed ideals of operators between ℓ_p-spaces. - Pacif. J. Math., 1975, v.60, N2, p.71-82.
6. СУДАКОВ В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. - М.: Наука, 1976.

Поступила в ред.-изд. отдел
1.II.1985 г.