ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.853+519.632

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ

Р.В.Намм

В работе исследуется скорость сходимости алгоритма с регуляризацией для задачи об установившемся движении жидкости в области с полупроницаемой границей:

$$\begin{cases} J(u)=\int_\Omega (|\nabla u|^2-2fu)\,d\Omega - \min! \\ u\in K=\{v\in W_2^1(\Omega): \gamma v \geq \psi \text{ п.в. на } \Gamma\}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\Omega\subset R^m$ – конечная область с достаточно регулярной границей Γ, $f\in L_2(\Omega)$, $\psi\in L_2(\Gamma)$ – заданные функции, $\gamma v\in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – след функции $v\in W_2^1(\Omega)$ на Γ.

В предположении, что

$$\int_\Omega f\,d\Omega < 0,$$

решение задачи (1) существует и единственно, причем

$$J(u) \longrightarrow +\infty \quad , \text{ если } \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty,\ u\in K.$$

Однако минимизируемый функционал в (1) не является строго коэрцитивным на множестве K.

В дальнейшем примем следующие обозначения:

1) $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ – нормы элементов в пространствах $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ соответственно;

2) $(\cdot\,,\,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$;

3) $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\Omega$.

Для решения задачи Синьорини рассматривается итерационный алгоритм с регуляризацией на каждом шаге:

1) $u^0 \in K$ – любое;

$$2)\ u^n = \arg\min_{u \in K} \{\mathcal{J}(u) + \alpha \|u - u^{n-1}\|_0^2\} \quad (\alpha > 0\text{-const}). \tag{2}$$

Сходимость алгоритма в $W_2^1(\Omega)$ и его практическая реализация с использованием метода конечных элементов рассмотрены в [1,2]. Методы решения конечномерных задач выпуклого программирования с использованием подобной регуляризации минимизируемого функционала рассматривались рядом авторов (см., например, [3,4]).

Исследуем скорость сходимости алгоритма (2). Отсутствие у функционала $\mathcal{J}$ свойства строгой коэрцитивности не позволяет при оценке скорости сходимости воспользоваться результатами, справедливыми для аналогичных алгоритмов конечномерного выпуклого программирования в случае сильной выпуклости минимизируемого функционала.

Пусть u^* обозначает решение задачи (1). Из условия оптимальности имеем:

$$a(u^n, u^* - u^n) + \alpha(u^n, u^* - u^n) \geq (f + \alpha u^{n-1}, u^* - u^n),$$

$$\alpha(u^n - u^{n-1}, u^* - u^n) \geq a(u^n, u^n - u^*) - (f, u^n - u^*) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(\mathcal{J}(u^n) - \mathcal{J}(u^*)) \geq \frac{1}{2} a(u^n - u^*, u^n - u^*).$$

Отсюда

$$\|u^n - u^{n-1}\|_0 \cdot \|u^* - u^n\|_0 \geq \frac{1}{2\alpha} a(u^n - u^*, u^n - u^*). \tag{3}$$

Так как

$$2(u^n - u^{n-1}, u^* - u^n) = \|u^{n-1} - u^*\|_0^2 - \|u^n - u^{n-1}\|_0^2 - \|u^n - u^*\|_0^2,$$

то

$$\|u^{n-1} - u^*\|_0^2 - \|u^n - u^{n-1}\|_0^2 - \|u^n - u^*\|_0^2 \geq \mathcal{J}(u^n) - \mathcal{J}(u^*),$$

$$\|u^n - u^*\|_0^2 + \|u^n - u^{n-1}\|_0^2 + (\mathcal{J}(u^n) - \mathcal{J}(u^*)) \leq \|u^{n-1} - u^*\|_0^2. \tag{4}$$

Далее, как и в [1,2], предполагаем, что на Ω для функций $u \in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство Пуанкаре:

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leq A\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + B\left(\int_\Omega u\, d\Omega\right)^2,$$

где $A>0$ и $B>0$ – постоянные.

ТЕОРЕМА. Для алгоритма (2) существует такое $\beta>0$, что

$$J(u^n)-J(u^*) \geq \beta \|u^n-u^*\|_1^2, \quad n=1,2,\ldots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $J(u^n)-J(u^*)=2(a(u^*,u^n-u^*)-(f,u^n-u^*))+a(u^n-u^*,u^n-u^*)$.

Разложим (u^n-u^*) по ортогональным в $W_2^1(\Omega)$ составляющим S_1 и S_2:

$$u^n-u^*=\lambda_1\|u^n-u^*\|_1 S_1+\lambda_2\|u^n-u^*\|_1 S_2,$$

где

$$S_1=const,\ \|S_1\|_1=1,\ \left(S_1=\frac{1}{(mes\,\Omega)^{1/2}}\right),$$

$$S_1\perp S_2,\ \|S_2\|_1=1,\ \lambda_1^2+\lambda_2^2=1.$$

Так как

$$\int_\Omega S_2\, d\Omega=0,$$

то из неравенства Пуанкаре имеем:

$$\int_\Omega S_2^2 d\Omega \leq A\int_\Omega |\nabla S_2|^2 d\Omega,$$

отсюда

$$a(S_2,S_2)\geq D, \text{ где } D=\frac{1}{1+A}. \tag{5}$$

Таким образом,

$$J(u^n)-J(u^*)=2(a(u^*,\lambda_2\|u^n-u^*\|_1 S_2)-(f,\lambda_1\|u^n-u^*\|_1 S_1+$$
$$+\lambda_2\|u^n-u^*\|_1 S_2)+a(\lambda_2\|u^n-u^*\|_1 S_2,\lambda_2\|u^n-u^*\|_1 S_2)=$$
$$=2\|u^n-u^*\|_1(\lambda_1(-f,f_1)+\lambda_2(a(u^*,S_2)-(f,S_2)))+$$
$$+\lambda_2^2\|u^n-u^*\|_1^2 a(S_2,S_2)\geq \lambda_2^2\|u^n-u^*\|_1^2 a(S_2,S_2). \tag{6}$$

Если $\lambda_1 < 0$, имеем

$$-\sqrt{1-\lambda_2^2}\,(-f, S_1) + \lambda_2 (a(u^*, S_2) - (f, S_2)) \geq 0,$$

$$\lambda_2 (a(u^*, S_2) - (f, S_2)) \geq \sqrt{1-\lambda_2^2}\,(-f, S_1).$$

Отсюда, ввиду $(-f, S_1) > 0$, следует

$$\lambda_2^2 (a(u^*, S_2) - (f, S_2))^2 \geq (1-\lambda_2^2)(-f, S_1)^2,$$

$$\lambda_2^2 ((a(u^*, S_2) - (f, S_2))^2 + (-f, S_1)^2) \geq (-f, S_1)^2,$$

$$\lambda_2^2 \geq \frac{(-f, S_1)^2}{(a(u^*, S_2) - (f, S_2))^2 + (-f, S_1)^2} \geq \frac{(-f, S_1)^2}{(\|\nabla u^*\|_0 + \|f\|_0)^2 + (-f, S_1)^2}.$$

Тем самым, можно взять

$$\beta = \frac{(-f, S_1)^2}{(\|\nabla u^*\|_0 + \|f\|_0)^2 + (-f, S_1)^2} \cdot \mathcal{D}. \qquad (7)$$

Пусть теперь $\lambda_1 \geq 0$. Тогда

$$\lambda_1 (-f, S_1) + \lambda_2 (a(u^*, S_2) - (f, S_1)) \geq \lambda_1 (-f, S_1) - |\lambda_2| (\|\nabla u^*\|_0 + \|f\|_0).$$

Из (3) и (4) нетрудно показать, что

$$\|u^n - u^*\|_1^2 \leq (1+\alpha) \|u^0 - u^*\|_0^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, решим относительно λ_2 неравенство

$$\sqrt{1-\lambda_2^2}\,\tau - |\lambda_2| \xi \geq \varepsilon \eta,$$

где

$$\xi = \|\nabla u^*\|_0 + \|f\|_0, \quad \eta = \sqrt{1+\alpha}\,\|u^0 - u^*\|_0, \quad \tau = (-f, S_1).$$

Имеем

$$\sqrt{1-\lambda_2^2}\,\tau \geq |\lambda_2| \xi + \varepsilon \eta,$$

$$(1-\lambda_2^2)\tau^2 \geq \lambda_2^2 \xi^2 + 2|\lambda_2| \xi \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \eta^2,$$

$$(\tau^2 + \xi^2)\lambda_2^2 + 2\xi \varepsilon \eta |\lambda_2| + \varepsilon^2 \eta^2 - \tau^2 \leq 0.$$

1. Пусть $\lambda_2 \geq 0$. Тогда

$$(\tau^2+\xi^2)\lambda_2^2+2\xi\varepsilon\eta\lambda_2+\varepsilon^2\eta^2-\tau^2\leq 0.$$

Находим корни

$$\lambda_2^{1,2}=\frac{-\xi\varepsilon\eta\pm\tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2}.$$

Решение неравенства такое:

$$0\leq\lambda_2\leq\frac{-\xi\varepsilon\eta+\tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2}\equiv\varkappa_1 \quad (\varkappa_1\leq 1).$$

Так как $\lambda_2 \geq 0$, найдем те ε, при которых $\varkappa_1 > 0$:

$$0<-\xi\varepsilon\eta+\sqrt{\tau^2(\tau^2+\xi^2)-\tau^2\varepsilon^2\eta^2},$$

$$\xi^2\varepsilon^2\eta^2<\tau^2(\tau^2+\xi^2)-\tau^2\varepsilon^2\eta^2,$$

$$\varepsilon^2\eta^2(\xi^2+\tau^2)<\tau^2(\tau^2+\xi^2),$$

$$\varepsilon<\frac{\tau}{\eta}.$$

2. Пусть теперь $\lambda_2<0$. Имеем

$$(\tau^2+\xi^2)\lambda_2^2-2\xi\varepsilon\eta\lambda_2+\varepsilon^2\eta^2-\tau^2\leq 0,$$

$$\lambda_2^{1,2}=\frac{\xi\varepsilon\eta\pm\tau\sqrt{(\tau+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2}.$$

Тем самым

$$\varkappa_2\equiv\frac{\xi\varepsilon\eta-\tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2}\leq\lambda_2\leq 0 \quad (\varkappa_2\geq -1).$$

Условие $\varkappa_2<0$ выполняется при тех же ε, что и в случае 1:

$$\varepsilon<\frac{\tau}{\eta}.$$

Теперь зафиксируем произвольное ε, $0<\varepsilon<\frac{\tau}{\eta}$. Если

$$|\lambda_2|\leq\frac{-\xi\varepsilon\eta+\tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2}}{\tau^2+\xi^2},$$

то из (6) следует

$$\mathcal{T}(u^n) - \mathcal{T}(u^*) \geq 2\varepsilon \|u^n - u^*\|_1^2 .$$

Если же

$$|\lambda_2| > \frac{-\xi\varepsilon\eta + \tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2) - \varepsilon^2\varrho^2}}{\tau^2 + \xi^2},$$

то из (5) и (6) имеем

$$\mathcal{T}(u^n) - \mathcal{T}(u^*) \geq \mathcal{D} \cdot \left(\frac{-\xi\varepsilon\eta + \tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2) - \varepsilon^2\varrho^2}}{\tau^2 + \xi^2}\right)^2 \|u^n - u^*\|_1^2 .$$

Поэтому в случае $\lambda_1 \geq 0$ можно положить

$$\beta = \sup_{0<\varepsilon<\frac{\tau}{\eta}} \min \left\{2\varepsilon, \mathcal{D}\left(\frac{-\xi\varepsilon\varrho + \tau\sqrt{(\tau^2+\xi^2) - \varepsilon^2\varrho^2}}{\tau^2 + \xi^2}\right)^2\right\} \equiv Q > 0.$$

Объединяя со случаем $\lambda_1 < 0$ (см. (7)), окончательно получим

$$\beta = \min\left\{\mathcal{D}\frac{\tau^2}{\xi^2+\tau^2}, Q\right\}.$$

Теорема доказана.

Обозначим теперь $q = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}}$. Из (3),(4) и теоремы вытекает

$$\|u^n - u^*\|_0^2 + \beta\|u^n - u^*\|_0^2 \leq \|u^{n-1} - u^*\|_0^2 ,$$

$$\|u^n - u^*\|_0^2 \leq \frac{1}{1+\beta}\|u^{n-1} - u^*\|_0^2 = q^2\|u^{n-1} - u^*\|_0^2 \leq q^{2n}\|u^0 - u^*\|_0^2 .$$

$$\frac{1}{\alpha}a(u^n - u^*, u^n - u^*) + \beta a(u^n - u^*, u^n - u^*) \leq \|u^{n-1} - u^*\|_0^2 \leq q^{2n-2}\|u^0 - u^*\|_0^2 ,$$

$$a(u^n - u^*, u^n - u^*) \leq \frac{\|u^0 - u^*\|_0^2}{q^2\left(\frac{1}{\alpha}+\beta\right)} \cdot q^{2n} .$$

Отсюда

$$\|u^n-u^*\|_1^2 \le \left(1+\frac{1}{q^2(\frac{1}{\alpha}+\beta)}\right)\|u^0-u^*\|_0^2\, q^{2n},$$

$$\|u^n-u^*\|_1 \le \sqrt{1+\frac{1}{q^2(\frac{1}{\alpha}+\beta)}}\cdot\|u^0-u^*\|_0\, q^n,\ n=1,2,\ldots$$

Таким образом доказана линейная скорость сходимости алгоритма (2) с постоянными q и $\sqrt{1+\frac{1}{q^2(\frac{1}{\alpha}+\beta)}}\cdot\|u^0-u^*\|_0$.

ЛИТЕРАТУРА

I. КАПЛАН А.А., НАММ Р.В. К характеристике минимизирующих последовательностей для задачи Синьорини. – Докл. АН СССР, 1983, т.273, №4, с.797–800.

2. НАММ Р.В. О некоторых алгоритмах для решения задачи Синьорини. – Оптимизация, 1983, вып. 33(50), с.63–78.

3. АНТИПИН А.С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. – М.: Б.и., 1979. –(Препринт/ ВНИИ системных исследований).

4. КАПЛАН А.А. Алгоритмы выпуклого программирования, использующие сглаживание точных функций штрафа. – Сиб. мат. журн., 1982, т.23, №4, с.1322–1350.

Поступила в ред.-изд. отдел
3.06.1985 г.