УДК 517.97

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛЯХ, УЧИТЫВАЮЩИХ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

М.А.Мамедов

В работе рассматривается модель экономической динамики с учетом загрязнения окружающей среды. При изучении таких задач с бесконечным горизонтом планирования большой интерес представляют сведения о поведении оптимальной траектории на бесконечности. В [I] рассмотрены модели контроля над загрязнением, в которых максимизируется дисконтированная сумма полезности и высказано предположение о сходимости оптимальной траектории к положению равновесия. Доказательство подобных предположений достаточно сложно, причем сложность обуславливается в основном выбором функционала. В [2] для одной модели с дискретным временем выбран другой функционал, представляющий собой аналог терминального функционала для бесконечного горизонта планирования. Там доказана теорема о сходимости оптимальной траектории к точке равновесия.

Модель, рассматриваемая в работе, записывается в виде задачи оптимального управления в непрерывном времени. Она является в некотором смысле более общей, чем аналогичная модель в [I]. Однако в отличие от [I] здесь максимизируется тот же функционал, что и в [2]. Отметим, что при построении модели мы используем не только работу [I], но и [3].

Перейдем к формулировке модели. Пусть в некотором регионе расположено n промышленных объектов. Во время производства этими объектами выбрасывается m видов загрязнительных веществ. Значит, возникает необходимость управлять производством с учетом загрязнения окружающей среды. Опишем модель, управление которой осуществляется с помощью процессов очистки, а именно, некоторая часть общей продукции затрачивается на борьбу с загрязнением.

Через $x_i(t)$ обозначим объем основных фондов i-го объекта, через $y_j(t)$ – уровень загрязнения j-м видом вещества в момент времени t. Для каждого объекта численность рабочих предполагается постоянной. Поэтому производственная функция i-го объекта $F_i(x_i, y)$ зависит только от x_i и от $y=(y_1, \dots, y_m)$. Действие уровня загрязнения на производственный процесс подробнее рассматривается, например, в [4].

Общий выпуск $P_i(t)=F_i(x_i(t), y(t))$ i-го объекта распределяется следующим образом:

$$P_i(t)=I_i(t)+W_i(t)+V_i(t),$$

где $I_i(t)$ выделяется на инвестиции, $W_i(t)$ – на потребление, $V_i(t)$ – на борьбу с загрязнением. Общая сумма $\sum_{i=1}^{n} V(t)$ распределяется между предприятиями с помощью коэффициентов $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$.

Скорость выбытия основных фондов $x_i(t)$ при заданном уровне загрязнения $y(t)$ обозначим через $a_i(x_i(t), y(t))$. Действие загрязнения на износ основных фондов изучается в [5]. Через b_j ($b_j > 0$) обозначим скорость убывания j-го вида загрязнителя в результате естественных причин. При заданных векторах $x(t)=(x_1(t), \dots, x_n(t))$, $y(t)$ и сумме $V(t)=\sum_{i=1}^{n} V_i(t)$, предназначенной для борьбы с загрязнением, повышение уровня j-го вида загрязнителя задается функцией $\Phi_j(x(t), y(t), V(t))$. Тогда модель описывается следующим образом:

$$\dot{x}_i=\alpha_i \sum_{k=1}^{n} [F_k(x_k, y)-W_k-V_k]-a_i(x_i, y), \; i=\overline{1,n},$$
$$\dot{y}_j=\Phi_j(x, y, V)-b_j y_j, \; j=\overline{1,m}, \; t\in[0, \infty), \tag{1}$$

при следующих ограничениях на управляющие параметры α_i, W_i, V_i:

$$\alpha_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1, \; W_i \geq \widehat{W}_i \geq 0, \; V_i \geq 0,$$
$$W_i+V_i \leq F_i(x_i, y), \; i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь W_i - минимальное потребление по продукту $P_i(t)$.

Предположим, что функции $F_i(x_i,y)$, $a_i(x_i,y)$, $\Phi_j(x,y,V)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Функция $F_i(x_i,y)$ вогнута, функция $a_i(x_i,y)$ выпукла ($i=\overline{1,n}$) и для любого y выполняются неравенства:

$$F_i(x_i,y)\le F_i(x_i,0),\quad F_i(0,y)=0,$$

$$a_i(x_i,y)\ge a_i(x_i,0)\ge a_i^0 x_i,\ a_i^0>0,\ i=\overline{1,n}.$$

2) Для любых x, y, V выполняются неравенства

$$\Phi_j(x,y,V)\le\Phi_j(x,0,V),\quad j=\overline{1,m}.$$

Из вогнутости $F_i(x_i,y)$ вытекает, что существуют такие $c_i\ge 0$, $p_i\ge 0$, что

$$F_i(x_i,0)\le c_i x_i+p_i. \tag{3}$$

Кроме этих условий предположим, что существует хотя бы одно решение системы (1), соответствующее ограничениям (2), определенное на $[0,\infty)$.

Функции $\Phi_j(x,y,V)$ могут иметь сложную структуру. Учитывая результаты работ [1] и [3], имеет смысл рассмотреть, в частности, функции вида

$$\Phi_j(x,y,V)=\sum_{i=1}^{n}k_{ji}[F_i(x_i,y)-d\beta_i V]. \tag{4}$$

Здесь k_{ji} - коэффициенты, показывающие повышение уровня j-го вида загрязнителя при единичном выпуске продукта $P_i(t)$; β_i - доля средств V, выделенных на борьбу с загрязнением, используемая на объекте i, $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\le 1$; d показывает, во сколько раз уменьшается выпуск загрязнительных веществ при затрате единицы продукта на борьбу с загрязнением. Предположим, что $d\ge 1$.

Таким образом, мы построили модель (1),(2) и ее частный случай (1),(2),(4). В этой модели загрязняющее вещество участвует в производстве как побочный продукт и учитывается только запас загрязнителей. Можно построить и другие модели, в которых, например, контроль над загрязнением осуществляется с помощью выбора производственного процесса, а загрязнитель участвует в производстве как промежуточный продукт; учитывается как запас, так и поток загрязнителей и т.д. Некоторые такие модели описаны в [I]. Можно показать, что все эти модели могут быть представлены в виде дифференциального включения

$$\dot{z} \in a(z), \ t \in [0, \infty). \tag{5}$$

Так, например, для модели (I),(2) $z = (x, y)$, а множество $a(z)$ определяется из (I),(2). Поэтому в дальнейшем будем изучать модель (5).

Под решением (траекторией) системы (5) понимается абсолютно непрерывная функция $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$, удовлетворяющая почти всюду, на каждом конечном отрезке, включению $\dot{z}(t) \in a(z(t))$. Пусть выполняются условия:

а) $a(z)$ - компактное множество в R^n при каждом $z \in R^n$, а многозначное отображение $a(z)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.

б) Существуют решения системы (5) и каждое решение ограничено на $[0, \infty)$.

в) Если $\tilde{z}_k \in a(z_k)$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_k = 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_k \tilde{z}_k = 0$, то существуют такие $\lambda_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$, что $co\, a\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_k\right) \ni$ $\ni 0$, где co - выпуклая оболочка.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Условие в) выполняется, если многозначное отображение $a(z)$ имеет выпуклый график. Можно построить простые примеры, в которых $a(z)$ не имеет выпуклого графика (даже $a(z)$ не выпуклое множество), но условие в) выполняется. Как увидим ниже, условие в) выполняется в модели (I),(2),(4). Пусть $z(t)$ является решением системы (5). Определим функционал

$$J(z(\cdot)) = \liminf_{t \to \infty} u(z(t)). \tag{6}$$

Здесь $u(z)$ - вогнутая функция. Этот функционал был рассмотрен в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Траектория $z(t)$, исходящая из точки z^0, называется асимптотически оптимальной, если она дает максимальное значение функционалу (6) среди всех траекторий, исходящих из z^0:

$$J(z(\cdot)) \to max. \tag{7}$$

ЛЕММА I. *При $n=1$ из любой точки z^0 исходит асимптотически оптимальная траектория.*

Используя результаты [6], при некоторых дополнительных ограничениях можно доказывать теоремы существования асимптотически оптимальных траекторий.

Если $P(z(\cdot))$ – множество предельных точек траектории $z(t)$, то функционал (6) представляется в виде

$$J(z(\cdot))=\min_{z\in P(z(\cdot))} u(z). \tag{8}$$

Через $\mathcal{M}$ обозначим множество обобщенных стационарных точек: $\mathcal{M}=\{z/ co\, a(z)\ni 0\}$. Определим множество $G^*=\{z^*\in \mathcal{M}/ u(z^*)=J^*=\max_{z\in\mathcal{M}} u(z)\}$. Предполагаем, что множество $\mathcal{M}$ ограничено. Если $u(z)$ строго вогнута и $\mathcal{M}$ выпукло, то G^* состоит из одной точки z^*.

ЛЕММА 2. Пусть B – выпуклое множество и $0\notin a(z), z\in B$. Тогда

$$0\notin co \bigcup_{z\in B} a(z).$$

Доказательство непосредственно вытекает из условия в).

ЛЕММА 3. Пусть $z(t)$ – любая траектория системы (5). Тогда

$$co\, P(z(\cdot))\cap \mathcal{M}\neq\emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть $co\, P(z(\cdot))\cap \cap\mathcal{M}=\emptyset$. Тогда можно найти такое $\varepsilon>0$, что $S_\varepsilon(co\, P(z(\cdot)))\cap\mathcal{M}=\emptyset$. Здесь $S_\varepsilon(A)$ – замкнутая ε-окрестность множества A. Обозначим $A_\varepsilon=\bigcup_{z\in S_\varepsilon(co P(z(\cdot)))} a(z)$. Из леммы 2 вытекает, что $co A_\varepsilon \not\ni 0$. Значит, можно найти такой линейный функционал q, который строго отделяет множество A_ε от нуля, т.е.

$$(q,z)\geq a>0,\ z\in A_\varepsilon. \tag{9}$$

Пусть в точке $\tilde{z}\in P(z(\cdot))$ выполняется

$$(q,\tilde{z})=\max_{z\in P(z(\cdot))}(q,z). \tag{10}$$

Если $P(z(\cdot))$ состоит из одной точки, то утверждение леммы 3 очевидно. Поэтому предположим, что множество $P(z(\cdot))$ содержит точку $\tilde{\tilde{z}}$, отличную от $\tilde{z}$. Можно считать, что $\|\tilde{z}-\tilde{\tilde{z}}\|\geq 2\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon_1\leq\frac{1}{2}\varepsilon$. Через t_1 обозначим момент времени, для которого $z(t_1)\in S_{\varepsilon_1}(\tilde{z})$. Поскольку $\tilde{\tilde{z}}$ – также предельная точка траектории $z(t)$, то траектория выходит из $S_\varepsilon(\tilde z)$ и при некоторых $t > t_1$ выполняется $\|z(t)-\tilde z\| = \varepsilon$. Через $\tilde t_1 \geq t_1$ обозначим наименьшую такую точку (она существует). Значит, $\|z(\tilde t_1) - \tilde z\| = \varepsilon$. Поскольку $\tilde z$ - предельная точка, то при некотором $t_2 \geq \tilde t_1$ имеем $z(t_2) \in S_{\varepsilon_1}(\tilde z)$. Аналогичным образом построим точку $\tilde t_2 \geq t_2$, где $\|z(\tilde t_2) - \tilde z\| = \varepsilon$. Продолжая этот процесс, можно найти момент времени t_k и момент времени $\tilde t_k$ такие, что $\tilde t_k \geq t_k \geq \tilde t_{k-1}$, $t_k \to \infty$, $z(t_k) \to \tilde z$, $z(t_k) \in S_{\varepsilon_1}(\tilde z)$ и $\|z(\tilde t_k) - \tilde z\| = \varepsilon$. Можно также считать, что $z(\tilde t_k) \to z'$. Тогда $z' \in P(z(\cdot))$; A_ε - ограниченное множество, т.е. $A_\varepsilon \subset S_R(0)$ при $R > 0$. Поэтому, учитывая построение точки $t_k, \tilde t_k$, получаем

$$\varepsilon - \varepsilon_1 \leq \|z(\tilde t_k) - z(t_k)\| \leq \int_{t_k}^{\tilde t_k} \|\dot z(t)\| dt \leq R(\tilde t_k - t_k).$$

Отсюда $\tilde t_k - t_k \geq \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_1}{R}$.

Таким образом, учитывая (9), получим

$$(q, z(\tilde t_k)) - (q, z(t_k)) = \int_{t_k}^{\tilde t_k} (q, \dot z(t)) dt \geq a(\tilde t_k - t_k) \geq \frac{a(\varepsilon - \varepsilon_1)}{R}.$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$(q, z') - (q, \tilde z) \geq \frac{a(\varepsilon - \varepsilon_1)}{R} > 0.$$

А это противоречит (10). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполняются условия а) - в) и $z^*(t)$ - такая траектория, что $J(z^*(\cdot)) = J^*$. Тогда $z^*(t)$ - асимптотически оптимальная траектория в задаче (5) - (7). Если дополнительно $u(z)$ - строго вогнутая функция и M - выпуклое множество, то $z^*(t) \to z^*$, $t \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z(t)$ - любая траектория системы (5) с некоторым начальным условием $z(0) = z^0$. Тогда из леммы 3 вытекает, что $co\, P(z(\cdot)) \cap M \neq \emptyset$. Поэтому

$$J(z(\cdot)) = \min_{z \in P(z(\cdot))} u(z) = \min_{z \in co P(z(\cdot))} u(z) \leq \min_{z \in co P(z(\cdot)) \cap M} u(z) \leq$$

$$\le \max_{z\in M} u(z) = J^* = J(z^*(\cdot)).$$

Отсюда вытекает асимптотическая оптимальность траектории $z^*(t)$. Докажем сходимость $z^*(t)\to z^*$, т.е. $P(z^*(\cdot))=\{z^*\}$, если $u(z)$ – строго вогнутая функция и M – выпуклое множество.

Пусть $L=\{z \mid u(z)\ge u(z^*)\}$. Тогда $L\cap M=\{z^*\}$. Так как множества L, M выпуклы, то найдется такая линейная функция p, что $(p, z-z^*)\ge 0$ при $z\in L$ и $(p, z-z^*)\le 0$ при $z\in M$. Поскольку $z^*(t)$ ограничена, берем $R>0$ таким образом, чтобы $z^*(t)\in S_R(0)$, $t\in[0,\infty)$. Обозначим $A(B_\delta)=\bigcup_{z\in B_\delta} a(z)$, где $B_\delta=\{z \mid z\in S_R(0), (p, z-z^*)\ge\delta\}$. При $\delta>0$ имеем $0\notin a(z)$, $z\in B_\delta$. Поэтому $0\notin A(B_\delta)$ и существует такой линейный функционал q_δ, что $\|q_\delta\|=1$ и $(q_\delta, z)>0$ при $z\in A(B_\delta)$.

Через $z_\delta^1, z_\delta^2\in P_\delta(z^*(\cdot))=B_\delta\cap P(z^*(\cdot))$ обозначим те точки, для которых

$$(q_\delta, z_\delta^1)=\max_{z\in P_\delta(z^*(\cdot))}(q_\delta, z),\quad (q_\delta, z_\delta^2)=\min_{z\in P_\delta(z^*(\cdot))}(q_\delta, z). \tag{II}$$

Покажем, что $(p, z_\delta^1-z^*)>\delta$ или $(p, z_\delta^2-z^*)>\delta$ не может быть.

Пусть $(p, z_\delta^1-z^*)>\delta$. Тогда для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется $S_\varepsilon(z_\delta^1)\subset B_\delta$. Кроме того, поскольку $A(B_\delta)$ замкнуто, то $(q_\delta, z)>a_\delta>0$, $z\in A(B_\delta)$. Тогда, как и в доказательстве леммы 3, можно построить такую точку $z^1\in P(z^*(\cdot))$, что

$$(q_\delta, z^1)-(q_\delta, z_\delta^1)>0.$$

А это противоречит определению z_δ^1. Значит, $(p, z_\delta^1-z^*)=\delta$. Аналогично доказывается, что $(p, z_\delta^2-z^*)=\delta$. С другой стороны, $u(z_\delta^1)\ge u(z^*)$ и $u(z_\delta^2)\ge u(z^*)$. Поэтому нетрудно получить, что $z_\delta^1\to z^*$, $z_\delta^2\to z^*$ при $\delta\to 0$. Возьмем последовательность $\delta_m\to 0$ такую, что $q_{\delta_m}\to q^1$, $m\to\infty$. Очевидно $\|q^1\|=1$. Тогда, подставив δ_m вместо δ в (II) и переходя к пределу, получаем

$$(q^1, z^*)=\max_{z\in P(z^*(\cdot))}(q^1, z)=\min_{z\in P(z^*(\cdot))}(q^1, z). \tag{I2}$$

Эти равенства показывают, что множество $P(z^*(\cdot))$ содержится в подпространстве $\Gamma_1=\{z/(q^1, z-z^*)=0\}$. Для достаточно малых $\delta>0$ имеет место следующее представление: $q_\delta = =\lambda^1_\delta q^1+\lambda^2_\delta q^2_\delta$, где $\lambda^2_\delta>0$, q^2_δ – перпендикулярный вектор к q^1: $(q^2_\delta, q^1)=0$ и $\|q^2_\delta\|=1$. Действительно, если это представление не имеет места ни при каких $\delta>0$, то $\lambda^2_\delta=0$, и получаем $q_\delta=\lambda^1_\delta q^1$, т.е. (q_δ, z) постоянен на множестве $P(z^*(\cdot))$. Значит, если множество $P(z^*(\cdot))$ содержит точки, отличные от z^*, то нарушается одно из равенств $(p, z^1_\delta - z^*)=\delta, (p, z^2_\delta-z^*)=\delta$. Из этого представления, учитывая (II) и (I2), получаем

$$(q^2_\delta, z^1_\delta)=\max_{z\in P_\delta(z^*(\cdot))}(q^2_\delta, z), \quad (q^2_\delta, z^2_\delta)=\min_{z\in P_\delta(z^*(\cdot))}(q^2_\delta, z).$$

Если выбрать последовательность $\delta_m \to 0$ такую, что $q^2_{\delta_m}\to q^2; \|q^2\|=1$, то, переходя к пределу, получаем

$$(q^2, z^*)=\max_{z\in P_\delta(z^*(\cdot))}(q^2, z)=\min_{z\in P_\delta(z^*(\cdot))}(q^2, z).$$

Значит, множество $P(z^*(\cdot))$ содержится также в подпространстве $\Gamma_2=\{z/(q^2, z-z^*)=0\}$. Очевидно $(q^2, q^1)=0$. Продолжая этот процесс, можем построить такие взаимно перпендикулярные векторы $q^1, q^2, \dots, q^n$, что множество $P(z^*(\cdot))$ содержится в пересечении подпространств $\Gamma_k=\{z/(q^k, z-z^*)=0\}$, $k=\overline{1,n}$, и $(q^i, q^j)=0$ при $i\neq j$, $\|q^k\|=1, k=\overline{1,n}$. Значит, множество $P(z(\cdot))$ состоит из одной точки z^*. Теорема доказана.

Теперь вернемся к моделям (I),(2) и (I),(2),(4). Чтобы применить доказанную теорему, надо проверить условия б) и в).

ЛЕММА 4. Пусть выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} c_k < a^0 = \min_{1\le i\le n} a^0_i. \tag{I3}$$

Тогда любая траектория системы (I),(2) $(x(t), y(t))$ с начальным условием $x(0)=x^0, y(0)=y^0$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е.

$$\|x(t)\|\le M_1, \quad \|y(t)\|\le M_2, \quad t\in[0,\infty),$$

где постоянные M_1, M_2 зависят только от точки (x^0, y^0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия I) получаем, что

$$\dot{x}_i \le \sum_{k=1}^{n} F_k(x_k, 0) - a_i(x_i, 0) \le \sum_{k=1}^{n} c_k x_k - a^0 x_i + \sum_{k=1}^{n} p_k .$$

Определим $z(t) = max\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$. Очевидно, что $z(t)$ - абсолютно непрерывная функция и при каждой фиксированной t, где $\dot{z}(t)$ существует, для некоторого i выполняется $z(t) = x_i(t)$, $\dot{z}(t) = \dot{x}_i(t)$. Тогда имеем

$$\dot{z}(t) \le \left(\sum_{k=1}^{n} c_k - a^0\right) z(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k .$$

Отсюда, учитывая (I3), получаем, что $z(t)$ и тем самым $x(t)$ ограничена: $\|x(t)\| \le M_1, t \in [0, \infty)$ и M_1 зависит только от x^0.

Учитывая ограниченность $x(t)$ и используя условия I), 2), получаем второе неравенство утверждения леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (I3) выполняется, если, например, производственная функция удовлетворяет условию $\frac{dF_i(x_i, 0)}{dx_i} \to 0$ при $x_i \to \infty$. В этом случае в (3) за счет увеличения p_i можно уменьшать c_i до тех пор, пока не выполняется (I3).

ЛЕММА 5. Для модели (I), (2), (4) выполняется условие в).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для λ_ℓ, $\ell = \overline{1, n+m+1}$, $\sum_\ell \lambda_\ell = 1$, $x^\ell = (x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell)$, $y^\ell = (y_1^\ell, \ldots, y_m^\ell)$, $\alpha_i^\ell, \beta_i^\ell, W_i^\ell, V_i^\ell$, $i = \overline{1, n}$, выполняется

$$\sum_\ell \lambda_\ell \begin{pmatrix} \alpha_i^\ell \sum_{k=1}^{n} [F_k(x_k^\ell, y^\ell) - W_k^\ell - V_k^\ell] - a_i(x_i^\ell y^\ell) \\ \sum_{i=1}^{n} k_{ji} [F_i(x_i^\ell, y^\ell) - d\beta_i^\ell V^\ell] - b_j y_j^\ell \end{pmatrix} = 0. \tag{I4}$$

Покажем, что для $x^\lambda = \sum_\ell \lambda_\ell x^\ell$, $y^\lambda = \sum_\ell \lambda_\ell y^\ell$ выполняется $0 \in a(x^\lambda, y^\lambda)$. Из условия I) получаем

$$\sum_\ell \lambda_\ell F_k(x_k^\ell, y^\ell) = F_k(x_k^\lambda, y^\lambda) - \varepsilon_i, \ \varepsilon_i \ge 0,$$

$$\sum_\ell \lambda_\ell a_i(x_i^\ell, y^\ell) = a_i(x_i^\lambda, y^\lambda) + \delta_i, \ \delta_i \ge 0.$$

В (I4) суммируем первые n компоненты. Тогда для

$$V^\lambda = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_\ell \lambda_\ell V_k^\ell + \varepsilon_k + \delta_k \Big) \tag{I5}$$

выполняется

$$0 \le V^\lambda \le \sum_{k=1}^{n} \big[F_k(x_k^\lambda, y^\lambda) - \tilde{W}_k - a_k(x_k^\lambda, y^\lambda) \big]. \tag{I6}$$

При

$$\alpha_i^\lambda = \frac{a_i(x_i^\lambda, y^\lambda)}{\sum_{k=1}^{n} [F_k(x_k^\lambda, y^\lambda) - \tilde{W}_k] - V^\lambda}, \quad i = \overline{1,n},$$

выполняется

$$\alpha_i^\lambda \Big\{ \sum_{k=1}^{n} [F_k(x_k^\lambda, y^\lambda) - \tilde{W}_k] - V^\lambda \Big\} - a_i(x_i^\lambda, y^\lambda) = 0 \tag{I7}$$

и из (I6)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^\lambda \le 1.$$

Из (I4)

$$\sum_\ell \lambda_\ell \sum_{i=1}^{n} k_{ji} \big[F_i(x_i^\ell, y^\ell) - d\beta_i^\ell V^\ell \big] - b_j y_j^\lambda = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{I8}$$

Обозначим $\bar{\beta}_i^\lambda = \sum_\ell \lambda_\ell \beta_i^\ell V^\ell / \sum_\ell \lambda_\ell V^\ell$. Очевидно $\sum_{i=1}^{n} \bar{\beta}_i^\lambda \le 1$.

Тогда первое слагаемое в (I8) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji} F_i(x_i^\lambda, y^\lambda) - \sum_{i=1}^{n} k_{ji} \Big(\varepsilon_i + \bar{\beta}_i^\lambda d \sum_\ell \lambda_\ell V^\ell \Big). \tag{I9}$$

Пусть $\beta_i^\lambda \ge 0$ такое, что

$$\varepsilon_i + \bar{\beta}_i^\lambda d \sum_\ell \lambda_\ell V^\ell = d\beta_i^\lambda V^\lambda, \quad i = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Здесь, учитывая (I5), нетрудно получить

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i^\lambda \le 1.$$

Подставив (I9),(20) в (I8), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji} \big[F_i(x_i^\lambda, y^\lambda) - d\beta_i^\lambda V^\lambda \big] - b_j y_j^\lambda = 0. \tag{2I}$$

Из (I7) и (2I) вытекает, что $0 \in a(x^\lambda, y^\lambda)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Многозначное отображение $a(x,y)$ для модели (I),(2),(4) может иметь невыпуклый график. В то же время условие в) для этого отображения выполняется.

Множество $a(x,y)$ в модели (I),(2),(4) выпукло. Поэтому множество стационарных точек $\mathcal{M}$ состоит из тех точек (x,y), для которых существуют такие $\alpha_i, \beta_i, W_i, V_i$, удовлетворяющие условию (2), что выполняются равенства

$$\alpha_i \sum_{k=1}^{n} [F_k(x_k,y) - W_k - V_k] - a_i(x_i,y) = 0,\ i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ji} [F_i(x_i,y) - \alpha\beta_i V] - b_j y_j = 0,\ j = \overline{1,m}.$$

Нетрудно убедиться в том, что из условия (I3) вытекает ограниченность множества $\mathcal{M}$. Из доказательства леммы 5 получается, что множество $\mathcal{M}$ выпукло. Таким образом, для модели (I),(2),(4) множество $\mathcal{M}$ есть выпуклый компакт. Значит, для задач (I),(2),(4),(7) справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполняются условия* (I) *и* (I3). *Тогда для любой траектории* $(x^*(t), y^*(t))$, *исходящей из* (x^0, y^0), *справедливо неравенство* $\mathcal{J}(x^*(\cdot), y^*(\cdot)) \leq \mathcal{J}^*$. *Если дополнительно* $u(x,y)$ *- строго вогнутая функция и* $\mathcal{J}(x^*(\cdot), y^*(\cdot)) = \mathcal{J}^*$, *то* $x^*(t) \to x^*$, $y^*(t) \to y^*$ *при* $t \to \infty$. *Здесь* $u(x^*, y^*) = \max\limits_{(x,y)\in\mathcal{M}} u(x,y) = \mathcal{J}^*$.

Отметим, что условие в) выполняется для моделей, описанных в [I]. Поэтому, обеспечив условие б), для этих моделей с функционалом (6) можно применить доказанную теорему.

Автор благодарен А.М.Рубинову, под руководством и при постоянной помощи которого выполнена данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. КИЛЕР Э., СПЕНС М., ЗЕКХАУЗЕР П. Оптимальный контроль над загрязнением окружающей среды. - В кн.: Математическая экономика. М.: Мир, 1974, с.46-63.
2. ЛЯПУНОВ А.Н. Асимптотически-оптимальные траектории для выпуклых отображений. - В кн.: Оптимальные модели в системном анализе. Вып. 9. М.: ВНИИСИ, 1983, с.74-80.
3. МАРЧУК Г.И. Математическое моделирование в проблеме окру-

жающей среды. - М.: Наука, 1982.
4. Охрана окружающей среды: Модели управления чистотой природной среды. - М.: Экономика, 1977.
5. Актуальные проблемы охраны окружающей среды. - Киев: Наукова думка, 1979.
6. ФИЛИППОВ А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. - Вестник Московск. ун-та. Сер. математика, механика, астрономия, 1959, № 2, с.25-32.

Поступила в ред.-изд. отдел
14.06.1985 г.