Выпуск 36(53) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 519.83

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА МЕЖДУ ПРОИЗВОДСТВОМ И ПОТРЕБЛЕНИЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ УЧАСТНИКАМИ

В.К.Доманский, Г.Н.Дюбин

Односекторная модель производства и потребления с учетом случайного риска для одного производителя изучалась различными авторами. Для широкого класса производственных функций и функций полезности - как правило, однородных, т.е. в данном случае степенных, получены весьма детализированные результаты. (Историю вопроса и библиографию см. в [1].) Однако более реалистический подход требует учета того факта, что в экономическом процессе принимают участие несколько сторон, интересы которых, вообще говоря, не совпадают и действия которых оказывают влияние на результаты, получаемые партнерами. Это несомненно имеет место и в социалистическом обществе. Соответствующая модель должна иметь теоретико-игровой характер.

Если кооперация между участниками производственного процесса не может иметь места (что достаточно адекватно отражает часто встречающуюся реальную ситуацию), то изучаемый процесс математически моделируется бескоалиционной динамической стохастической игрой. Как принято в теории игр, считаем, что нормативом, которому подчиняется поведение участников процесса, является принцип равновесия Нэша [2], т.е. игроки совместно избирают такие действия-стратегии, что ни один из них не может изменить своей стратегии без ущерба для себя. Вопрос о том, какая из таких "ситуаций равновесия" реализуется, нами не затрагивается.

В общей форме рассматриваемая модель включает в себя следующие элементы:

$\mathcal{J}=\{1,\dots,N\}$ – множество участников производственного процесса (производителей, игроков);

$\{s^t,\ t=1,2,\dots\}$ – марковская случайная последовательность с пространством состояний $(\mathcal{S},\Sigma)$ и начальным состоянием s^0;

$x_i^t\in R^1$ – ресурс (одномерный) i-го участника на шаге t, $t=0,1,\dots$;

$(x_1^t,\dots,x_N^t)=x^t\in R^N$ – вектор ресурсов всех игроков.

На каждом шаге t каждый игрок $i\in\mathcal{J}$ должен разделить свои ресурсы на две части: часть y_i^t, предназначаемую для производства, и часть z_i^t, предназначаемую для потребления (извлечения дохода, реализации); $x_i^t=y_i^t+z_i^t$.

Обозначим $y^t=(y_1^t,\dots,y_N^t)$, $z^t=(z_1^t,\dots,z_N^t)$.
В результате производства, на которое влияют случайные факторы, на следующем шаге $t+1$ i-й игрок будет иметь $x_i^{t+1}=\mathcal{F}_i(y_i^t,s^{t+1})$ единиц ресурса. (Рассматриваем только случай, когда производственная функция не зависит от времени – однородный во времени процесс.) На шаге t игрок получит доход (в случае реализации) или полезность (в случае потребления) $r_i(z^t)$.

Заданы начальные ресурсы $x^0=(x_1^0,\dots,x_N^0)$. Задача состоит в том, чтобы максимизировать суммарный ожидаемый доход за T шагов (T может быть бесконечным):

$$E_{s^0}\sum_{t=0}^{T} r_i(z^t)\to max;\quad 0\le z^t\le x^t,$$

$$x_i^{t+1}=\mathcal{F}_i(x_i^t-z_i^t,\ s^{t+1}).$$

Соответствующая игра обозначается через $\Gamma^T(x^0,s^0)$.

Стратегией π_i игрока i является последовательность отображений

$$\pi_i^t(x^0,s^0,y^0,\dots,x^t,s^t)\to[0,1],\quad t=0,1,\dots,T,$$

задающих долю ресурсов $z_i^t=\pi_i^t\cdot x_i^t$, направляемую на шаге $t+1$ для потребления в зависимости от всей предыстории процесса. Говорим, что стратегия марковская, если π_i^t зависит только от x^t и s^t.

Пусть T конечно. Возможен следующий, аналогичный методу динамического программирования метод построения так называемых рекурсивных ситуаций равновесия в марковских стратегиях для многошаговых динамических игр N лиц $\Gamma^T(x^0, s^0)$.

Пусть для любой игры $\Gamma^{T-1}(x, s)$ ситуация равновесия ${}^{T-1}\pi(x,s)=\{{}^{T-1}\pi_i\}_{i\in J}$ в марковских стратегиях уже построена и задается отображениями ${}^{T-1}\pi_i^t(x^t, s^t)$, $t=1,\dots,T-1$, $i\in J$.

Пусть выигрыши игроков i в ситуации ${}^{T-1}\pi(x,s)$ равны $v_i^{T-1}(x,s)$. Пусть, далее, игроки договорились о выборе этой ситуации. Тогда в начальный момент игроки имеют дело с одношаговой игрой с функциями выигрыша:

$$r_i(z^0)+E_{s^0}v_i^{T-1}(\{\mathcal{F}_i(x_i^0-z_i^0, s^1)\}_{i\in J}, s^1),$$

где $z_i^0\leq x_i^0$, или (по определению стратегий)

$$r_i(\{\pi_i^0\cdot x_i^0\}_{i\in J})+E v_i^{T-1}(\{\mathcal{F}_i(1-\pi_i^0)x_i^0, s^1)_{i\in J}, s^1), \tag{1}$$

где $0\leq\pi_i^0\leq 1$.

Выберем какую-либо ситуацию равновесия $\{\pi_i^0(x^0, s^0)\}_{i\in J}$ в этой игре. Тогда ситуация ${}^T\pi(x^0, s^0)$, где

$${}^T\pi_i^0(x^0, s^0)=\pi_i^0(x^0, s^0),$$

$${}^T\pi_i^t(x,s)={}^{T-1}\pi_i^{t-1}(x,s),\ t=1,\dots,T,$$

является ситуацией равновесия в игре $\Gamma^T(x^0, s^0)$.

Этот факт следует из принципа оптимальности Беллмана для управляемой последовательности, полученной из рассматриваемой динамической игры при фиксации стратегий всех игроков, кроме игрока i ($i\in J$).

Рассмотрим следующий частный случай описанной выше модели, для которого ситуацию равновесия удается найти в явном виде: $S=R^1_+$, s^t – независимые и одинаково распределенные случайные величины, $E[(s^t)^\beta]=\mu<\infty, \beta<1$. Производственная функция имеет вид

$$\mathcal{F}_i(y_i, s^{t+1})=y_i\cdot s^{t+1},$$

а функции $r_i(z)$ возрастают, выпуклы по z_i и однородны с показателем β, т.е.

$$r_i(az)=a^\beta r_i(z).$$

Примером такой функции является функция

$$r_i(z) = \frac{z_i}{(\sum_{j\in J} z_j)^{1-\beta}} .$$

Это весьма естественная функция дохода, означающая, что доход от единицы реализуемой продукции равен $1/(\sum_{j\in J} z_j)^{1-\beta}$ и зависит отрицательно от всего объема реализуемой на рынке продукции.

Рассмотрим следующую бескоалиционную (одношаговую) игру N лиц:

$$\Gamma_{x,a} = \langle J, \{[0,1]\}_{i\in J}, \{\mathcal{H}_i(\mathcal{X}, x, a)\}_{i\in J}\rangle ,$$

где

$$x \in R^N_+ ,\ a \in R^1_+ ,\ \mathcal{X}_i \in [0,1],\ \mathcal{X} = \{\mathcal{X}_i\}_{i\in J} ,$$

а

$$\mathcal{H}_i(\mathcal{X}, x, a) = r_i(\mathcal{X}_1 x_1, \ldots, \mathcal{X}_N x_N) + a r_i((1-\mathcal{X}_1)x_1, \ldots, (1-\mathcal{X}_N)x_N).$$

Эта игра имеет ситуацию равновесия $\mathcal{X}(a)$, в которой

$$\mathcal{X}_i(a) = \frac{1}{1 + a^{1/(1-\beta)}} . \qquad (2)$$

Выигрыш игрока i в этой ситуации равен

$$(1 + a^{1/(1-\beta)})^{1-\beta} \cdot r_i(x). \qquad (3)$$

Этот факт следует из того, что в точке $\mathcal{X}(a)$ производная функции $\mathcal{H}_i(\mathcal{X}, x, a)$ по $\mathcal{X}_i$ обращается в нуль для всех $i \in J$, и функция $\mathcal{H}_i$ выпукла по $\mathcal{X}_i$, а стало быть, имеет в $\mathcal{X}(a)$ максимум по $\mathcal{X}_i$.

Обратимся к рассмотрению игры распределения ресурсов.

ТЕОРЕМА I. Игра $\Gamma^T(x, s)$ с конечным T имеет ситуацию равновесия ${}^T\mathcal{X}$, определяемую соотношениями

$$ {}^T\mathcal{X}_i^t(x, s) = b^{T-t} ,\quad i \in J, \qquad (4)$$

где

$$b^t = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{t} \gamma^k ,$$

$$c^t = \left(\sum_{k=0}^{t} \gamma^k\right)^{1-\beta}, \quad \gamma = \mu^{1/1-\beta}.$$

При этом выигрыши игроков в ситуации ${}^T\!\mathscr{X}$ определяются по формуле

$$v_i^T(x, 1) = c^T r_i(x), \; i \in N. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить утверждение теоремы для $T=1$. Действительно, при $T=1$ наша игра сводится к игре $\Gamma_{x,\mu}$, решение которой, как уже показано, определяется формулами (2) и (3), совпадающими с формулами (4) и (5) соответственно.

Пусть теперь наша теорема верна при $T=1$. Для нахождения рекурсивной ситуации равновесия в игре $\Gamma_{x,\mu}$ ищем ситуацию равновесия в одношаговой игре с функциями выигрыша, задаваемыми выражениями (I), где v_i^{T-1} – выигрыши игроков в уже построенной ситуации равновесия для игры Γ^{T-1}. При этом, как легко убедиться при помощи непосредственных вычислений, функции выигрыша этой одношаговой игры имеют ту же структуру (т.е. игра снова сводится к одношаговой игре типа $\Gamma_{x,a}$). Выражения для равновесных стратегий и выигрышей игроков определяются соотношениями (4) и (5) из формулировки теоремы.

Заметим, что при фиксированном шаге t и при неограниченном увеличении времени планирования T величина δ^{T-t} стремится к $1-\gamma$, если $\gamma<1$. Поэтому нужно вкладывать в производство постоянную долю произведенного продукта. Если же $\gamma \geq 1$, то $\delta^{T-t} \to 0$. Это означает, что в начале периода управления нужно почти всю продукцию использовать для расширения производства; в конце периода планирования доля потребления резко возрастает.

Перейдем теперь к рассмотрению игр с бесконечным промежутком планирования.

ТЕОРЕМА 2. Игра $\Gamma^{\infty}(x,1)$ с бесконечным промежутком планирования при $\mu<1$ имеет ситуацию равновесия в стационарных стратегиях ${}^{\infty}\!\mathscr{X}$, где стационарная равновесная стратегия игрока i имеет вид

$$^{\infty}\mathfrak{X}_i^t(x,s)=1-\mu^{1/(1-\beta)}={}^{\infty}\mathfrak{X}_i,$$

а выигрыш игрока i в ситуации $^{\infty}\mathfrak{X}$ равен

$$v_i^{\infty}(x,s)=r_i(x)\Big[\frac{1}{1-\mu^{1/(1-\beta)}}\Big]^{1-\beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямой подстановкой можно убедиться, что набор функций $v_i^{\infty}(x,s)$ и ситуация $\{^{\infty}\mathfrak{X}_i(x,s)\}$ удовлетворяют уравнениям

$$^{\infty}\mathfrak{X}_i(x,s)=\arg\max$$

задачи

$$v_i((x_1,\ldots,x_N),s)=\sup_{0\le\mathfrak{X}_i\le 1} r_i(^{\infty}\mathfrak{X}_1 x_i,\ldots,\mathfrak{X}_i x_i,\ldots,{}^{\infty}\mathfrak{X}_N x_N)+$$
$$+E_{s_1}v_i[(1-{}^{\infty}\mathfrak{X}_1)x_1\cdot s_1,\ldots,(1-\mathfrak{X}_i)x_i\cdot s_1,\ldots,(1-{}^{\infty}\mathfrak{X}_N)x_N\cdot s_1)].$$

Из этих уравнений следует [1], что $v_i^{\infty}(x,s)$ является ценой, а $\{^{\infty}\mathfrak{X}_i^t(x,s)\}_{t=0}^{\infty}$ – оптимальной стратегией для задачи стохастического динамического программирования с суммарным выигрышем на бесконечном временном интервале, которая получается из рассматриваемой стохастической игры, если игроки j при $j\ne i$ используют стратегии $^{\infty}\mathfrak{X}_j$, а это и означает, что $^{\infty}\mathfrak{X}$ представляет собой ситуацию равновесия в рассматриваемой игре распределения ресурсов. Теорема доказана.

Отметим также, что методы, подобные вышеизложенным, позволяют найти ситуацию равновесия для аналогичных игр распределения ресурсов в случае, когда случайные параметры s^t, определяющие зависимость выпуска от затрат, образуют марковскую цепь. В этом случае равновесные управления игроков зависят от текущего значения случайных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. ДЫНКИН Е.Б., ЮШКЕВИЧ А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975.
2. ОУЭН Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971.

Поступила в ред.-изд. отдел
12.09.84 г.