Выпуклый анализ и полуупорядоченные пространства

О ВКЛАДЕ А.Г.ПИНСКЕРА В ТЕОРИЮ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ВЕКТОРНУЮ ОПТИМИЗАЦИЮ

3 ноября 1985 года за несколько дней до своего восьмидесятилетия скончался известный советский математик доктор физико-математических наук профессор Арон Григорьевич Пинскер.

А.Г.Пинскер родился 13 ноября 1905 г. в селе Юрковщино Смоленской области в семье лесотехника. Трудовую деятельность А.Г.Пинскер начал на железной дороге в Смоленске, там же на рабфаке он получил среднее образование. Затем он учился в Московском университете. С 1930 г. А.Г.Пинскер преподавал математику в ленинградских вузах. В ряде институтов он возглавлял математические кафедры.

Функциональным анализом А.Г.Пинскер заинтересовался в семинаре, организованном Г.М.Фихтенгольцем в 30-х годах для преподавателей Института инженеров Гражданского Воздушного Флота. Вскоре после этого А.Г.Пинскер стал активным участником научного семинара Г.М.Фихтенгольца - Л.В.Канторовича при Ленинградском университете. С этого времени и началась научная деятельность А.Г.Пинскера, продолжавшаяся почти полвека.

В центре внимания участников семинара находилась создававшаяся в то время теория полуупорядоченных пространств и вопросы аналитического представления функционалов и операторов, в первую очередь - линейных. Первая работа А.Г.Пинскера (1938 г.) была посвящена вопросу об аналитическом представлении частично-аддитивных функционалов в пространстве измеримых функций, т.е. функционалов, для которых равенство $f(x+y)=f(x)+f(y)$ выполняется лишь для дизъюнктных x, y. Этой тематике были посвящены и две его совместные работы с Л.В.Канторовичем, опубликованные год спустя.

Надо отметить, что теория частично-аддитивных функционалов, называемых теперь ортогонально-аддитивными, получила интенсивное развитие за рубежом в последние 10-15 лет. В последние годы также широко изучаются различные абстрактные ортогональности и дизъюнктности. В связи с этим заметим, что, видимо, впервые аксиоматически определенное отношение дизъюнктности изучал А.Г.Пинскер, исходя из понятия дизъюнктности в полуупорядоченном пространстве. Этот факт является характерным. Многие идеи, выдвинутые А.Г.Пинскером еще в 30-40-е годы, не потеряли актуальности до настоящего времени.

В конце 30-х годов А.Г.Пинскер начал заниматься теорией полуупорядоченных пространств, в которой он быстро выдвинулся в число виднейших специалистов. В довоенные годы А.Г.Пинскер ввел ряд важнейших понятий этой теории: расширенное К-пространство, максимальное расширение, К-пространство счетного типа, дискретное и непрерывное К-пространство. А.Г.Пинскер доказал фундаментальную теорему о возможности погружения всякого К-пространства (а следовательно, и любой архимедовой векторной решетки) в расширенное К-пространство (аналогично тому, как пространство L^1 суммируемых функций на отрезке вкладывается в пространство S всех измеримых функций).

Многочисленные результаты А.Г.Пинскера постоянно докладывались им на ленинградском семинаре по функциональному анализу. Однако публикация ряда из них задержалась в связи с событиями Великой Отечественной Войны. Многие из этих результатов впервые увидели свет лишь в 1950 г. в известной монографии Л.В.Канторовича, Б.З.Вулиха, А.Г.Пинскера "Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах". Хотя с того времени в мировой литературе появилось несколько книг, содержащих систематическое изложение теории векторных решеток, монография Л.В.Канторовича, Б.З.Вулиха, А.Г.Пинскера до сих пор не превзойдена по богатству идей и конкретных результатов.

Трудно перечислить все, что сделал А.Г.Пинскер в теории полуупорядоченных пространств. Ему принадлежит ряд фундаментальных результатов по исследованию К-пространств, введенных ранее Л.В.Канторовичем. Например, он показал, что с точностью до континуум-гипотезы каждое К-пространство с теоремой о диагональной последовательности является регулярным. А.Г.Пинскер установил связь регулярности К-пространства с регулярностью его булевой алгебры компонент (полос). При этом им была получена следующая важная теорема, которую именуют часто теоремой

Келли (Келли передоказал ее в 1959 г., хотя ее можно найти в цитированной выше монографии 1950 г.): регулярная булева алгебра, на которой имеется строго положительная конечно-аддитивная мера, нормируема, т.е. обладает строго положительной счетно-аддитивной мерой.

Ряд работ А.Г.Пинскера посвящен изучению нормированных решеток, в частности абстрактных L -пространств (КВ-пространств с аддитивной нормой). В этих исследованиях выяснилась большая роль К-пространств с тотальным множеством порядково-непрерывных (вполне линейных) функционалов. Такие пространства называют пространствами А.Г.Пинскера. В одной из своих работ 1956 г. А.Г.Пинскер охарактеризовал в терминах порядка некоторые классы алгебр самосопряженных операторов.

В конце 40-начале 50-х гг. А.Г.Пинскер опубликовал несколько работ по теории полуупорядоченных групп. Он доказал фундаментальную теорему о том, что всякая К-группа может быть расширена до К-пространства, а также до конца исследовал строение произвольной К-группы.

Ряд результатов А.Г.Пинскера, относящихся к полуупорядоченным группам, нашел отражение в обзорной статье Л.В.Канторовича, Б.З.Вулиха, А.Г.Пинскера "Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства", опубликованной в 1951 г. в журнале "Успехи математических наук". В этом обзоре были также сформулированы некоторые нерешенные проблемы теории векторных решеток. Формулировка этих проблем стимулировала новые исследования.

С начала 60-х гг. А.Г.Пинскер постепенно переносит свои интересы в новую и актуальную область - выпуклый анализ. Одной из первых советских работ по выпуклому анализу была его статья "Пространство выпуклых множеств локально-выпуклого пространства", опубликованная в 1966 г. Впрочем, основные результаты этой работы докладывались автором еще в 1961 г. на 4-м Всесоюзном математическом съезде. Основная идея этой работы - рассмотрение пространства $\mathfrak{X}$, состоящего из пар выпуклых множеств некоторого локально-выпуклого пространства X . А.Г. Пинскер показал, что в множестве $\mathfrak{X}$ можно ввести алгебраические операции и порядок таким образом, что оно превращается в векторную решетку с локально-выпуклой топологией, являющейся продолжением топологии пространства X .

Примерно в тоже время А.Г.Пинскер предложил новую, весьма общую конструкцию "возведения в степень". На произвольном частично упорядоченном множестве P рассматривается некоторый класс "допустимых" вещественных функций. В множестве Φ этих функций вводится порядок и отношение эквивалентности. Оказывается, что фактор-множество, соответствующее этому отношению, можно рассматривать как положительную часть некоторого К-пространства Φ^*, которое обозначается через R^P. Если P - тривиально упорядоченное конечное множество из n элементов, то соответствующая степень совпадает с обычным пространством R^n.

Надлежащим образом выбирая P, можно получить любое расширенное К-пространство. В то же время упорядоченное множество P может быть погружено в полную булеву алгебру - базу соответствующего пространства R^P. Эта конструкция может быть обобщена и на случай, когда в роли основания выступает не вещественная прямая R, а любое метрическое пространство.

Последние два десятилетия научной деятельности А.Г.Пинскера были посвящены, в основном, проблемам оптимизации. На этом периоде деятельности А.Г.Пинскера уместно остановиться несколько подробнее.

Многие задачи оптимизации, естественным образом возникающие в различных областях науки, техники и экономики, допускают формализацию в виде обобщенных задач линейного программирования, в которых исходные данные и неизвестные представляют собой элементы некоторого К-пространства. К таким задачам относятся, в частности, динамические задачи с условиями, изменяющимися во времени, задачи транспортного типа и др.
В связи с этим А.Г.Пинскер ввел в рассмотрение задачу линейного программирования в К-пространствах, которая формулируется следующим образом.

При фиксированных элементах a_{ij}, b_i и c_j $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ К-пространства $\mathcal{X}$ определить вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$ из условий:

$$x_j \geq 0, \quad j=1,n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = b_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \to max!$$

Используя аппарат теории К-пространств, а также достаточно сложные и тонкие методы, А.Г.Пинскер доказал основную теорему о существовании решения задачи при естественном предположении ограниченности сверху целевой функции на (непустом) множестве ее планов. Для его нахождения предложен вычислительный метод, требующий решения конечного числа обычных "числовых" задач линейного программирования. Кроме того, предложен специальный метод решения для важного частного случая общей транспортной задачи в К-пространствах.

Теорема существования решений допускает ряд приложений, в частности к теории игр и теории равномерных приближений в К-пространствах.

Далее, каковы бы ни были элементы a_{ij} К-пространства $\mathscr{X}$, матрица $\| a_{ij} \|$ определяет некоторую матричную игру в $\mathscr{X}$. Используя обычные определения оптимальных стратегий и цены игры (имеющие смысл в упорядоченных пространствах), А.Г.Пинскер доказал существование решения такой "абстрактной" матричной игры.

Наконец, если a_{ij} - фиксированные числа, а b_i и x_j - переменные элементы из некоторого К-пространства $\mathscr{X}$, то для линейных функций

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

относительно векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{X}^n$ существует "чебышевская" точка, т.е. такая точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathscr{X}^n$, что

$$\sup_i |f_i(x^*)| \leq \sup_i |f_i(x)|, \quad x \in \mathscr{X}^n.$$

Систематически и полно А.Г.Пинскером исследованы задачи линейного программирования в К-пространстве вещественных функций, заданных на произвольном множестве F, а также их различные частные случаи.

В последние годы А.Г.Пинскер провел обстоятельные исследования следующей параметрической задачи в компактах.

Пусть Q - хаусдорфово компактное топологическое пространство, $a_{ij}(t), b_i(t)$ и $c_j(t) (i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n)$ - вещественные непрерывные функции на Q, причем обычные "числовые" задачи линейного программирования, состоящие в максимизации целевой функции

$$f[x(t)] = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)x_j(t),\ x(t)=(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) = b_i(t),\ x_j(t) \geq 0.$$

имеют решение при всех $t \in Q$.

Пусть $\varphi(t)$ – максимальное значение целевой функции задачи в точке t . Тогда абстрактная задача имеет решение, если при некотором $t^* \in Q$ при всех $t \in Q$ имеют место неравенства $\varphi(t^*) \geq \varphi(t)$. Для случая, когда Q – метрический компакт, доказана разрешимость этой задачи. Недавно этот результат перенесен на случай любого компакта.

С рассмотренной задачей связана параметрическая матричная игра, в которой элементы $a_{ij}(s,t)$ – вещественные и непрерывные функции на произведении $P \times Q = \{(s,t)\}$ компактов P и Q . Если $v(s,t)$ – цена этой игры при заданных s и t , то найдутся такие точки (s_1^*, t_1^*) и (s_2^*, t_2^*) , что

$$v(s_1^*, t_1^*) \leq v(s,t) \leq v(s_2^*, t_2^*)\ (s \in P,\ t \in Q).$$

Разработанная А.Г.Пинскером теория обобщенных задач линейного программирования позволяет ввести и исследовать новые экономико-математические модели линейной оптимизации, имеющие значение в таких вопросах планирования и управления экономикой, как задачи размещения производства в более общей, чем обычно, постановке, оптимизации пропорций выпуска и затрат ресурсов (обобщение классической задачи Л.В.Канторовича о комплектном выпуске продукции), рациональной организации перевозок непрерывно распределенного груза при наличии дополнительных (возможно нелинейных) ограничений, оптимального выбора модифицированной продукции, минимизации транспортных затрат на перевозки продукции от производителей на склады ограниченной емкости и многие другие.

К сожалению, ряд интересных мыслей, высказанных в научных докладах А.Г.Пинскером, до сих пор еще не получили развития.

До своего последнего дня А.Г.Пинскер продолжал плодотворно работать. Друзья и ученики навсегда сохранят в памяти светлый образ замечательного человека, математика и гражданина Арона Григорьевича Пинскера.

Л.В.Канторович, Г.П.Акилов, А.И.Векслер, Д.А.Владимиров, М.К.Гавурин, С.С.Кутателадзе, Г.Ш.Рубинштейн