Модели динамики и равновесия

УДК 330.115

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА. I

А.Я.Заславский

Рассмотрим следующую модель леонтьевского типа. Моделируемая экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит разные продукты. Фазовое пространство модели – конус $(R^n_+)^n$. Вектор $x=(x^1,\dots,x^n)\in(R^n_+)^n$ является состоянием модели, вектор $x^i=(x^{ij})\in R^n_+$ – вектором ресурсов, находящимся в распоряжении i-й отрасли. Производственная деятельность i-й отрасли описывается с помощью суперлинейной непрерывной производственной функции $\Phi^i:R^n_+\to R_+$ и диагональной матрицы A^i, на диагонали которой стоят числа $\nu^{ij}\in[0,1]$ $(j=1,\dots,n)$. Предполагается, что $\Phi^i(x)>0$ тогда и только тогда, когда $x\in K$, где $K=\{y\in R^n: y_i>0\ (i=1,\dots,n)\}$. Производственное отображение определяется следующим образом:

$$a(x)=\{y=(y^i)\in(R^n_+)^n: 0\le y^i\le A^i x^i+d^i,$$

$$d^i=(d^{ij})\ge 0,\ \sum_{i=1}^n d^{ij}\le\Phi^j(x^j),\quad j=1,\dots,n\},$$

где $x=(x^1,\dots,x^n)\in(R^n_+)^n$.

В работе изучаются магистральные свойства траекторий отображения a. Это отображение порождает модель Неймана – Гейла [1,2]. Оно введено в рассмотрение в [3].

1. Обозначим через $\Pi(R^n_+)$ совокупность всех непустых замкнутых подмножеств R^n_+, для $x\in R^n_+$ и $r>0$ положим $B(x,r)=\{y\in R^n:\|x-y\|\le r\}$. Рассмотрим суперлинейное нормальное отображение $b: R^n_+\to\Pi(R^n_+)$, неймановский

темп роста которого равен α, причем существует состояние равновесия $(\alpha, (X, \alpha X), p)$ такое, что $p \in K$ [I,2]. В дальнейшем нам понадобится

ЛЕММА I. Пусть (x_t) – траектория отображения b, имеющая средний темп роста α; Ω (соответственно Ω_1) – множество предельных точек последовательности $\{\alpha^{-t} x_t\}$ (соответственно $\{\alpha^{-t}(x_t, x_{t+1})\}$). Тогда для любого $y_0 \in \Omega$ (соответственно $(y_0, y_1) \in \Omega_1$) существует последовательность $\{y_t\}$ $(t=0,\pm 1,\ldots)$ такая, что $y_t \in \alpha^t \Omega$, $y_{t+1} \in b(y_t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I4.4 [I] множество Ω ограничено, причем $0 \notin \Omega$. Для любого $x \in \Omega$ выполняется $(p, x) = \lim (p, \alpha^{t} x_t) > 0$. Пусть $y_0 \in \Omega$ (соответственно $(y_0, y_1) \in \Omega_1$). Существует последовательность $\{t_m\}$, для которой $y_0 = \lim\limits_{m\to\infty} \alpha^{-t_m} x_{t_m}$ (соответственно $(y_0, y_1) = \lim\limits_{m\to\infty} \alpha^{t_m}(x_{t_m}, x_{t_m+1})$). Рассмотрим последовательность $\{X^m\}$, где $X^m = (x^m_{-t_m}, \ldots, x^m_0, \ldots)$, $x^m_i = \alpha^{-t_m} x_{i+t_m}$ $(i \geq -t_m)$.

Зафиксируем целое число i и рассмотрим множество $\{x^m_i : m \geq 0, t_m \geq -i\}$. Это множество ограничено. Применяя диагональный процесс, выделим из последовательности $\{X^m\}$ подпоследовательность, сходящуюся покоординатно к последовательности $\{y_t\}$ $(t=0,\pm 1)$. Нетрудно видеть, что $y_{t+1} \in a(y_t)$, $\alpha^{-t} y_t \in \Omega$ при любом целом t. Лемма доказана.

2. Рассмотрим производственное отображение $a : (R^n_+)^n \to \Pi((R^n_+)^n)$, которое определяется диагональными матрицами A^i и производственными функциями Φ^i. В [3] установлен вид двойственного отображения a'. Приведем формулировки двух результатов из [3], которые нам понадобятся в дальнейшем. Для $G = (g^1, \ldots, g^n) \in (R^n_+)^n$ положим $z^s(G) = \max\limits_i g^{is}$ $(s = 1, \ldots, n)$, $z(G) = (z^i(G))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I [3]. Пусть $G = (g^i) \in (R^n_+)^n$, где $g^i = (g^{i1}, \ldots, g^{in})$; $F = (f^1, \ldots, f^n) \in (R^n_+)^n$, а $f^i = (f^{i1}, \ldots, f^{in})$. Включение $G \in a'(F)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$f^i \in A^i g^i + z^i(G) \partial \Phi^i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [3]. Пусть $y \in a(x)$, $G \in a'(F)$, причем $x=(x^i)$, $y=(y^i)$, где $0 \le y^s \le A^s x^s + d^s$, $d^s \ge 0$, $\sum_s d^{si} \le \Phi^i(x^i)$. Кроме того, $G=(g^i)$, $F=(f^i)$; здесь $g^s=(g^{si})$, $f^s=(f^{si})$. Равенство $(F,x)=(G,y)$ имеет место тогда и только тогда, когда:

(а) при каждом $s=1,\ldots,n$ выполняется

$$(f^s - A^s g^s, u) \ge r^s(G)\,\Phi^s(u) \quad (u \ge 0), \tag{1}$$

$$(f^s - A^s g^s, x^s) = r^s(G)\,\Phi^s(x^s); \tag{2}$$

(б) при каждых s, $i=1,\ldots,n$ выполняется $d^{si}(r^i(G) - g^{si}) = 0$;

(в) $r^i(G)\,(\Phi^i(x^i - \sum_s d^{si}) = 0 \quad (i=1,\ldots,n)$;

(г) $(g^i, A^i x^i + d^i - y^i) = 0 \quad (i=1,\ldots,n)$.

Обозначим через α неймановский темп роста отображения a. Далее, всюду считаем, что

$$\alpha > v^{si} \quad (s,\ i=1,\ldots,n). \tag{3}$$

Известно [2], что существует обобщенное состояние равновесия $(\alpha,(X,\alpha X),p)$, где $p, X \in (R^n_+)^n \setminus \{0\}$. Справедливы соотношения $\alpha X \in a(X)$, $p \in a'(\alpha p)$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $X \in K^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что при некоторых i, s выполняется $X^{si} = 0$. Тогда $\Phi^s(X^s) = 0$. Существуют $d^j = (d^{j1},\ldots,d^{jn}) \ge 0$ такие, что

$$\sum_j d^{jl} \le \Phi^l(X^l) \quad (l=1,\ldots,n), \quad \alpha X^j \le A^j X^j + d^j.$$

Так как $\Phi^s(X^s) = 0$, то для $j=1,\ldots,n$ выполняется $d^{js}=0$, $\alpha X^{js} \le v^{js} X^{js}$. Так как $\alpha > v^{js}$, то $X^{js}=0$, $\Phi^j(X^j) = 0$ $(j=1,\ldots,n)$. Отсюда следует, что $\alpha X^j \le A^j X^j$ $(j=1,\ldots,n)$. В силу (3) имеем $X=0$. Полученное противоречие доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $p=(r(p),\ldots,r(p)) \in K^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha X \in a(X)$, то существуют $d^s \in R^n_+$ $(s=1,\ldots,n)$ такие, что $d^1+\ldots+d^n \le (\Phi^i(X^i))$.

$\alpha X^s \leq A^s X^s + d^s$. В силу соотношений (3) и $X \in K^n$ имеем, что $d^{si} > 0$ $(s, i = 1, \dots, n)$. В то же время $\alpha X \in a(X)$, $\rho \in a'(\alpha\rho)$. В силу предложения 2 [3] имеем $\rho = (r(\rho), \dots, r(\rho))$. Предположим, что для некоторого s выполняется $r^s(\rho) = 0$. Из (I), (2) следует, что

$$(\alpha r(\rho) - A^s r(\rho), u) \geq r^s(\rho)\, \varphi^s(u) \qquad (u \geq 0),$$

$$(\alpha r(\rho) - A^s r(\rho), X^s) = r^s(\rho)\, \varphi^s(X^s) = 0.$$

Так как $X^s \in K$, то $\alpha r(\rho) = A^s r(\rho)$. Соотношение (3) влечет, что $r(\rho) = 0$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть $(q_t = (q_t^1, \dots, q_t^n))$ - траектория отображения a', имеющая средний темп роста α^{-1}. Тогда существуют константа $\tau > 0$, для которой при достаточно больших t выполняется $\min\limits_{i,j} q_t^{ij} \geq \tau \max\limits_{i,j} q_t^{ij}$, и последовательность чисел $\{\gamma_t\} \subset (1, \infty)$ такая, что $\lim\limits_t \gamma_t = 1$; для достаточно больших t выполняется $\gamma_t q_t^i \geq r(q)$ $(i = 1, \dots, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Q множество предельных точек последовательности $\{\alpha^t q_t\}$. Заметим, что Q - замкнутое ограниченное множество, причем $(x, X) = \lim (\alpha^t q_t, X) > 0$ $(x \in Q)$. Пусть $y_0 \in Q$. По лемме I существует последовательность (y_t) $(t = 0, \pm 1, \dots)$ такая, что $y_t \in \alpha^{-t} Q$, $y_{t+1} \in a'(y_t)$. Имеем $(y_{-1}, X) = (y_0, \alpha X)$. В силу предложения 2 [3] и неравенства (3) имеем $y_0 = (r(y_0), \dots, r(y_0))$.

Покажем, что существует положительное число c, для которого $r^i(y) \geq c$ $(y \in Q,\ i = 1, \dots, n)$. В противном случае найдется $y_0 \in Q$ такое, что $r^i(y_0) = 0$ для некоторого i. По лемме I существует последовательность $\{y_t\}$ $(t = 0, \pm 1, \dots)$ такая, что $y_t \in \alpha^{-t} Q$, $y_{t+1} \in a'(y_t)$. Имеем

$$(y_{-1}, X) = (y_0, \alpha X). \tag{4}$$

В силу (2) имеем $r(y_{-1}^i) = A^i r(y_0) < \alpha r(y_0)$, $(y_{-1}, X) < (\alpha y_0, X)$,

(символы в оригинале не читаются)

что противоречит (4). Полученное противоречие доказывает существование числа c.

Пусть α – произвольное число, большее единицы. Для $z \in Q$ положим

$$V(z) = \{y \in (R_+^n)^n : \alpha^{-1} z \leq y \leq \alpha z\}.$$

Нетрудно видеть, что существует натуральное число T, для которого при всех $t \geq T$ выполняется $\alpha^t q_t \in \cup\{V(z) : z \in Q\}$. Отсюда немедленно вытекает справедливость теоремы.

Считаем, что функции Φ^i дифференцируемы на K. Через $\nabla \Phi^i(x)$ обозначим дифференциал функции Φ^i в точке $x \in K$. Из предложения 2 [3] вытекает

ЛЕММА 2. Пусть $F, G \in (R_+^n)^n$, $G \in a'(F)$, $(F, X) = (G, \alpha X)$, где $F = (F^i)$, $G = (G^i)$. Тогда $G^i = z(G)$,

$$F^i = A^i z(G) + z^i(G) \nabla \Phi^i(X^i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

СЛЕДСТВИЕ. $A^i z(p) + z^i(p) \nabla \Phi^i(X^i) = \alpha z(p) \quad (i = 1, \dots, n).$

Зафиксируем $i \in \{1, \dots, n\}$, положим $h = \nabla \Phi^i(X^i)$ и рассмотрим в пространстве R^n оператор B, определенный формулой $Bx = A^i x + x^i h$. Заметим, что $B(z(p)) = \alpha z(p)$, $h = (z^i(p))^{-1}(\alpha z(p) - A^i z(p))$. Справедлива

ЛЕММА 3. Для любого $x \in R^n$, целого числа $m \geq 0$ выполняется $(B^m x)^i = \alpha^m x^i$.

Докажем лемму индукцией по m. Предположим, что для целого $m \geq 0$ выполняется $(B^m x)^i = \alpha^m x^i$. Тогда

$$(B^{m+1} x) = A^i (B^m x) + (B^m x)^i h = A^i (B^m x) +$$

$$+ \alpha^m x^i (z^i(p))^{-1} (\alpha z(p) - A^i z(p)), \quad (B^{m+1} x)^i = \alpha^{m+1} x^i.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для любого $x \in R^n$; целого числа $m \geq 0$ выполняется

$$\| B^m x - (z^i(p))^{-1} \alpha^m x^i z(p) \| \leq \| A^i \|^m \| x - (z^i(p))^{-1} x^i z(p) \|.$$

Докажем лемму индукцией по m. Предположим, что для целого $m \geq 0$ утверждение леммы справедливо. Тогда по лемме 3

$$\| B^{m+1} x - (z^i(p))^{-1} \alpha^{m+1} x^i z(p) \| = \| B(B^m x - (z^i(p))^{-1} \alpha^m x^i z(p)) \| =$$

$$=\|A^i(B^m x-(z^i(p))^{-1}\alpha^m x^i(z(p))\|.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Магистралью отображения α' является луч $\{\lambda p : \lambda > 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную траекторию (q_t) отображения α', имеющую средний темп роста α^{-1}. Достаточно показать, что $\|q_t\|^{-1} q_t \to \|p\|^{-1} p$. Обозначим через Ω множество предельных точек последовательности $\{\alpha^{-t} q_t\}$. Это замкнутое ограниченное множество, причем для любого $z \in \Omega$ выполняется

$$(z,X)=\lim(\alpha^t q_t, X)>0. \tag{5}$$

Положим $M=\sup\{\|z\| : z \in \Omega\}$. Зафиксируем число $\mathcal{E}>0$ и выберем натуральное число T, для которого $4n M (\alpha^{-1}\max_i\|A^i\|)^T < \mathcal{E}$. Пусть $y_0 \in \Omega$. По лемме I существует последовательность (y_t) $(t=0,\pm 1,\ldots)$ такая, что $y_{t+1} \in \alpha'(y_t)$, $\alpha^t y_t \in \Omega$. Выберем $i \in \{1,\ldots,n\}$, для которого $z^i(p) \geq z^j(p)$ $(j=1,\ldots,n)$, и рассмотрим оператор $Bx = A^i x + x^i \nabla \Phi^i(X)$ $(x \in R^n)$. Имеем $(y_t, X)=(y_{t+1}, \alpha X)$.
По лемме 2 $y_t=(z(y_t),\ldots,z(y_t))$, $z(y_t)=Bz(y_{t+1})$, $z(y_0)=B^T z(y_T)$.
По лемме 4

$$\|z(y_0)-z^i(y_T)\alpha^T(z^i(p))^{-1}\| \leq \|A^i\|^T\|y_T\|(1+$$

$$+\|z(p)\|(z^i(p))^{-1}) \leq \|A^i\|^T\alpha^{-T}M2n<2^{-1}\mathcal{E}.$$

Так как $\mathcal{E}$ – произвольное положительное число, y_0 – произвольный элемент Ω, то $\Omega \subset \{\mathcal{L}p : \mathcal{L}>0\}$. В силу (5) Ω – точка на этом луче. Теорема доказана.

3. Обозначим через $\mathcal{A}$ совокупность неотрицательных диагональных матриц A, у которых на диагонали стоят числа $v^i \in [0,1]$. Рассмотрим матрицы $A^i \in \mathcal{A}$ $(i=1,\ldots,n)$, суперлинейные непрерывные функции $\Phi^i : R^n_+ \to R_+$ такие, что $\Phi^i(x)>0$ тогда и только тогда, когда $x \in K$, и порождаемое ими производственное отображение $a : (R^n_+)^n \to \Pi((R^n_+)^n)$. Траектория (x_t) отображения a называется правильной, если существует натуральное число T, для которого при $t \geq T$ выполняется $x^i_{t+1} - A^i_t x^i_t \in K$ $(i=1,\ldots,n)$ [3].

Обозначим через α неймановский темп роста отображения a. Считаем, что выполняется (3). Как показано ранее, отображение a имеет состояние равновесия $(\alpha,(X,\alpha X),\rho)$, где $X,\rho\in K^n$, $\rho=(r(\rho),\dots,r(\rho))$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Предположим, что $\alpha>2$, существует число $\theta>1$, для которого при всех $i,j=1,\dots,n$, $x\in R^n_+$ выполняется $\theta\Phi^j(x)\geq\Phi^i(x)$. Тогда $r^j(\rho)\leq 2\theta r^i(\rho)$ $(i,j=1,\dots,n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $r^i(\rho)>2\theta r^j(\rho)$ для некоторых i,j. Из предложения 2 [3] следует, что для любого $s=1,\dots,n$ выполняются соотношения:

$$(\alpha r(\rho)-A^s r(\rho),y)\geq r^s(\rho)\Phi^s(y)\quad (y\geq 0);$$
$$(\alpha r(\rho)-A^s r(\rho),X^s)=r^s(\rho)\Phi^s(X^s).\tag{6}$$

Так как $\alpha>2$, $X,\rho\in K^n$, то

$$(2^{-1}\alpha r(\rho),X^j)<r^j(\rho)\Phi^j(X^j)\leq 2^{-1}r^i(\rho)\Phi^i(X^j),$$

что противоречит (6) при $y=X^j$, $s=i$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Положим $S=\{x\in R^n_+ : \sum_i x^i=1\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть неймановский темп роста $\alpha>8$, числа $\theta>1$, $\varkappa>0$ выбраны таким образом, что для любого $x\in S$, $\min_j x^j\leq\varkappa$, выполняются соотношения

$$\Phi^i(x)\leq(16\theta)^{-1}\max\{\Phi^i(z): z\in S\}\quad (i=1,\dots,n).$$

Пусть, далее, $q_0=(q_0^j)$, $q_1=(q_1^j)\in K$, $q_0\geq 4^{-1}\alpha q_1$, $4\theta q_0^j>q_0^\ell$ $(\ell,j=1,\dots,n)$, $\bar q\in R_+\setminus\{0\}$, i - фиксированный элемент множества $\{1,\dots,n\}$, $y\in R^n_+$, причем выполняются соотношения

$$(q_0-A^i q_1,x)\geq\bar q\,\Phi^i(x)\quad (x\geq 0),\tag{7}$$

$$(q_0-A^i q_1,y)=\bar q\,\Phi^i(y).\tag{8}$$

Тогда $y_j\geq\varkappa\sum_\ell y_\ell$ $(j=1,\dots,n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что предложение неверно. Тогда существует $z \in K$ такое, что $\sum_j z_j = \sum_j y_j$, $\Phi^i(z) > 16\Theta \Phi^i(y)$. В силу (8) имеем

$$\bar{q}\,\Phi^i(z) > 16\Theta(q_0 - q_1, y) \geq 8\Theta(q_0, y) > 8\Theta \min_j q_0^j \sum_j z_j > (q_0, z),$$

что противоречит (7). Полученное противоречие доказывает предложение.

Рассмотрим матрицы $A^i \in \mathcal{O}\!\iota$ $(i = 1, \ldots, n)$ и суперлинейные непрерывные функции $\psi^i : R_+^n \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что $\psi^i(x) > 0$ тогда и только тогда, когда $x \in K$. Считаем, что существует число $\Theta > 1$, для которого при любых $i, j = 1, \ldots, n$, $x \in R_+^n$ выполняется неравенство $\Theta \psi^j(x) \geq \psi^i(x)$. Выберем число $\varkappa > 0$ такое, что для любого $x \in S$, $\min_j x^j \leq \varkappa$, выполняется соотношение

$$\psi^i(x) \leq (16\Theta)^{-1} \max\{\psi^i(z) : z \in S\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

С каждым числом $\gamma > 0$ свяжем суперлинейное отображение $a(\gamma)$, имеющее неймановский темп роста $\alpha(\gamma)$, которое определяется матрицами A^i и производственными функциями $\gamma\psi^i$. Очевидно, что $\alpha(\gamma) \to \infty$ при $\gamma \to \infty$. Отображение $a(\gamma)$ имеет обобщенное состояние равновесия $(\alpha(\gamma), (X(\gamma), \alpha(\gamma)X(\gamma)), p(\gamma))$. Если $\alpha(\gamma) > v^{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, то $X(\gamma), p(\gamma) \in K^n$, $p(\gamma) = (z(\gamma), \ldots, z(\gamma))$. В случае же если $\alpha(\gamma) > 2$, то по предложению 5 выполняется

$$2\Theta z^j(\gamma) \geq z^i\gamma \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Выберем $\gamma_0 > 0$ такое, что $\alpha(\gamma_0) > 8\varkappa^{-4}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\gamma > \gamma_0$, (x_t) – траектория отображения $a(\gamma)$, имеющая средний темп роста $\alpha(\gamma)$, причем $x_0 \in K^n$. Тогда траектория (x_t) правильная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $a = a(\gamma)$, $\alpha = \alpha(\gamma)$, $X = X(\gamma)$, $p = p(\gamma)$, $z = z(\gamma)$. Очевидно, что $\alpha > 8\varkappa^{-4}$. Обозначим через Ω (соответственно Ω_1) множество предельных точек последовательности $(\alpha^{-t}x_t)$ (соответственно $(\alpha^{-t}(x_t, x_{t+1}))$). Пусть $(y_0, y_1) \in \Omega_1$. По лемме I существует последовательность $\{y_t\}$ $(t = 0, \pm 1, \ldots)$ такая, что $y_t \in \alpha^t \Omega$, $y_{t+1} \in a(y_t)$.

Имеем $(\alpha p, y_t) = (p, y_{t+1})$. При $i=1,\dots,n$, $t=0,\pm 1,\dots$ в силу предложения 2 [3] выполняются соотношения:

$$(\alpha z - A^i z, z) \geqslant z^i \gamma \psi^i(z) \ (z \geqslant 0), \ (\alpha z - A^i z, y_t^i) = z^i \gamma \psi^i(y_t^i).$$

Мы вправе воспользоваться предложением 6, полагая $q_0 = \alpha z$, $q_1 = z$, $\bar{q} = \gamma z^i$. Имеем

$$\min_j y_t^{ij} \geqslant \varkappa \sum_j y_t^{ij} \ (i=1,\dots,n, \ t=0,\pm 1,\dots). \tag{10}$$

Зафиксируем целое число t. Так как $p \in K^n$, то $y_{t+1}^i = A^i y_t^i + d^i$, где $d^{ij} \geqslant 0$, $\sum_i d^{ij} = \gamma \psi^j(y_t^j)$ $(i=1,\dots,n)$. Предположим, что для некоторых $j, i = \{1,\dots,n\}$ выполняется $\alpha^{ij} = 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $j=1$. Тогда $y_{t+1}^{1i} \leqslant$ $\geqslant y_t^{1i}$. В силу (10)

$$y_{t+1}^{1j} \leqslant \varkappa^{-1} y_{t+1}^{1i} \leqslant \varkappa^{-1} y_t^{1i} \leqslant \varkappa^{-2} y_t^{1j}, \quad y_{t+1}^1 \leqslant \varkappa^{-2} y_t^1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_j y_{t+2}^{j1} \leqslant \sum_j y_{t+1}^{j1} + \gamma \psi^1(y_t^1) \varkappa^{-2} \leqslant 2\varkappa^{-2} \sum_j y_{t+1}^{j1}.$$

В силу (10) для $j, i = 1,\dots,n$ имеем

$$\sum_j y_{t+2}^{ji} \leqslant \varkappa^{-1} \sum_j y_{t+2}^{j1}; \quad \sum_j y_{t+1}^{ji} \geqslant \varkappa \sum_j y_{t+1}^{j1};$$
$$\sum_j y_{t+2}^{ji} \leqslant \varkappa^{-1} \sum_j y_{t+2}^{j1} \leqslant 2\varkappa^{-3} \sum_j y_{t+1}^{j1} \leqslant 2\varkappa^{-4} \sum_j y_{t+1}^{ji}. \tag{11}$$

В то же время $(\alpha p, y_{t+1}) = (p, y_{t+2})$. В силу (10) и неравенства $\alpha > 2\varkappa^{-4}$ имеем

$$(p, y_{t+2}) = \sum_i \Big[z^i \sum_j y_{t+2}^{ji} \Big] \leqslant \sum_i \Big[z^i 2\varkappa^{-4} \sum_j y_{t+1}^{ji} \Big] < \alpha (p, y_{t+1}).$$

Полученное противоречие доказывает неправильность нашего предположения и, следовательно, $y_{t+1}^i - A^i y_t^i \in K$ $(i=1,\dots,n, \ t=0,\pm 1,\dots)$. Мы убедились, что для любого $(y_0, y_1) \in \Omega_1$ выполняется $y_1^i - A^i y_0^i \in K$ $(i=1,\dots,n)$. Нетрудно показать, используя компактность множества Ω_1, что существует число $d > 1$ такое, что для любого $(y_0, y_1) \in \Omega_1$, выполняется $y_1^i - d A^i y_0^i \in K$

$(i=1,\dots,n)$. Пусть $y_1 \in \alpha \Omega$. Легко видеть, что существует $y_0 \in \Omega$ такое, что $(y_0, y_1) \in \Omega_1$. Имеем $y_1 \in K$. Отсюда вытекает существование числа $c>0$, для которого $(y_0, y_1) \geq c(1,1,\dots,1) \in R^{2n}$ при любом $(y_0, y_1) \in \Omega$. Выберем число $\alpha_0 \in (1, \sqrt{\alpha})$. Для $y \in \Omega_1$ положим $V(y) = \{z \in R^{2n} : \alpha_0^{-1} y \leq z \leq \alpha_0 y\}$. Нетрудно видеть, что существует натуральное число T такое, что при всех $t \geq T$ выполняется $\alpha^{-t}(x_t, x_{t+1}) \in \cup\{V(y) : y \in \Omega_1\}$. Пусть $t \geq T$, $(y_0, y_1) \in \Omega_1$,

$$\alpha_0^{-1}(y_0, y_1) \leq \alpha^{-t}(x_t, x_{t+1}) \leq \alpha_0(y_0, y_1).$$

Для $i=1,\dots,n$ имеем

$$\alpha^{-t} x_{t+1}^i \geq \alpha_0^{-1} y_1^i \in \alpha_0 A^i y_0^i + K, \quad \alpha_0 A^i y_0^i \geq \alpha^{-t} A^i x_t^i, \quad x_{t+1}^i - A^i x_t^i \in K.$$

Теорема доказана.

4. Суперлинейная функция $\psi : R_+^n \to R_+$ называется строго суперлинейной, если для любых $x \in K$, $y \in R_+^n$ таких, что y не пропорционален x, выполняется $\psi(x+y) > \psi(x) + \psi(y)$.

Рассмотрим производственное отображение $a : (R_+^n)^n \to \Pi((R_+^n)^n)$, порожденное матрицами A^i и строго суперлинейными функциями φ^i. Считаем, что его неймановский темп роста $\alpha > \nu^{ij}$ $(i,j=1,\dots,n)$. Отображение a имеет состояние равновесия $(\alpha, (X, \alpha X), p)$, где $X, p \in K^n$, $p = (r(p),\dots,r(p))$. Заметим, что для $i=1,\dots,n$ справедливо соотношение

$$(\alpha r(p) - A^i r(p), y) \geq r^i(p) \varphi^i(y) \quad (y \in R_+^n), \tag{12}$$

в силу суперлинейности φ^i обращающееся в равенство тогда и только тогда, когда y пропорционален X^i. Положим $c^i = [\varphi^i(X^i)]^{-1} X^i$ $(i=1,\dots,n)$. Обозначим через C_1 (соответственно C_2) матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число c^{ji} (соответственно $\nu^{ji} c^{ji}$). Через $\mathcal{I}$ обозначим тождественный оператор в R^n. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть числа $\lambda_i, \Lambda_i \geq 0$ $(i=1,\dots,n)$, $x^i = \lambda_i c^i$, $y^i = \Lambda_i c^i$ $(i=1,\dots,n)$, причем $y \in a(x)$, $(\alpha p, x) = (p, y)$. Тогда $C_1(\Lambda) = (C_2 + \mathcal{I})(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p \in K^n$, то $y^i = A^i x^i + d^i$, $d^i > 0$, $\sum_j d^{ji} = \varphi^i(x^i)$ $(i=1,\dots,n)$. Имеем

$$d^i=\Lambda_i c^i-\lambda_i A^i c^i,\quad \sum_i \Lambda_i c^i=\sum_i \lambda_i A^i c^i+\lambda.$$

Последнее равенство доказывает предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть числа $\lambda_i, \Lambda_i \geq 0, \Lambda_i \geq \nu^{ij}\lambda_i$ $(i,j=1,\dots,n)$, $x^i=\lambda_i c^i, y^i=\Lambda_i c^i$, причем $c_1(\Lambda)=(c_2+\mathcal{I})(\lambda)$. Тогда $y \in a(x)$, $(\alpha p, x)=(p,y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\sum_i \Lambda_i c^i=\sum_i \lambda_i A^i c^i+\lambda$. Положим $d^i=\Lambda_i c^i-\lambda_i A^i c^i$. Очевидно, что $\sum d^i=(\Phi^i(x^i))$, $d^i \geq 0$, $y \in a(x)$. Из предложения 2 [3] вытекает, что $(\alpha p, x)=(p,y)$. Утверждение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $x,y,u \in (R^n_+)^n$, $y \in a(x)$, $u \in a(y)$, $(\alpha^2 p, x)=(\alpha p, y)=(p,u)$. Тогда существуют числа $\lambda_i \geq 0$, $\Lambda_i \geq 0$ такие, что $x^i=\lambda_i c^i$, $y^i=\Lambda_i c^i$, $c_1(\Lambda)=(c_2+\mathcal{I})(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2 [3], строгой суперлинейности производственных функций вытекает существование чисел $\lambda_i, \Lambda_i \geq 0$ таких, что $x^i=\lambda_i c^i$, $y^i=\Lambda_i c^i$, $c_1(\Lambda)=(c_2+\mathcal{I})(\lambda)$. Предположим, что для некоторого $q \in \{1,\dots,n\}$ выполняется $\lambda_q=0$. Имеем $y \in a(x)$, $\Lambda_i c^i-y^i=\lambda_i A^i c^i+d^i$, $d^{i} \geq 0$, $\sum_i d^i \leq (\Phi^i(x^i))=\lambda$. Так как $\lambda_q=0$, то $d^{iq}=0$ $(i=1,\dots,n)$, $\Lambda_i=\nu^{iq}\lambda_i$ $(i=1,\dots,n)$,

$$y<\alpha x.$$

Далее, $(\alpha p, x)=(p,y)<(p,\alpha x)$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Рассмотрим матрицы $A^i \in \mathcal{U}$ $(i=1,\dots,n)$ и строго суперлинейные непрерывные функции $\psi^i: R^n_+ \to R_+$ $(i=1,\dots,n)$ такие, что $\psi^i(x)>0$ тогда и только тогда, когда $x \in K$. Считаем, что существует число θ, для которого при любых $i,j=1,\dots,n$, $x \in R^n_+$ выполняется неравенство $\theta\psi^j(x) \geq \psi^i(x)$. Выберем число $\varkappa>0$ такое, что для любого $x \in S$, $\min_i x^i \leq \varkappa$, выполняется соотношение

$$\psi^i(x) \leq (16\theta)^{-1}\max\{\psi^i(z): z \in S\} \quad (i=1,\dots,n).$$

С каждым числом $\gamma>0$ свяжем суперлинейное отображение $a(\gamma)$, которое определяется матрицами A^i и производственными функциями $\gamma\psi^i$ и имеет состояние равновесия $(\alpha(\gamma)$,

$(X(\gamma), \alpha(\gamma) X(\gamma)), p(\gamma))$ и неймановский темп роста $\alpha(\gamma)$. Выберем $\gamma_0 > 0$ такое, что $\alpha(\gamma_0) > 8 æ^{-1}$. Положим $c^i(\gamma) = [\gamma \psi^i(X^i(\gamma))]^{-1} X^i(\gamma)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $\gamma > \gamma_0$. В силу (I2) и предложения 6 имеем

$$\min_j c^{ij}(\gamma) \geq æ \sum_j c^{ij}(\gamma) \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (I3)$$

Выберем число $\mathcal{E}_0 > 0$ такое, что $4\mathcal{E}_0 M < æ$, где M - норма матрицы размера $n \times n$, все элементы которой единицы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Существует $\gamma_1 > \gamma_0$, для которого при всех $\gamma > \gamma_1$ выполняется $c^{ij}(\gamma) \leq \mathcal{E}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma > \gamma_0$. Рассмотрим вектор $y_\gamma \in R^n_+$, пропорциональный $c^i(\gamma)$, где i - фиксированный элемент множества $\{1, \ldots, n\}$ такой, что $\sum_j y^j_\gamma = 1$. Очевидно, что $c^i(\gamma) = [\gamma \psi^i(y_\gamma)]^{-1} y_\gamma$.

Так как $\alpha(\gamma) > 8$, то в силу (9) имеем

$$\gamma \psi^i(y_\gamma) \geq (z^i(\gamma))^{-1} (2^{-1} \alpha(\gamma) z(\gamma), y_\gamma) \geq$$

$$\geq 2^{-1} \alpha(\gamma) (2\theta)^{-1} \sum_j y^j_\gamma = \alpha(\gamma)(4\theta)^{-1}.$$

Выберем число $\gamma_1 > \gamma_0$ такое, что $8\theta(\alpha(\gamma_1))^{-1} < \mathcal{E}_0$. Пусть $\gamma \geq \gamma_1$. Тогда

$$c^{ij}(\gamma) \leq [\gamma \psi^i(y_\gamma)]^{-1} \leq 4\theta(\alpha(\gamma))^{-1} \leq 2^{-1}\mathcal{E}.$$

Предложение доказано.

Зафиксируем $\gamma \geq \gamma_1$. Заметим, что $\|c_2(\gamma)\| \leq \mathcal{E}_0 M < 4^{-1} æ$. Тогда оператор $(\mathcal{I} + c_2(\gamma))$ имеет обратный. Положим $c_3(\gamma) = (\mathcal{I} + c_2(\gamma))^{-1} - \mathcal{I}$, $B = (\mathcal{I} + c_3(\gamma)) c_1(\gamma)$. Очевидно, что $|c_3^{ij}(\gamma)| < 3^{-1} æ$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Из последнего соотношения и неравенства (I3) следует, что все элементы матрицы B строго положительны. Поскольку γ нами зафиксировано, во всех обозначениях, содержащих этот символ, он будет опускаться.

Из теории примитивных матриц [4] известно, что оператор B имеет единственное собственное положительное число и ему соответствует единственный с точностью до множителя собственный вектор $\ell = (\psi^i(X^i))$, $B\ell = \alpha^{-1}\ell$, для любого $x \in R^n_+$, $x \neq 0$ существует число $\Delta > 0$ такое, что $\alpha^t B^t x \to \Delta \ell$ при $t \to \infty$. Отсюда вытекает

ЛЕММА 5. Пусть $\varepsilon>0,\ x\in K$. Тогда существуют натуральное число T, число $d>1$ такие, что для любого y, принадлежащего порядковому интервалу $\langle d^{-1}x, dx\rangle$, при всех $t\geq T$ выполняется соотношение

$$\| \|B^t y\|^{-1}B^t y-\|\ell\|^{-1}\ell\|<\varepsilon.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть числа $\tau,\varepsilon>0$. Тогда существует натуральное число T, для которого при всех $t\geq T,\ x\in R^n_+\setminus\{0\}$ таких, что $\min_i x^i\geq\tau\sum_i x^i$ выполняется

$$\| \|B^t x\|^{-1}B^t x-\|\ell\|^{-1}\ell\|<\varepsilon.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\gamma>\gamma_1$. Тогда магистралью отображения $a(\gamma)$ является луч $\{\mathcal{L}X(\gamma):\mathcal{L}\geq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную траекторию (x_t) отображения a, имеющую средний темп роста α. Достаточно показать, что последовательность $(\|x_t\|^{-1}x_t)$ стремится к лучу $\{\mathcal{L}X:\mathcal{L}\geq 0\}$. Обозначим через Q множество предельных точек последовательности $\{\alpha^{-t}x_t\}$. Это ограниченное замкнутое множество, причем для любого $x\in Q$ выполняется $(p,x)=$ $=\lim(p,\alpha^{-t}x_t)>0$.

Пусть $y_0\in Q$. По лемме I существует последовательность $\{y_t\}$ $(t=0,\pm 1,\dots)$ такая, что $y_{t+1}\in a(y_t),\ y_t\in\alpha^t Q,\ y_0=y$. Для любого целого t выполняется $(\alpha p,y_t)=(p,y_{t+1})$. По предложению 9 существуют числа $\lambda^i(y)>0$ $(i=1,\dots,n)$ такие, что $y^i=\lambda^i(y)c^i$ $(i=1,\dots,n)$. Из компактности Q вытекает существование числа $\tau>0$, для которого $\min_i\lambda^i(y)\geq$ $\geq(\sum_i\lambda^i(y))\tau$ $(y\in Q)$.

Пусть $y_0\in Q,\ \varepsilon>0$. Существует число $\delta\in(0,\varepsilon)$ такое, что $n\delta M\sum_i\|c^i\|<\varepsilon$, где $M=\sup\{\lambda^i(y):y\in Q,\ i=1,\dots,n\}$. В силу следствия к лемме 5 существует натуральное число T, для которого при всех $t\geq T,\ x\in R^n_+\setminus\{0\}$ таких, что $\min_i x^i\geq$ $\geq\tau\sum_i x^i$, выполняется

$$\|B^t z\|^{-1} B^t z - \|l\|^{-1} l\| \le \delta .$$

По лемме I найдется последовательность (y_t) ($t = 0, \pm 1, \ldots$) такая, что $y_{t+1} \in a(y_t)$, $y_t \in \lambda^t \Omega$. Существуют числа $\lambda_t^i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$, $t = 0, \pm 1, \ldots$) такие, что $y_t^i = \lambda_t^i c^i$ ($i = 1, \ldots, n$). Легко видеть, что $\min_i \lambda_t^i \geq \tau \sum_i \lambda_t^i$, $B(\lambda_{t+1}) = \lambda_t$. Так как

$$\lambda_T \in K, \ \min_i \lambda_T^i \geq \tau \sum_i \lambda_T^i ,$$

то в силу определения T имеем $B^T(\lambda_T) = \lambda_0$, $\|\lambda_0\|^{-1}\lambda_0 - \|l\|^{-1} l\| < \delta$, $\|\lambda_0 - \|\lambda_0\| \|l\|^{-1} l\| \le \delta M n$, $\|y_0 - \|\lambda_0\| \|l\|^{-1} \gamma^{-1} X\| \le \sum \|c^i\| \delta M n < \varepsilon$. Так как y_0 – произвольный элемент Ω, ε – произвольное положительное число, то Ω – точка на луче $\{\mathcal{L}X : \mathcal{L} \geq 0\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. – Л.: Наука, 1980.
2. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.
3. РУБИНОВ А.М. Об одной нелинейной модели леонтьевского типа. – Оптимизация, 1982, вып. 32(49), с.109–127.
4. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

Поступила в ред.-изд. отдел
03.09.1985 г.