Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Теория игр

УДК 519.83

ДОСТИЖИМОСТЬ ЯДЕР КЛАССИЧЕСКИХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В.А.Васильев, Р.О.Жоробеков

В заметке дается положительное решение поставленного в [1] вопроса о достижимости ядер для случая классических кооперативных игр. Доказательство основано на построении надлежащей точечно-множественной динамической системы, все траектории которой монотонны в смысле отношения доминирования и сходятся к ядру рассматриваемой игры. Мотивировки приводимых понятий содержатся в [1-4].

1. Напомним общую постановку задачи и введем необходимые определения из элементарной теории точечно-множественных динамических систем.

Пусть X – некоторое полное метрическое пространство с метрикой d, а $\alpha \subseteq X \times X$ – произвольное бинарное отношение на X. Систему $\Gamma=(X,\alpha)$, как и в [1], будем называть абстрактной игрой (а.и.).

Наряду со стандартным обозначением $x\alpha y \Longleftrightarrow (x,y)\in\alpha$ в дальнейшем используются следующие сокращения: $x \underline{\alpha} y \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (x\alpha y)\vee(x=y)$, $x\bar{\alpha} y \Longleftrightarrow (x,y)\notin\alpha$. Как обычно, элемент $x\in X$ называется максимальным (α-максимальным), если не существует $y\neq x$ такого, что $x\alpha y$. Множество всех максимальных элементов а.и. Γ обозначим через $C(\Gamma)$ и, следуя теоретико-игровой терминологии, будем называть его ядром игры Γ.

Таким образом, в наших обозначениях ядро а.и. Γ определяется равенством

$$C(\Gamma)=\{x\in X \mid \forall y\neq x\ (x\bar{\alpha}y)\}.$$

Переходя к основному определению, условимся называть последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонной, если

$$x^k \underline{\alpha}\, x^{k+1},\ k=1,\dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I [I]. Будем говорить, что ядро $C(\Gamma)$ достижимо, если для любого $x\notin C(\Gamma)$ найдется сходящаяся монотонная последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $x^1=x$ и $\lim x^k\in C(\Gamma)$.

Для $x\in X$ через $\mathcal{L}_\alpha(x)$ обозначим "нижнее лебеговское множество", отвечающее x : $\mathcal{L}_\alpha(x)=\{y\in X \mid y\alpha x\}$. Соответственно через $\mathcal{L}^\alpha(x)$ будем обозначать "верхнее лебеговское множество", отвечающее x: $\mathcal{L}^\alpha(x)=\{z\in X \mid x\alpha z\}$.

Ясно, что достижимость ядра $C(\Gamma)$ определяется топологическими и порядковыми свойствами точечно-множественного отображения

$$\varphi^\alpha(x)=\mathcal{L}^\alpha(x)\cup\{x\},\ x\in X. \qquad (I)$$

Ключевую роль в дальнейших построениях играют специальные точечно-множественные селекторы*) отображения φ^α. Интересующие нас характеристики этих селекторов удобно формулировать в терминах элементарной теории точечно-множественных динамических систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Отображение $\varphi: X\to 2^X$ называется точечно-множественной динамической системой (т.м.д.с.) на X, если $\varphi(x)\neq\varnothing$ для всех $x\in X$.

Пусть φ - произвольная т.м.д.с. на X. Последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть траекторией φ, если $x^{k+1}\in\varphi(x^k)$ для всех $k=1,\dots$ Сформулируем условие, обеспечивающее сходимость всех траекторий т.м.д.с. φ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I [2]. Если для т.м.д.с. φ на X существует ограниченная функция $u: X\to R$, удовлетворяющая требованию

$$u(x)-u(y)\geq d(x,y) \text{ для всех } x,y\in\varphi(x), \qquad (2)$$

*) Под селектором точечно-множественного отображения $\varphi: X\to 2^X$ понимается отображение $\psi: X\to 2^X$, удовлетворяющее условию: $\psi(x)\subseteq\varphi(x),\ x\in X$.

то каждая траектория φ является сходящейся.

Функция u, фигурирующая в условии (2), называется функцией Ляпунова т.м.д.с. φ.

Отметим, что справедливость предложения I легко вытекает из неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x^k, x^{k+1}) \leq \sup_X u(x) - \inf_X u(x),$$

выполняющегося для любой траектории $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ системы φ, и из полноты пространства X.

Будем говорить, что т.м.д.с. φ допускает функцию Ляпунова, если для нее существует ограниченная функция u, удовлетворяющая условию (2). Среди систем, допускающих функцию Ляпунова, особое место занимают полунепрерывные снизу т.м.д.с. φ, т.е. такие, для которых выполнено требование

$$\forall x \in X \ \forall y \in \varphi(x) \ \forall x^k \to x \ \exists y^k \to y \ [\forall k (y^k \in \varphi(x^k))]. \quad (3)$$

Дело в том, что эти системы обладают селекторами, все траектории которых сходятся к элементам финального множества исходной т.м.д.с. При этом под финальным множеством т.м.д.с. φ понимается, как обычно, множество

$$E_\varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) = \{x\}\}. \quad (4)$$

Более точно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть φ – полунепрерывная снизу, допускающая функцию Ляпунова т.м.д.с. на X. Положим

$$\rho(x) = \sup\{d(x, y) \mid y \in \varphi(x)\}, \ x \in X. \quad (5)$$

Тогда для любого $\delta \in (0,1)$ все траектории т.м.д.с. φ_δ, определяемой по формуле

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \in E, \\ \{y \in \varphi(x) \mid d(x, y) > \delta \cdot \rho(x)\}, & x \notin E_\varphi, \end{cases} \quad (6)$$

сходятся к элементам финального множества E_φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое $\delta \in (0,1)$ и рассмотрим произвольную траекторию $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ т.м.д.с. φ_δ. Сходимость последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, в силу соотношения $\varphi_\delta \subseteq \varphi$, вытекает из предложения I. Покажем, что $x^* = \lim x^k \in E_\varphi$. С этой целью заметим, что функция ρ полунепрерывна снизу*). Действительно, пусть a - произвольное вещественное число. Покажем, что множество $M_\rho(a) = \{x \in X \mid \rho(x) \leq a\}$ замкнуто. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $\{z^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M_\rho(a)$. Пусть $z = \lim z^k$. Тогда, в силу полунепрерывности снизу т.м.д.с. φ, для любого $y \in \varphi(z)$ найдется сходящаяся последовательность $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $y = \lim y^k$ и $y^k \in \varphi(z^k)$ для всех $k = 1, \ldots$ Поскольку, по условию, $d(z^k, y^k) \leq a$ для всех $k = 1, \ldots$, имеем: $d(z, y) = \lim d(z^k, y^k) \leq a$. Отсюда и получаем требуемое:

$$\rho(z) = \sup\{d(z, y) \mid y \in \varphi(z)\} \leq a.$$

Итак, допустим, что $x^* \notin E_\varphi$. Но тогда $\rho(x^*) = c > 0$. Ввиду полунепрерывности снизу функции ρ найдется $k_0 \geq 1$ такое, что $\rho(x^k) > c/2$ для всех $k \geq k_0$. Отсюда, в силу определения φ_δ, имеем: $d(x^k, x^{k+1}) > c \cdot \delta/2$ для всех $k \geq k_0$. Но это противоречит сходимости последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$. Итак, $\rho(x^*) = 0$ и, следовательно, $x^* \in E_\varphi$, что и требовалось установить.

На основании предложения 2 для доказательства достижимости ядра а.и. $\Gamma = (X, \alpha)$ достаточно построить полунепрерывную снизу точечно-множественную динамическую систему ψ на X, допускающую функцию Ляпунова и удовлетворяющую соотношениям

$$\psi(x) \subseteq \varphi^\alpha(x), \quad x \in X, \tag{7}$$

$$E_\psi = E_{\varphi^\alpha}. \tag{8}$$

В частности, если а.и. Γ такова, что для любого $x \in X$ множество $\mathcal{L}_\alpha(x)$ открыто, то для формирования искомого селектора т.м.д.с. φ^α достаточно установить существование ограниченной полунепрерывной снизу функции $u : X \to R$, удовлетворяющей условию

$$\forall x \notin C(\Gamma)\, \exists z \in \mathcal{L}^\alpha(x)\ (u(x) - u(z) > d(x, z)). \tag{9}$$

Действительно, в этом случае т.м.д.с. φ_u, определенная по формуле

---

*) Напомним, что $f : X \to R$ называется полунепрерывной снизу, если для любого $a \in R$ множество $M_f(a) = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ замкнуто.

$$\Psi_u(x)=\{y\in \mathcal{L}^{\alpha}(x) \mid u(x)-u(y)>d(x,y)\}\cup\{x\},\ x\in X,$$

очевидным образом удовлетворяет условиям (7), (8) и, кроме того, полунепрерывна снизу и допускает функцию Ляпунова. Существование последней очевидно, что же касается полунепрерывности снизу, то она вытекает из полунепрерывности снизу функции u и открытости множеств $\mathcal{L}_\alpha(x)$. В самом деле, пусть $x\in X, y\in\Psi_u(x)$ и $x^k\to x$. Если $y=x$, то искомая последовательность $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ строится по формуле $y^k=x^k$ для всех $k=1,\ldots$ Если же $y\neq x$, то, очевидно, $x\alpha y$ и, ввиду открытости $\mathcal{L}_\alpha(y)$, имеем: $x^k\alpha y$ для всех k, начиная с некоторого $k_1\geq 1$. Поскольку функция $m(z)=$ $=u(z)-u(y)-d(z,y)\ (z\in X)$ полунепрерывна снизу, из неравенства $m(x)>0$ вытекает существование $k_2\geq 1$ такого, что $m(x^k)>0$ для всех $k\geq k_2$. Поэтому, полагая

$$k_0=\max\{k_1,k_2\},$$

$$y^k=\begin{cases} x^k, & k\leq k_0,\\ y, & k>k_0,\end{cases}$$

имеем: $y^k\in\mathcal{L}^{\alpha}(x^k)$ и $u(x^k)-u(y^k)>d(x^k,y^k)$ для всех $k>k_0$, что и завершает проверку полунепрерывности снизу для т.м.д.с. Ψ_u.

Сформулируем вышесказанное в виде следующего условия достижимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если а.и. $\Gamma=(X,\alpha)$ такова, что множества $\mathcal{L}_\alpha(x)$ открыты для всех $x\in X$ и при этом существует ограниченная полунепрерывная снизу функция $u:X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (9), то ядро $C(\Gamma)$ достижимо.*

Таким образом, предложения I–3 позволяют в ряде случаев решить проблему достижимости ядра а.и. $\Gamma=(X,\alpha)$ с помощью сужения бинарного отношения α до некоторого $\alpha'\subseteq\alpha$, обладающего тем свойством, что все α'-монотонные последовательности $\Gamma'=(X,\alpha')$ сходятся к элементам ядра $C(\Gamma')$ и при этом $C(\Gamma')=C(\Gamma)$. Или, другими словами, предложения I–3 обеспечивают некоторые предпосылки для построения т.м.д.с. $\Psi\subseteq\Psi^{\alpha}$, имеющих глобально устойчивые финальные множества E_Ψ, совпадающие с $C(\Gamma)$.

2. Реализуем приведенную схему доказательства достижимости ядра для случая классических кооперативных игр (к.к.и.). Напомним, что классической кооперативной игрой n лиц называется система $\Gamma_v=(X_v, \prec_v)$, где $v: 2^N \to R$ – произвольная вещественнозначная функция, заданная на множестве всех подмножеств $S \subseteq N=\{1,\dots,n\}$ такая, что $v(\emptyset)=0$ и $v(S \cup T) \geq v(S)+v(T)$ для любых непересекающихся S, T; $X_v=\{x \in R^N \mid \sum_N x_i = v(N), x_i \geq v(\{i\}), i \in N\}$ – множество дележей к.к.и. Γ_v, а $\prec_v$ – классическое отношение доминирования на X_v, определяемое следующим образом [4]:

$$x \prec_v y \Longleftrightarrow \exists S[\forall i \in S(x_i < y_i) \,\&\, (y(S) \leq v(S))].^{*)}$$

Отметим, что отношение $\prec_v$, вообще говоря, нетранзитивно и неантисимметрично, в силу чего т.м.д.с. $\varphi^{\prec_v}$ может иметь циклы любой длины. Более того, можно показать, что любая конечная а.и. реализуется в виде подыгры подходящей к.к.и. Γ_v. Наконец, уже простейшие примеры к.к.и. трех лиц показывают, что множества дележей этих игр могут содержать подмножества ненулевой меры такие, что все начинающиеся в них конечные монотонные траектории не достигают ядра.

Эти и другие трудности исследования достижимости ядер $C(\Gamma_v)$ удается преодолеть на пути, указываемом предложениями I–3. Именно, для любой к.к.и. Γ_v множество X_v компактно и, как нетрудно проверить, все множества $L_{\prec_v}(x)$ открыты в X_v. Поэтому для доказательства достижимости $C(\Gamma_v)$ достаточно, на основании предложения 3, построить непрерывную функцию $u: X_v \to R$, удовлетворяющую условию (9) для некоторой подходящей метрики d на X_v.

Ниже доказывается, что в качестве таковой можно взять функцию вида

$$u(x)=c \cdot d_2(x, C(v)), \quad x \in X_v,$$

где $d_2(x, Y)$ – расстояние от x до множества Y в евклидовой метрике d_2, c – некоторая константа, не зависящая от x, и

$$C(v) \triangleq C(\Gamma_v).$$

---

*) Здесь и далее $x(S)=\sum_S x_i$.

Всюду далее предполагается, что $C(v)\neq\varnothing$ и при этом функция v находится в 0-I-нормализованной форме, т.е. $v(N)=1$, $v(\{i\})=0$ для всех $i\in N$. Это предположение не уменьшает общности, так как всякая к.к.и. Γ_v стратегически эквивалентна некоторой игре $\Gamma_{v'}$ с 0-I-нормализованной функцией v' (см., например,[5]).

Переходя к формулировке основной леммы, напомним, что ядро $C(v)$ к.к.и. Γ_v допускает следующее простое описание:

$$C(v)=\{x\in X_v \mid x(S)\geq v(S),\ S\subseteq N\}. \tag{I0}$$

ЛЕММА. Пусть $x\notin C(v)$. Тогда найдется $z\in X_v$ такой, что $x\prec_v z$ и при этом

$$u_v(x)-u_v(z)>\|x-z\|_2, \tag{II}$$

где

$$u_v(x)=4n\cdot\min_{y\in C(v)}\|x-y\|_2,\ x\in X_v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x - произвольный элемент из $X_v\setminus C(v)$. Для наших целей достаточно установить существование $z\in X_v$, удовлетворяющего условию (II) и следующему ослаблению требования доминируемости: $x\prec_v^* z$, где

$$x\prec_v^* z \iff \exists S[\forall i\in S(x_i\leq z_i)\ \&\ (x(S)<z(S)\leq v(S))].$$

Сказанное вытекает из того, что всякая окрестность такой точки z содержит элементы $z'\in X_v$, доминирующие x (т.е. такие, что $x\prec_v z'$), а соотношение (II), ввиду непрерывности функций u_v и $\|\cdot\|_2$, выполняется и в некоторой окрестности z.

Для построения $z\in X_v$, удовлетворяющего условию (II) и соотношению $x\prec_v^* z$, рассмотрим наименее уклоняющийся от x (в евклидовой метрике) элемент $y\in C(v)$. Покажем, что непустое семейство $\mathcal{T}_x=\{T\subseteq N \mid x(T)<v(T)\}$ содержит коалицию S, для которой $y(S)=v(S)$. Действительно, в противном случае для всех $T\in\mathcal{T}_x$ выполняются неравенства $y(T)>v(T)$. Но тогда при достаточно малом $\lambda\in(0,1)$ элемент $y'=\lambda x+(1-\lambda)y$ в силу формулы (I0), принадлежит $C(v)$. В то же время $\|x-y'\|_2<\|x-y\|_2$, что противоречит предположению $\|x-y\|_2=\min\{\|x-t\|_2 \mid t\in C(v)\}$.

Итак, существует коалиция $S\subseteq N$ такая, что $x(S)<v(S)$ и $y(S)=v(S)$. Определим множества

$$S_1=\{i\in S \mid x_i<y_i\},$$
$$S_2=\{i\in S \mid x_i\geq y_i\},$$
$$T_1=\{i\in N\setminus S \mid x_i>y_i\},$$
$$T_2=\{i\in N\setminus S \mid x_i\leq y_i\}.$$

В силу выбора S, x и y множества S_1 и T_1 непусты. Если при этом $S_2^+=\{i\in S_2 \mid x_i>y_i\}=\emptyset$, в качестве искомого можно взять $z=y$.

Рассмотрим случай, когда $S_2^+\neq\emptyset$. Положим, как обычно,

$$e(x,S)=v(S)-x(S)$$

и введем обозначения

$$q_1=e(x,S)/y(S_1)-x(S_1),$$
$$q_2=e(x,S)/x(T_1)-y(T_1).$$

Определим z по формуле:

$$z_i=\begin{cases} x_i+q_1(y_i-x_i), & i\in S_1,\\ x_i+q_2(y_i-x_i), & i\in T_1,\\ x_i, & i\in S_2\cup T_2.\end{cases}$$

Ясно, что $z\in X_v$ и $x\prec_v^* z$. В самом деле, ввиду соотношений

$$e(x,S)=(y(S_1)-x(S_1))+(y(S_2)-x(S_2)), \qquad (12)$$

$$e(x,S)=(x(T_1)-y(T_1))+(x(T_2)-y(T_2)), \qquad (13)$$

справедливы включения $q_1,q_2\in(0,1]$. Поэтому для всех $i\in S_1\cup T_1$ имеют место неравенства $z_i\geq\min\{x_i,y_i\}\geq 0$, что, наряду с сотношениями $e(x,S)=\sum_{S_1} q_1(y_i-x_i)=\sum_{T_1} q_2(x_i-y_i)$, и доказывает принадлежность $z\in X_v^{S_1}$.

Что касается условия $x\prec_v^* z$, то для его проверки достаточно заметить, что $S_1\neq\emptyset$, причем $x_i=z_i$ для всех $i\in S_2$, $z(S)=x(S)+e(x,S)=v(S)$, и, следовательно,

$$x_i \le z_i, \quad i \in S,$$
$$x(S) < z(S) \le v(S).$$

Покажем теперь, что для z выполняется неравенство (II). Для этого установим верхнюю и нижнюю оценки $\|x-z\|_2$ и $u_v(x)-u_v(z)$ соответственно. Учитывая определение множеств S_1 и T_1, имеем

$$\|x-z\|_2=[q_1^2\cdot\sum_{S_1}(y_i-x_i)^2+q_2^2\cdot\sum_{T_1}(y_i-x_i)^2]^{1/2}=$$
$$=e(x,S)\cdot[\sum_{S_1}(y_i-x_i)^2/(y(S_1)-x(S_1))^2+\sum_{T_1}(y_i-x_i)^2/(y(T_1)-$$
$$-x(T_1))^2]^{1/2}\le\sqrt{2}\cdot e(x,S).$$

Далее, непосредственно из определения функции u_v вытекают неравенства

$$1/4n\cdot(u_v(x)-u_v(z))\ge\|x-y\|_2-\|z-y\|_2. \quad (14)$$

Получим нижнюю оценку для $\|x-y\|_2-\|z-y\|_2$. С этой целью заметим, что в силу определения z справедливо равенство

$$\|z-y\|_2=[\|x-y\|_2^2-(Q_1+Q_2)]^{1/2},$$

где

$$Q_1=(2q_1-q_1^2)\cdot\sum_{S_1}(y_i-x_i)^2,$$
$$Q_2=(2q_2-q_2^2)\cdot\sum_{T_1}(y_i-x_i)^2.$$

При этом, ввиду $q_1,q_2\in(0,1]$, справедливы неравенства $2q_1-q_1^2>0$, $2q_2-q_2^2>0$ и, следовательно, $Q_1>0$, $Q_2>0$. Поэтому

$$\|x-y\|_2-\|z-y\|_2=\frac{\|x-y\|_2^2-\|z-y\|_2^2}{\|x-y\|_2+\|z-y\|_2}\ge\frac{Q_1+Q_2}{2\|x-y\|_2}. \quad (15)$$

Для оценки величины $(Q_1+Q_2)/2\|x-y\|_2$ воспользуемся известным соотношением

$$\sum_{i=1}^m a_i^2/(\sum_{i=1}^m a_i)^2\ge 1/m, \quad (16)$$

вытекающим из неравенства Коши - Буняковского: $(a,b)^2\le\le\|a\|_2^2\cdot\|b\|_2^2$ при $a=(a_1,\dots,a_m)$, $b=(1,\dots,1)$.

Именно, из определения множеств S_2, T_2 и из соотношений (12), (13) вытекают неравенства

$$\sum_{S_2}(y_i-x_i)^2\le(y(S_2)-x(S_2))^2\le(y(S_1)-x(S_1))^2;$$
$$\sum_{T_2}(y_i-x_i)^2\le(y(T_2)-x(T_2))^2\le(y(T_1)-x(T_1))^2.$$

Поэтому, в силу (I6), имеем

$$\sum_{S_2}(y_i-x_i)^2\le(y(S_1)-x(S_1))^2\le|S_1|\cdot\sum_{S_1}(y_i-x_i)^2; \qquad (I7)$$

$$\sum_{T_2}(y_i-x_i)^2\le(y(T_1)-x(T_1))^2\le|T_1|\cdot\sum_{T_1}(y_i-x_i)^2.\ ^{*)} \qquad (I8)$$

Следовательно, $\|x-y\|_2\le\sqrt{n}\cdot[\sum_{S_1}(y_i-x_i)^2+\sum_{T_1}(y_i-x_i)^2]^{1/2}$, откуда, учитывая определение Q_1, Q_2,

$$\|x-y\|_2\le\sqrt{n}\cdot\left(Q_1/2q_1-q_1^2+Q_2/2q_2-q_2^2\right).$$

Но тогда, на основании (I5), справедливо неравенство

$$\|x-y\|_2-\|z-y\|_2\geqslant\frac{Q_1+Q_2}{2\sqrt{n}\cdot(Q_1/2q_1-q_1^2+Q_2/2q_2-q_2^2)^{1/2}}. \qquad (I9)$$

Оценим знаменатель правой части неравенства (I9). С этой целью, используя определение величин q_1, q_2, перепишем последние неравенства соотношений (I7), (I8) в виде

$$q_1^2\cdot\sum_{S_1}(y_i-x_i)^2\geqslant e^2(x,S)/|S_1|,$$
$$q_2^2\cdot\sum_{T_1}(y_i-x_i)^2\geqslant e^2(x,S)/|T_1|.$$

Отсюда, учитывая, что $2q_1-q_1^2\geqslant q_1,\ 2q_2-q_2^2\geqslant q_2$, получаем

$$(2q_1-q_1^2)\cdot Q_1\geqslant e^2(x,S)/|S_1|,$$
$$(2q_2-q_2^2)\cdot Q_2\geqslant e_2(x,S)/|T_1|.$$

Поэтому $2q_1-q_1^2\geqslant e^2(x,S)/|S_1|\cdot Q_1,\ 2q_2-q_2^2\geqslant e^2(x,S)/|T_1|\cdot Q_2$, откуда вытекает оценка

$$2\sqrt{n}(Q_1/2q_1-q_1^2+Q_2/2q_2-q_2^2)^{1/2}\le2\sqrt{n}[(|S_1|\cdot Q_1^2+|T_1|\cdot Q_2^2)/e^2(x,S)]^{1/2}\le$$
$$\le2n\cdot(Q_1^2+Q_2^2)^{1/2}/e(x,S)\le2n\cdot(Q_1+Q_2)/e(x,S).$$

Но тогда, ввиду соотношений (I4) и (I9), имеем: $U_\varphi(x)-U_\varphi(z)\geqslant$ $\geqslant2e(x,S)$. Привлекая установленную ранее оценку

---

*) Как обычно, $|S|$ – количество элементов в S .

$$\|x-z\|_2 \leq \sqrt{2}\cdot e(x,S),$$

получаем требуемое:

$$u_v(x)-u_v(z) > \|x-z\|_2,$$

что и завершает доказательство леммы.

Учитывая, что функции u_v непрерывны, и рассматривая в качестве метрики d на X_v евклидово расстояние d_2, на основании доказанной леммы и предложения 3 получаем основное утверждение.

ТЕОРЕМА. Ядра классических кооперативных игр достижимы.

В заключение приведем некоторые комментарии, касающиеся полученного результата. Прежде всего отметим, что выбор в качестве метрики d евклидова расстояния

$$d_2(x,y)=\|x-y\|_2$$

существен не только с технической точки зрения. В частности, при отсутствии строгой выпуклости множеств $\{y\in X_v \mid d(x,y)\leq r\}$ все точки, доминирующие некоторую $x\notin C(v)$, могут быть удалены от ядра на расстояние, большее чем x. Это подтверждается следующим примером. Пусть $N=\{1,2,3,4\}$,

$$v(S)=\begin{cases} 1, & S=\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}, \\ 1/2, & S=\{2,4\},\{3,4\}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{20}$$

Нетрудно проверить, что $C(v)=\{(0,1/2,1/2,0)\}$. Если в качестве метрики d взять расстояние $d_\infty(x,y)=\|x-y\|_\infty = \max\limits_N |x_i-y_i|$, то для дележа $\bar{x}=(1/4,1/4,1/4,1/4)$ любой доминирующий его z имеет вид

$$z_i=\begin{cases} 1/4+\delta_i, & i=1,2,3, \\ 1/4-\delta, & i=4, \end{cases}$$

где $\delta_i>0$ для всех $i=1,2,3$ и $\delta=\sum\limits_{i=1}^{3}\delta_i \leq 1/4$. При этом в рассматриваемой метрике

$$d_\infty(z,C(v))=1/4+\delta_1 > 1/4 = d_\infty(\bar{x},C(v)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Анализируя доказательство теоремы, нетрудно убедиться, что она справедлива и для игр, не удовлетворяющих условию супераддитивности:

$$v(S \cup T) \geq v(S)+v(T)$$

для всех S, T таких, что $S \cap T = \phi$. Поэтому отсутствие супераддитивности в приведенном примере несущественно. Более того, известным приемом (см.[6]) функция, определяемая формулой (20), может быть трансформирована в супераддитивную так, что отвечающая этой последней игра Γ имеет то же ядро и то же множество дележей, доминирующих $\mathfrak{X}$.

Далее, для построения функций U_v явным образом использовалась информация о ядрах $C(v)$. Понятно, что более привлекательными являются функции Ляпунова, определяемые по локальным характеристикам точки x (и при этом достаточно простые в вычислительном плане). Некоторые результаты в этом направлении получены в [4] для так называемых центрированных кооперативных игр Γ_v , характеризующихся свойством

$$\bigcap_{S \in \mathcal{T}_v^+} S \neq \phi,$$

где

$$\mathcal{T}_v^+ = \{S \subseteq N \mid v(S) > 0\}.$$

В общем случае вопрос остается открытым.

Наконец, отметим, что непосредственно из полученной теоремы и из определения предельного оНМ-решения [I] имеем

СЛЕДСТВИЕ. Ядро кооперативной игры с побочными платежами является ее предельным обобщенным решением Неймана -Моргенштерна.

ЛИТЕРАТУРА

I. МАКАРОВ В.Л., ВАСИЛЬЕВ В.А., КОЗЫРЕВ А.Н., МАРАКУЛИН В.М. О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики. - Оптимизация, 1982, вып. 30(47), с. 5-86.

2. MASHLER M., PELEG B. Stable sets and stable points of set-valued dynamics systems with applications to game theory. - SIAM J. Control and Optimisation,1976, v.14, N6, p.985-995.

3. GREEN J.R. Stability of Edgerworth's recontracting process. - Econometrica, 1974, v.42, N1, p.21-34.

4. ВАСИЛЬЕВ В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры/ Учебное пособие. - Новосибирск: изд. НГУ, 1984.
5. ОУЭН Г. Теория игр. - М.: Мир, 1971.
6. ПАРТХАСАРАТХИ Т., РАГХАВАН Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. - М.: Мир, 1974.

Поступила в ред.-изд. отдел
1.02.1985 г.