УДК 519.853.62

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА

С.И.Гамидов

1. Настоящая работа посвящена дифференцируемости по направлениям функции максимума вида

$$\varphi(x)=\max_{y\in a(x)} f(x,y), \tag{1}$$

где a - многозначное отображение. В различных постановках, использующих те или иные методы возможных направлений, этот вопрос исследован в работах Демьянова В.Ф., Пшеничного Б.Н. и других авторов [1-4]. А.М.Рубинов предложил подход, позволяющий в случае, когда функция f выпукла по совокупности переменных, освободиться от связанных ограничений. В настоящей статье этот подход распространяется на более широкие классы функций. Указан ряд случаев, в которых функция φ квазидифференцируема; описывается метод для поиска минимума в этих случаях.

Пусть E_n - евклидово n-мерное пространство, $\Omega\subset E_n$ - открытое множество. Рассмотрим многозначное отображение $a:\Omega\to\Pi(E_m)$, где $\Pi(E_m)$ - совокупность непустых выпуклых компактных подмножеств пространства E_m. Опорную функцию отображения $a(x)$ будем обозначать тем же символом, что и само отображение. По определению,

$$a(x,l)=\max_{y\in a(x)}[l,y]. \tag{2}$$

Здесь $[l,y]$ - скалярное произведение векторов l и y.

Функция $a(x,l)$ называется дифференцируемой в точке (x,l) по направлению (u,v), если существует конечный предел

$$\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{a(x+\alpha u,l+\alpha v)-a(x,l)}{\alpha}.$$

При этом величина $\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}$ называется полной производной функции a в точке (x,l) по направлению (u,v).

Через $\frac{\partial_1 a(x,l)}{\partial u}$ и $\frac{\partial_2 a(x,l)}{\partial v}$ будем обозначать частные производные по первому и второму аргументу соответственно опорной функции $a(x,l)$ в точке (x,l) по направлению $(u,0)$ и в точке (x,l) по направлению $(0,v)$:

$$\frac{\partial_1 a(x,l)}{\partial u}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{a(x+\alpha u,l)-a(x,l)}{\alpha},\quad \frac{\partial_2 a(x,l)}{\partial v}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{a(x,l+\alpha u)-a(x,l)}{\alpha}.$$

Заметим, что при любом x функция $l\to a(x,l)$ сублинейна, поэтому частная производная $\frac{\partial_2(x,l)}{\partial v}$ всегда существует.

Функция $a(x,l)$ называется равномерно дифференцируемой в точке x по направлению u, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\alpha_0>0$ такое, что

$$a(x+\alpha u,l)-a(x,l)-\alpha\frac{\partial_1 a(x,l)}{\partial u}<\alpha\varepsilon$$

для любого $\alpha\in(0,\alpha_0)$ и любого $l\in B$, где $B\subset E_m$ - ограниченное множество [5].

Справедлива следующая

ЛЕММА I. Пусть частные производные опорной функции $a(x,l)$ существуют, причем отображение a равномерно дифференцируемо. Тогда существует полная производная опорной функции и она представима как сумма частных производных, т.е.

$$\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial_1 a(x,l)}{\partial u}+\frac{\partial_2 a(x,l)}{\partial v}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{a(x+\alpha u,\, l+\alpha v)-a(x,l)}{\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{a(x+\alpha u,l+\alpha v)-a(x,l+\alpha v)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to+0}\frac{a(x,l+\alpha v)-a(x,l)}{\alpha}.$$

Из равномерной сходимости отображения a легко следует, что первый предел существует и совпадает с $\frac{\partial_1 a(x,l)}{\partial u}$. Как отмечалось выше, второй предел, равный $\frac{\partial_2 a(x,l)}{\partial v}$, существует всегда. Отсюда и следует справедливость леммы.

Приведем пример, который показывает, что условие равномерной дифференцируемости в лемме I существенно. Пусть $x\in[a,b]$, а отображение $a(x)$ задано следующим образом: множество $a(x)$ совпадает с отрезком на плоскости, $A=(f_1(x),0), B=(0,f_2(x))$, имеющим вершины в точках $(f_1(x),0)$ и $(0,f_2(x))$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы по направлениям. Ясно, что

$$a(x,l)=max(l_1 f_1(x),\, l_2 f_2(x)).$$

Положим $R(x,l)=\{i: l_i f_i(x)=a(x,l)\}, i=\overline{1,2}$, и определим множества M_j, $j=\overline{1,3}$, следующим образом:

$$M_1=\{(x,l): l_1 f_1(x)>l_2 f_2(x)\}, \tag{4}$$

$$M_2=\{(x,l): l_1 f_1(x)<l_2 f_2(x)\}, \tag{5}$$

$$M_3=\{(x,l): l_1 f_1(x)=l_2 f_2(x)\}. \tag{6}$$

Легко видеть, что множествам (4)-(6) соответствуют множества $R_1(x,l)=\{1\}, R_2(x,l)=\{2\}, R_3(x,l)=\{1,2\}$.

Функция $a(x,l)$ дифференцируема по направлениям, как функция максимума. При этом

$$\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(l_1 f_1(x))}{\partial(u,v)}=l_1\frac{\partial f_1(x)}{\partial u}+f_1(x)\cdot v \quad \text{, если } (x,l)\in M_1 \ ;$$

$$\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(l_2 f_2(x))}{\partial(u,v)}=l_2\frac{\partial f_2(x)}{\partial u}+f_2(x)\cdot v \quad \text{, если } (x,l)\in M_2 \ ;$$

$$\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}=max\left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial u}l_1+f_1(x)v, f_2(x)v+\frac{\partial f_2(x)}{\partial u}l_2\right). \quad \text{если } (x,l)\in M_3 \ .$$

Найдем частные производные. Пусть l фиксировано, $l=\bar{l}$. Тогда

$$\frac{\partial_1 a(x,\bar{l})}{\partial u}=\frac{\partial_1(f_1(x)\bar{l}_1)}{\partial u}=\bar{l}_1\frac{\partial f_1(x)}{\partial u},\ x\in M_1(\bar{l})=\{x:\bar{l}_1 f_1(x)>\bar{l}_2\cdot f_2(x)\};$$

$$\frac{\partial_1 a(x,\bar{l})}{\partial u}=\frac{\partial_1(\bar{l}_2 f_2(x))}{\partial u}=\bar{l}_2\frac{\partial f_2(x)}{\partial u},\ x\in M_2(\bar{l})=\{x:\bar{l}_1 f_1(x)<\bar{l}_2 f_2(x)\};$$

$$\frac{\partial_1 a(x,\bar{l})}{\partial u}=\max\left(\bar{l}_1\frac{\partial f(x)}{\partial u},\bar{l}_2\frac{\partial f_2(x)}{\partial u}\right),\ x\in M_3(\bar{l})=\{x:\bar{l}_1 f_1(x)=\bar{l}_2 f_2(x)\}.$$

Теперь фиксируем $\bar{x}$ и найдем частные производные по l:

$$\frac{\partial_2 a(\bar{x},l)}{\partial v}=\frac{\partial(l_1 f_1(x))}{\partial v}=f_1(\bar{x})\cdot v,\ l\in M_1(\bar{x})=\{l:l_1 f_1(\bar{x})>l_2 f_2(\bar{x})\};$$

$$\frac{\partial_2 a(\bar{x},l)}{\partial v}=\frac{\partial(l_2 f_2(\bar{x}))}{\partial v}=f_2(\bar{x})\cdot v,\ l\in M_2(\bar{x})=\{l:l_1 f_1(\bar{x})<l_2 f_2(\bar{x})\};$$

$$\frac{\partial_2 a_2(\bar{x},l)}{\partial v}=\max(f_1(\bar{x})v,f_2(\bar{x})\cdot v),\ l\in M_3(\bar{x})=\{l:l_1 f_1(\bar{x})=l_2 f_2(\bar{x})\}.$$

Используя полученные формулы, нетрудно указать функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, при которых равенство (3) не выполняется.

Рассмотрим функцию максимума

$$\varphi(x)=\max_{y\in a(x)} f(x,y),\ x\in\Omega,\ y\in Y. \tag{7}$$

Пусть Ω - открытое множество из E_n, $Y\subset E_m$ - выпуклый компакт, функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных, выпукла и непрерывно дифференцируема по y, при этом функция $l_y(x)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ имеет равномерную по y частную производную по x по направлению u. Последнее означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\alpha_0>0$, что

$$\left|l_y(x+\alpha u)-l_y(x)-\alpha\frac{\partial l_y(x)}{\partial u}\right|<\alpha\cdot\varepsilon$$

для любого $\alpha\in(0,\alpha_0)$ и для любого $y\in Y$.

Кроме того, предполагается, что функция $f(x,y)$ равномерно (по y) дифференцируема по направлениям в точке x. Относительно многозначного отображения $a(x)$ будем предполагать, что его опорная функция равномерно дифференцируема в точке x по направлению u. Считаем, что отображение ограничено.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(x,y)$ и $a(x)$ удовлетворяют условиям, сформулированным выше. Тогда функция $\varphi(x)$ дифференцируема по направлению u в точке x и для $\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial u}$ верна формула:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u}=\max_{y\in R(x)}\frac{\partial h(x,y)}{\partial u}=\max_{y\in R(x)}\left(\frac{\partial_1 a(x,l_y(x))}{\partial u}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial u}-\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial u},y\right]\right), \tag{8}$$

где

$$R(x)=\{y\in Y: h(x,y)=\varphi(x)\}, \tag{8'}$$

$$h(x,y)\equiv a(x,l_y(x))+f(x,y)-[l_y(x),y].$$

Приводим лишь краткую схему доказательства. Так как $f(x,y)$ выпукла и непрерывно дифференцируема по y, то при любом фиксированном x справедливо представление

$$f(x,z)=\max_{y\in Y}\left(\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},z-y\right]+f(x,y)\right)=\max_{y\in Y}\left(\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},z\right]+\right.$$

$$\left.+f(x,y)-\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},y\right]\right)\quad \forall z\in Y.$$

Тогда

$$\varphi(x)=\max_{z\in a(x)}f(x,z)=\max_{z\in a(x)}\max_{y\in Y}\left(\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},z\right]+f(x,y)-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},y\right]\right)=\max_{y\in Y}\left(\max_{z\in a(x)}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},z\right]+f(x,y)-\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},y\right]\right).$$

Используя обозначения $l_y(x)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $h(x,y)\equiv a(x,l_y(x))+f(x,y)-$

$-[l_y(x),y]$, для $\varphi(x)$ получим

$$\varphi(x)=\max_{y\in Y}(a(x,l_y(x))+f(x,y)-[l_y(x),y])=\max_{y\in Y} h(x,y),$$

т.е. функция φ представлена как функция максимума без связанных ограничений. Чтобы применить теорему о дифференцируемости функции максимума [3], надо показать, используя условия теоремы, что функция $h(x,y)$ равномерно дифференцируема. После этого, привлекая теорему 3.2 [3], получим формулу (8).

Отметим, что в приведенном выше виде теорема сформулирована в [6]. В недавно вышедшей статье Пшеничного Б.Н. и Кирилюка В.С. [7] получены близкие результаты.

Все известные теоремы о производной функции максимума, опирающиеся на свойства опорных функций, требуют равномерную дифференцируемость опорной функции. Поэтому важно указать класс функций $f(x,y)$, при которых дифференцируемость функции максимума φ можно гарантировать, не используя равномерности.

Пусть функция $f(x,y)$ имеет следующий вид:

$$f(x,y)=\max_{i\in I}([g_i(x),y]+h_i(x), \tag{9}$$

где I - конечное множество индексов. Пусть функции $g_i(x)$, $h_i(x)$ дифференцируемы по направлениям. Относительно отображения $\alpha(x)$ будем предполагать, что оно удовлетворяет условию Липшица. Имеем

$$\varphi(x)=\max_{y\in a(x)}(\max_i([g_i(x),y]+h_i(x))=$$

$$=\max_i(\max_{y\in a(x)}[g_i(x),y]+h_i(x).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x)=\max_i(a(x,g_i(x))+h_i(x)). \tag{10}$$

Пусть $G_i(x)=a(x,g_i(x))$. Получим формулу для производной функции $\varphi(x)$. Имеем

$$\frac{\partial G_i(x)}{\partial u}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{G_i(x+\alpha u)-G_i(x)}{\alpha}=\lim\frac{a(x+\alpha u,g_i(x+\alpha u))-a(x,g_i(x))}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{a\left(x+\alpha u,\ g_i(x)+\alpha\frac{\partial g_i(x)}{\partial u}+o_i(\alpha)\right)-a(x,g_i(x))}{\alpha} \quad (11)$$

По условию отображение $a(x)$ удовлетворяет условию Липшица, поэтому, как можно показать, его опорная функция тоже удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных. Отсюда следует, что в (11) величиной $o_i(\alpha)$ можно пренебречь. Имея в виду это, получим

$$\frac{\partial G_i(x)}{\partial u} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{a\left(x+\alpha u, g_i(x)+\alpha\frac{\partial g_i(x)}{\partial u}\right)-a(x,g_i(x))}{\alpha} = \frac{\partial a(x,g_i(x))}{\partial\left(u,\frac{\partial g_i(x)}{\partial u}\right)}.$$

Это позволяет применять к (10) известные теоремы [2] о дифференцируемости функции максимума. Таким образом,

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u} = \max_{i\in R(x)}\left(\frac{\partial G_i(x)}{\partial u}+\frac{\partial h_i(x)}{\partial u}\right) =$$

$$= \max_{i\in R(x)}\left(\frac{\partial a(x,g_i(x))}{\partial\left(u,\frac{\partial g_i(x)}{\partial u}\right)}+\frac{\partial h_i(x)}{\partial u}\right), \quad (12)$$

где

$$R(x)=\{i\in I : G_i(x)+h_i(x)=\varphi(x)\}.$$

Мы показали, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $f(x,y)$ определена формулой (9), отображение удовлетворяет условиям Липшица. Тогда функция $\varphi(x)=\max_{y\in a(x)} f(x,y)$ дифференцируема в точке x по любому направлению u и ее производная $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u}$ вычисляется по формуле* (12).

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркнем, что, в отличие от случая равномерной дифференцируемости опорной функции, производная φ выражается через полную производную $\frac{\partial a(x,l)}{\partial(u,v)}$, которая, как показывает приведенный выше пример, не всегда совпадает с суммой частных.

II. Применим полученные формулы в следующих примерах. Пусть $\varphi(x)=\max\limits_{y\in a(x)} f(x,y)$, где $f(x,y)$ - непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция, имеющая непрерывную смешанную частную производную второго порядка. В качестве $a(x)$ будем рассматривать отображения, встречающиеся в моделях экономической динамики [8,9]. Используя особенности этих отображений, покажем, что при некоторых предположениях функция $\varphi(x)$ квазидифференцируема. Это позволит применять для минимизации функции φ метод, разработанный в (10).

ПРИМЕР 1. Пусть $a(x)=\Psi(x)\cdot\xi$, где $\Psi(x)=\min\limits_{i\in I}\frac{x_i}{a_i}$, $I=\{i:1\leq i\leq n\}, a_i>0, x_i>0, \xi$ - выпуклый компакт. Опорная функция отображения a имеет следующий вид:

$$a(x,l)=\max_{y\in a(x)}[l,y]=\min_i\frac{x_i}{a_i}\cdot\max_{y\in\xi}[l,y].$$

Введем обозначения

$$F_i(x_i)=\frac{x_i}{a_i},\ \phi(x,y)=[l_y(x),y]\quad,\text{ где } l_y(x)\equiv\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

$$P_\xi(x)=\max_{y\in\xi}[l_y(x),y]=\max_{y\in\xi}\Phi(x,y).$$

и положим

$$R_1(x)=\{i\in I:\Psi(x)=F_i(x_i)\},\ R_2(x)=\{y\in\xi:P_\xi(x)=\Phi(x,y)\}.$$

Тогда $a(x,l_y(x))=\Psi(x)\cdot P_\xi(x)$. Эта функция дифференцируема по направлениям. Имеем

$$\frac{\partial a(x,l_y(x))}{\partial u}=\Psi(x)\cdot\frac{\partial P_\xi(x)}{\partial u}+\frac{\partial\Psi(x)}{\partial u}P_\xi(x)=$$

$$=\Psi(x)\cdot\max_{y\in R_2(x)}\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial u},y\right]+P_\xi(x)\cdot\min_{i\in R_1(x)}\frac{\partial F_i(x_i)}{\partial u}.\qquad(13)$$

Ясно, что $\frac{\partial F_i(x_i)}{\partial u}=\frac{u_i}{a_i}$. Подставляя (13) в (8), имеем

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u}=\max_{y\in R(x)}\left(\Psi(x)\cdot\max_{y\in R_2(x)}\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial u},y\right]+\right.$$

$$+P_{\xi}(x)\cdot\min_{i\in R_1(x)}\frac{u_i}{a_i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial u}_{R(x)}-\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial u},y\right].$$

Предположим, что множество $R(x)$ конечно, и рассмотрим, при каких условиях функция $\varphi(x)$ квазидифференцируема; из условий, наложенных на функцию $\psi(x)$, ясно, что $\psi(x)>0$ при любом $i\in I$. Отдельно рассматриваем следующие случаи.

а) $P_{\xi}(x)>0$. В этом случае функция $\varphi(x)$ квазидифференцируема и в качестве суб- и супердифференциалов можно взять следующие множества:

$$\underline{\partial}\varphi(x)=co\left\{v: v=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial x},y\right]+\psi(x)\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial x},y\right]: y\in R(x)\right\},$$

$$\overline{\partial}\varphi(x)=co\left\{w: w=P_{\xi}(x)\cdot\frac{1}{a_i}: i\in R_1(x)\right\}.$$

б) $P_{\xi}(x)<0$. После несложных преобразований для субдифференциала получим

$$\underline{\partial}\varphi(x)=co\left\{v: v=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial x},y\right]+\psi(x)\left[\frac{\partial l_y(x)}{\partial x},y\right]+\right.$$

$$\left.+P_{\xi}(x)\cdot\frac{1}{a_i},\ i\in R_1(x), y\in R(x)\right\}.$$

Супердифференциал тривиален:

$$\overline{\partial}\varphi(x)=\{0\}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $a(x)=\langle 0,Ax\rangle+\psi(x)\cdot\xi$, где Ax и $\psi(x)$ – дифференцируемые функции, ξ – выпуклый компакт. Для опорной функции $a(x,l)$ получим:

$$a(x,l)=\max_{y\in a(x)}[l,y]=\max_{0\le\ \le Ax}[l,y]+\max_{y\in\psi(x)\xi}[l,y]=$$

$$=[l^+,Ax]+\max_{y\in\xi}[l,y]\cdot\psi(x).$$

Обозначим $F(x,y)=[l_y(x),y]$, $P_{\xi}(x)=\max_{y\in\xi}F(x,y)$ и положим $R_1(x)=\{y\in\xi: F(x,y)=P_{\xi}(x)\}$.

Функция $a(x,l_y(x))$ дифференцируема по направлениям

$$\frac{\partial a(x,l_y(x))}{\partial u}=\left[\frac{\partial l^+(x)}{\partial u},Ax\right]+\left[l^+(x),\frac{\partial A(x)}{\partial u}\right]+$$

$$+\ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial u}\cdot P_{\xi}(x)+\max_{y\in R_1(x)}\Psi(x)\frac{\partial F(x)}{\partial u}. \qquad (14)$$

Используя теорему I, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u}=\max_{y\in R(x)}\left(\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial u}+P_{\xi}(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial u}+\max_{\substack{y\in R_1(x)\\ x\in x^+}}\Psi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial u}+\min_{\substack{y\in R_1(x)\\ x\in x^-}}\Psi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial u}\right),$$

где $\Phi(x,y)\equiv[\ell^+(x),Ax]+f(x,y)-[\ell_y(x),y]$, $x^+=\{x:\Psi(x)>0\}$, $x^-=\{x:\Psi(x)<0\}$.

Как и в примере I, при предположении о конечности множества $R(x)$ можно показать, что функция $\varphi(x)$ квазидифференцируема, т.е.

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u}=\max_{v\in \underline{\partial}\varphi(x)}[v,u]+\min_{w\in \overline{\partial}\varphi(x)}[w,u],$$

причем

$$\underline{\partial}\varphi(x)=co\left\{v:v=\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}+P_{\xi}(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}+\Psi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}:x\in x^+;y\in R_1(x)\right\},$$

$$\overline{\partial}\varphi(x)=co\left\{w:w=\Psi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}:x\in x^-;y\in R(x)\right\}. \qquad (16)$$

Ш. В этом пункте применен метод, описанный в (I0), к минимизации функции максимума

$$\varphi(x)=\max_{y\in a(x)}f(x,y),$$

где отображение a определено, как в примере 2, т.е. $a(x)=$ $=\langle 0,Ax\rangle+\Psi(x)\xi$. В п.II было показано, что при определенных условиях, наложенных на функцию $f(x,y)$ и отображения $a(x)$, функция φ квазидифференцируема, причем $\underline{\partial}\varphi(x)$, $\overline{\partial}\varphi(x)$, $R(x)$ определены формулами (8$'$), (I6). Фиксируем $\varepsilon>0$, $\mu>0$ и наряду с множествами $\underline{\partial}\varphi(x)$, $\overline{\partial}\varphi(x)$, $R(x)$ рассмотрим множества $\underline{\partial}_{\varepsilon}\varphi(x)$, $\overline{\partial}_{\mu}\varphi(x)$, $R_{\xi}(x)$, определенные таким образом:

$$\underline{\partial}_{\varepsilon}\varphi(x)=co\left\{v:v=\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}+P_{\xi}(x)\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}+\Psi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}:x\in x^+;\right.$$
$$\left.y\in R_{\xi}(x)\right\};$$

$$\partial_\mu^- \varphi(x) = co\{w : w = \psi(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} : x \in X;\ y \in R_\mu(x)\};$$

$$R_\varepsilon(x) = \{y \in Y : \varphi(x) \le h(x,y) + \varepsilon\}.$$

Напомним, что точка x^* называется ε-inf-стационарной точкой, если

$$-\partial\overline{\varphi}(x^*) \subset \underline{\partial}_\varepsilon \varphi(x^*).$$

Последовательность точек $\{x_k\}$ строится следующим образом. Пусть выбрана произвольная начальная точка x_0. Предположим, что множество $\mathcal{D}(x_0) = \{x : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$ ограничено. Допустим, что x_k найдена. Если оказалось, что $-\partial\overline{\varphi}(x_k) < \underline{\partial}_\varepsilon \varphi(x_k)$, то найденная точка ε-inf-стационарная, и процесс прекращается. В противном случае поступаем следующим образом.

Найдем

$$\min_{v \in \underline{\partial}_\varepsilon \varphi(x_k)} \| v + w \| = \| v_k + w \|$$

и в качестве направления ε - наискорейшего спуска - положим

$$g_\varepsilon(w) = -\frac{v_k + w}{\|v_k + w\|}.$$

На векторе $x_k + \alpha g_\varepsilon(w)$ вычислим

$$\min \varphi(x_k + \alpha g_\varepsilon(w)) = \varphi(x_k + \alpha_k g_\varepsilon(w)),$$

и обозначим $g_k = g_\varepsilon(w_k)$, где

$$w_k = \arg\min_{w \in \partial_\mu^- \varphi(x_k)} \varphi(x_k + \alpha_k g_\varepsilon(w_k)).$$

В качестве следующего шага положим

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k g_k.$$

Очевидно, что

$$\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k) < \dots$$

Если построенная таким образом последовательность $\{x_k\}$ конечна, то по построению последний ее элемент является ε-inf-

стационарной точкой. В противном случае верна

ТЕОРЕМА 3. Любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является ε-inf-стационарной.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. ДЕМЬЯНОВ В.Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям.- Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
2. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., ВАСИЛЬЕВ Л.В. Недифференцируемая оптимизация. - Л.: Наука, 1981.
3. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Необходимые условия экстремума. - М.: Наука, 1982.
4. БОРИСЕНКО О.Ф., МИНЧЕНКО Л.И. О дифференцируемости по направлениям функции максимума. - Журн. вычислит. математики и математ. физики, 1983, №3, с.567-575.
5. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1969.
6. ГАМИДОВ С.И. О дифференцируемости по направлениям функции максимума при связанных ограничениях: Материалы 5-й республиканской конференции молодых ученых. Т.I. Баку, 1984, - Баку: Элм, с.105-109.
7. Пшеничный Б.Н., КИРИЛЮК В.С. О дифференцируемости функции максимума со связанными ограничениями. - Кибернетика, 1985, №1, с. 123-125.
8. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
9. РУБИНОВ А.М. Об одной нелинейной модели леонтьевского типа.- Оптимизация, 1983, вып. 32(49), с.109-127.
10. DEMJANOV V.F., GAMIDOV S., SIVELINA T.I. An algoritm for minimizing a certain class of quasidifferentiable functions. - IIASA, WP-83-122, 1983.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.06.1985 г.