УДК 517.98

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЕДЕЛАХ НАДГРАФИКОВ

С.С.Кутателадзе

Верхний и нижний пределы точечно-множественных отображений – пределы Куратовского, как отмечено в [1,2], весьма удобно применять при построении различных эпипроизводных. В [3] развит способ применения методов нестандартного анализа для изучения соответствующих инфинитезимальных аппроксимирующих конусов. В настоящей заметке собраны замечания, устанавливающие мостки между названными подходами к теории касательных и соответствующих обобщенных субдифференциалов.

Пусть X, Y – множества и $\Gamma \in X \times Y$ – соответствие из X в Y. Считаем, что Y снабжено топологией τ, а в X выделен фильтр $\mathcal{F}$. Пусть, далее, $\ddot{\mathcal{F}}$ – гриль фильтра $\mathcal{F}$, т.е. множество подмножеств X, определенное соотношением

$$A \in \ddot{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow (\forall F \in \mathcal{F})\ A \cap F \neq \varnothing.$$

Напомним, что верхний и нижний пределы соответствия Γ вдоль фильтра $\mathcal{F}$ задаются соотношениями

$$Li_{\mathcal{F}} \Gamma := \underline{Lim}_{\mathcal{F}} \Gamma := \bigcap_{A \in \ddot{\mathcal{F}}} cl_{\tau} \Gamma(A);$$

$$Ls_{\mathcal{F}} \Gamma := \overline{Lim}_{\mathcal{F}} \Gamma := \bigcap_{A \in \mathcal{F}} cl_{\tau} \Gamma(A).$$

Работая в стандартном антураже, т.е. считая параметры формальной записи следующего текста стандартными множествами, обозначим через $\mu(\mathcal{F})$ монаду фильтра $\mathcal{F}$, а символом $\mu_\tau(y)$ – монаду фильтра окрестностей точки y. Отметим, что для стандартного множества A справедливы соотношения

$$A\in\mathcal{F}\Longleftrightarrow A\supset\mu(\mathcal{F});$$

$$A\in\ddot{\mathcal{F}}\Longleftrightarrow A\cap\mu(\mathcal{F})\neq\varnothing.$$

ТЕОРЕМА I. Для стандартной точки y эквивалентны следующие утверждения:

(I) $y\in Li_{\mathcal{F}}\Gamma$;

(2) $(\forall V\in\tau(y))(\exists F\in\mathcal{F})(\forall x'\in F)(\exists y'\in V)\,(x',y')\in\Gamma$;

(3) $(\forall x'\in\mu(\mathcal{F}))(\exists y'\in\mu_\tau(y))\,(x',y')\in\Gamma$.

Доказательство из соображений полноты изложения проведем по схеме (3)$\Longrightarrow$(I)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3), хотя эквивалентность (I)$\Longleftrightarrow$(2) – это общеизвестное обстоятельство.

(3)$\Longrightarrow$(I). Если A – стандартный элемент гриля $\ddot{\mathcal{F}}$, то, как уже отмечено, существует $x'\in\mu(\mathcal{F})$ такой, что $x'\in A$. Подберем $y'\in\mu_\tau(y)$, для которого $y'\in\Gamma(x')\subset\Gamma(A)$. В силу стандартности антуража и принципа Лейбница множество $\Gamma(A)$ стандартно. Значит, на основании обычного нестандартного критерия точки прикосновения $y\in cl_\tau\Gamma(A)$. Из-за произвольности A заключаем:

(I)$\Longrightarrow$(2). Допустим, что для некоторой окрестности $V\in\tau(y)$ выполнено

$$(\forall F\in\mathcal{F})(\exists x_F\in F)\,\Gamma(x_F)\cap V=\varnothing.$$

Составим множество $A:=\{x_F : F\in\mathcal{F}\}$. Ясно, что A входит в гриль $\ddot{\mathcal{F}}$ и в то же время $\Gamma(A)\cap V=\varnothing$. Отсюда выводим: $y\notin cl_\tau\Gamma(A)$ и, тем более, $y\notin Li_{\mathcal{F}}\Gamma$.

(2)$\Longrightarrow$(3). Пусть V – стандартная окрестность y и $x'\in\mu(\mathcal{F})$. В силу (2) и принципа Лейбница имеется стандартное множество $F\in\mathcal{F}$ такое, что $(\forall x'\in\mathcal{F})(\exists y'\in V)(x',y')\in\Gamma$. Наше x' лежит в F в силу отмеченного ранее свойства монады $\mu(\mathcal{F})$. Значит, в символической записи

$$(\forall^{st} V\in\tau(y))(\exists y'\in V)\ (x',y')\in\Gamma.$$

Используя принцип идеализации, заключаем

$$(\exists y')\,(\forall^{st} V\in\tau(y))\ y'\in V\wedge y'\in\Gamma(x').$$

Это и требовалось установить.

ТЕОРЕМА 2. Для стандартной точки y эквивалентны утверждения:

(I) $y\in Ls_{\mathcal{F}}\Gamma$;

(2) $(\forall V\in\tau(y))(\forall F\in\mathcal{F})(\exists x'\in\mathcal{F})(\exists y'\in V)\ (x',y')\in\Gamma$;

(3) $(\exists x'\in\mu(\mathcal{F}))(\exists y'\in\mu_\tau(y))\ (x',y')\in\Gamma.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (I)$\Longleftrightarrow$(2) – очевидная расшифровка определений. Эквивалентность (2)$\Longleftrightarrow$(3) устанавливается прямым применением принципа идеализации.

Пусть теперь $f:=(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – семейство функций, действующих из топологического пространства (X,σ) в расширенную числовую прямую $\bar{\mathbb{R}}$. Пусть, далее, $\mathcal{F}$ – фильтр в Ξ. Рассмотрим нижний предел в точке $x\in X$ семейства f и его верхний предел (называемый также пределом по Рокафеллару):

$$li_{\mathcal{F}} f(x):=\sup_{V\in\sigma(x)}\ \sup_{F\in\mathcal{F}}\ \inf_{\xi\in F}\ \inf_{x'\in V} f_\xi(x');$$

$$ls_{\mathcal{F}} f(x):=\sup_{V\in\sigma(x)}\ \inf_{F\in\mathcal{F}}\ \sup_{\xi\in\Xi}\ \inf_{x'\in V} f_\xi(x').$$

Применим нестандартные критерии, сформулированные в теоремах I,2 и найденные в [3] для вывода известного основного свойства рассматриваемых пределов.

ТЕОРЕМА 3. Нижний и верхний пределы семейства надграфиков представляют соответственно надграфики нижнего и верхнего пределов рассматриваемого семейства функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{X}:=\Xi$; $\mathcal{Y}:=X\times\mathbb{R}$ и определим соответствие $\Gamma \subset \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ соотношением

$$(\xi, x, t) \in \Gamma \Longleftrightarrow (x,t) \in \operatorname{epi} f_\xi \Longleftrightarrow t \geq f_\xi(x).$$

Формально говоря, нам требуется установить равенства

$$Li_{\mathcal{F}} \Gamma = \operatorname{epi} li_{\mathcal{F}} f; \quad Ls_{\mathcal{F}} \Gamma = \operatorname{epi} ls_{\mathcal{F}} f.$$

Проверим для определенности первое из них. При этом в силу принципа Лейбница мы можем ограничиться случаем стандартного антуража.

Итак, пусть $(x,t) \in \operatorname{epi} li_{\mathcal{F}} f$, т.е. $t \geq li_{\mathcal{F}} f(x)$. На основании нестандартного критерия предела по Рокафеллару имеем

$$(\forall \xi' \in \mu(\mathcal{F}))(\exists x' \in \mu_\sigma(x)) \quad {}^\circ f_\xi(x') \leq t,$$

где, как обычно, ${}^\circ s$ – стандартная часть элемента $s \in \overline{\mathbb{R}}$. Последнее соотношение по очевидным причинам можно переписать в виде

$$(\forall \xi' \in \mu(\mathcal{F}))(\exists x' \in \mu_\sigma(x))(\exists t' \approx t) \; f_\xi(x') \leq t'.$$

В силу теоремы I полученное предложение означает, что $(x,t) \in Li_{\mathcal{F}} \Gamma$.

Из установленного легко вывести обычные представления конусов Кларка, Булигана и т.д. и соответствующих обобщенных субградиентов. Пусть, например, фиксировано множество C в почти топологическом векторном пространстве (X, τ) и σ – некоторая векторная топология в X. Рассмотрим конус Кларка C в точке x, т.е.

$$Cl(C,x) := \bigcap_{V \in \sigma(0)} \bigcup_{\substack{U \in \tau(x) \\ \alpha}} \bigcap_{\substack{x' \in U \cap C \\ 0 < \alpha' \leq \alpha}} \left(\frac{C - x'}{\alpha'} + V \right).$$

Как установлено в [3], конус Кларка – это $\forall\forall\exists$ -конус, т.е. для стандартного элемента h выполняется

$$h \in Cl(C,x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x' \in \mu_\tau(x)) \, (\forall \alpha > 0, \alpha \approx 0)(\exists h' \in \mu_\sigma(h)) x' + \alpha h' \in C.$$

Иными словами, мы приходим к выводу, что

$$Cl(C,x) = Li_{\tau(x)} \times \tau_{R_+(0)} \Gamma_C,$$

где Γ_C – это гомотетия:

$$(x',\alpha',h') \in \Gamma_C \Longleftrightarrow h' \in \frac{C-x'}{\alpha'} \quad (x',h' \in X; \alpha' > 0).$$

Последнее представление взято за исходное в [I,2].

ЛИТЕРАТУРА

I. ROCKAFELLAR R.T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions. – Canad. J. Math., 1980, v.32, N2, p.257-280.

2. DOLECKI SZ. Tangency and differentiation: some applications of convergence theory. – Annali di Matematica pura ed appl., 1982, v.I30, p.223-255.

3. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Инфинитезимальные касательные конусы. – Сиб. мат. журн., I985, т.26. № 6, с.67-76.

Поступила в ред.-изд. отдел
5.09.I985 г.