Теория игр

УДК 518. 9

# ОБ УЧИТЫВАЮЩЕМ ПРЕЦЕДЕНТ АРБИТРАЖНОМ РЕШЕНИИ

Б.З.Бигулаев

Одной из возможных математических моделей принятия решения в многокритериальных оптимизационных задачах является так называемая арбитражная схема (см.[1] и[2]). Как известно, арбитражная схема с конечным множеством участников представляет из себя пару $(u, V)$, где $u$ - некоторая точка, а $V$ - подмножество евклидова пространства, размерность которого равна числу участников в арбитражной схеме. При этом множество $V$ интерпретируют как множество дележей или альтернатив, из которых нейтральная сторона (арбитр) выбирает оптимальный делёж, удовлетворяющий всех участников. Точка $u$ - это "статус кво", т.е. делёж, приписывающий участникам доли, получаемые в случае, если они не достигнут взаимопонимания. Под арбитражным решением обычно понимается отображение, ставящее каждой арбитражной схеме из данного класса в соответствие определенный делёж, который выбирает арбитр. Разумеется, это отображение должно удовлетворять некоторой интуитивно приемлемой системе аксиом, раскрывающей смысл, вкладываемый в понятие оптимальности для данного класса задач. В арбитражной теории известен целый ряд различных принципов оптимальности (см. обзорную статью Рота [3]), из которых весьма любопытным является несимметричное решение Калаи [4]. Его автор, взяв за основу известную аксиоматику Нэша [5], исключил аксиому симметрии, оставив остальные без изменения. Вместо аксиомы симметрии было введено предположение о том, что для некоторой фиксированной арбитражной схемы из данного класса заранее известно, какой делёж является оптимальным. Этот "прецедент" с помощью оставшихся аксиом продолжался на весь класс.

В настоящей работе развивается аналогичный подход к арбитражным схемам с измеримым пространством участников, где число участников не обязательно конечно. Такой подход заслуживает внимания при попытках практического использования арбитражной теории.

## §1. Формулировка основного результата

Пусть $(T,\Sigma,\mu)$ - измеримое пространство с некоторой $\sigma$-алгеброй $\Sigma$ подмножеств произвольного множества $T$ и неотрицательной мерой $\mu$ такой, что $\mu(T)=1$. Тройку $(T,\Sigma,\mu)$ будем далее называть пространством участников и предполагать фиксированной. При этом будут использоваться следующие обозначения:

$L^1$ - наделенное каноническим порядком банахово пространство классов $mod\,\mu$ $\Sigma$-измеримых $\mu$-интегрируемых скалярных функций на $T$ с нормой $\|x\|_1=\int_T|x(t)|d\mu$;

$L^1_+$ - конус классов $mod\,\mu$ почти всюду неотрицательных $\Sigma$-измеримых $\mu$-интегрируемых функций на $T$;

$L^\infty$ - наделенное каноническим порядком банахово пространство классов $mod\,\mu$ $\Sigma$-измеримых $\mu$-существенно ограниченных скалярных функций на $T$ с нормой $\|x\|_\infty=\operatorname{vrai\,sup}_\mu|x(t)|$;

$L^\infty_+$ - конус классов $mod\,\mu$ почти всюду неотрицательных $\Sigma$-измеримых $\mu$-существенно ограниченных скалярных функций на $T$.

Пусть $\mathfrak{S}$ - семейство всех компактных подмножество банахова пространства $L^\infty$. Введем на пространстве $L^1$ $\mathfrak{S}$-топологию относительно двойственности $\langle L^1, L^\infty\rangle$ с канонической билинейной формой $\langle x,y\rangle=\int_T x(t)y(t)d\mu$, т.е. топологию равномерной сходимости на компактных подмножествах банахова пространства $L^\infty$.

Арбитражной схемой с пространством участников $(T,\Sigma,\mu)$ назовем пару $(u,V)$, где $u\in L^1$, $V\subset L^1$, для которой выполнены условия:

1) множество $V$ выпукло и замкнуто в $\mathfrak{S}$-топологии;

2) множество $V$ исчерпывающее, т.е. $V-L^1_+=V$;

3) $\mathfrak{S}$-внутренность множества $V$ содержит точку $u$;

4) для каждого $y\in(V-u)^\circ\setminus\{0\}$ существует вещественное число $\varepsilon>0$ такое, что $y(t)\geq\varepsilon$ почти всюду на $T$.

Через $G(T,\Sigma,\mu)$ обозначим множество всех таких арбитражных схем. Арбитражное решение определим как отображение $f:G(T,\Sigma,\mu)\to L^1$, удовлетворяющее следующей системе аксиом.

АКСИОМА I (оптимальность по Парето). $f(u,V)\in V$ и если $x\in V$ и $x\geq f(u,V)$, то $x=f(u,V)$.

АКСИОМА 2 (инвариантность относительно аффинного преобразования). Если аффинное отображение $A:L^1\to L^1$ имеет вид $Ax=ax+b$ для всех $x\in L^1$, где $a\in L^\infty$, $a(t)\geq\delta>0$ п.в. на $T$ и $b\in L^1$, то $f(Au,AV)=Af(u,V)$.

АКСИОМА 3 (независимость от посторонних альтернатив). Если арбитражные схемы $(u,V)$ и $(u,W)$ из множества $G(T,\Sigma,\mu)$ таковы, что $V\subset W$ и $f(u,W)\in V$, то $f(u,V)=f(u,W)$.

Предлагаемая аксиоматика вполне естественна, но в отличие от системы аксиом Нэша здесь отсутствует аксиома симметрии, вызывающая нарекания со стороны большого числа авторов (см. [3]). Оказывается, что система аксиом I-3 полна в том смысле, что ее достаточно для однозначного продолжения решения с некоторой "прецедентной" арбитражной схемы на всё множество $G(T,\Sigma,\mu)$. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть арбитражная схема $(u_0,V_0)\in G(T,\Sigma,\mu)$ такова, что $u_0=0$ и $V_0=\{x\in L^1:\langle x,1\rangle\leq 1\}$. Тогда для любого $w\in V_0$ такого, что $\langle w,1\rangle=1$ и $w(t)\geq\delta>0$ п.в. на $T$, существует единственное отображение $f_w:G(T,\Sigma,\mu)\to L^1$, обладающее свойством $f_w(u_0,V_0)=w$ и удовлетворяющее аксиомам I-3.

## §2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая

ЛЕММА. Пусть $V\subset L^1$ - выпуклое тело в $\sigma$-топологии, удовлетворяющее условиям:

I) нуль содержится в $\sigma$-внутренности множества $V$.

2) $V - L^1_+ = V$;

3) существует $y' \in V$ такое, что $y'(t) \geq \varepsilon' > 0$ п.в. на $T$.
И пусть $w \in L^1$ удовлетворяет условиям:

$\langle w, 1 \rangle = 1$ и $w(t) \geq \delta > 0$ п.в. на $T$.
Тогда существует единственное $\bar{u} \in V^\circ$ такое, что $\frac{w}{\bar{u}} \in V$.

Доказательство данной леммы опирается на ряд вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $V \subset L^1$ удовлетворяет условию I леммы, то поляра $V^\circ$ компактна в $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$-топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, найдется окрестность нуля $\mathcal{U} \subset V$ такая, что $\mathcal{U} = X^\circ$, где $X$ принадлежит насыщенной оболочке $\bar{\mathfrak{S}}$ семейства $\mathfrak{S}$ всех $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ -компактных подмножеств пространства $L^\infty$. Имеем $\mathcal{U}^\circ = X^{\circ\circ}$. По [4,IV.I.5] биполяра $X^{\circ\circ}$ совпадает с $\sigma(L^\infty, L^1)$ -замкнутой выпуклой оболочкой множества $X \cup \{0\}$. Так как множество $X$ $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ -относительно компактно, то и объединение $X \cup \{0\}$ также $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$-относительно компактно. Отсюда легко вывести, что $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ - замкнутая выпуклая оболочка объединения $X \cup \{0\}$ компактна в топологии $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ и, следовательно, замкнута и компактна в слабой $\sigma(L^\infty, L^1)$ -топологии. Поэтому в обеих топологиях замкнутая выпуклая оболочка множества $X \cup \{0\}$ одна и та же. Отсюда следует сильная компактность биполяры $X^{\circ\circ}$. Имеем $U \ll X$, $U^\circ = X^{\circ\circ}$, $U^\circ \supset V^\circ$ и поляра $V^\circ$ относительно компактна в сильной топологии $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. С другой стороны, поляра $V^\circ$ – слабо замкнутое множество, а на сильно компактном множестве $X^{\circ\circ}$ сильная $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ -топология и слабая $\sigma(L^\infty, L^1)$ -топология совпадают. Значит, поляра $V^\circ$ сильно компактна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $V \subset L^1$ удовлетворяет условиям I и 2 леммы, то $V^\circ \subset L^\infty_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $V^\circ \not\subset L^\infty_+$. Очевидно, найдется $y \in V^\circ$ такое, что мера $\mu(\{t \in T : y(t) < 0\}) > 0$. Следовательно, для некоторого вещественного $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство $\mu(\{t \in T : y(t) < -\varepsilon\}) > 0$. Положим $\Omega = \{t \in T : y(t) < -\varepsilon\}$. Зададим измеримую функцию $z(t)$ соотношением

$$z(t)=\begin{cases}\frac{1}{y(t)}, & \text{если } t\in\Omega,\\ 0, & \text{если } t\in T/\Omega.\end{cases}$$

Очевидно, $z\in L^{\infty}$. Кроме того, $\frac{2}{\mu(\Omega)}\cdot z\in V$, так как $0\in V$ и $V-L^1_+=V$. Из $y\in V^\circ$ следует неравенство $\langle\frac{2}{\mu(\Omega)}\cdot z,y\rangle\leqslant 1$. Но

$$\langle\frac{2}{\mu(\Omega)}\cdot z,y\rangle=\int_T\frac{2z(t)y(t)}{\mu(\Omega)}d\mu=\int_\Omega\frac{2z(t)y(t)}{\mu(\Omega)}d\mu=2$$

– противоречие.

Рассмотрим теперь $V\subset L^1$ и $w\in L^1$, удовлетворяющие всем условиям леммы. Пара $V$ и $w$ далее предполагается фиксированной. Возьмем произвольное вещественное число $\varepsilon>0$. Будем рассматривать в дальнейшем $\varepsilon$ и как число, и как элемент пространств $L^1$ и $L^\infty$, отождествляя его с классом $mod\,\mu$ постоянной функции на $T$. Для каждого $\varepsilon>0$ на пространстве $L^1$ зададим непрерывный в $(L^1,\|\cdot\|_1)$ -топологии сублинейный функционал

$$p_\varepsilon(x)=\sup_{y\in V^\circ+\varepsilon}\langle x,y\rangle=\sup_{y\in V^\circ+\varepsilon}\int_T x(t)y(t)d\mu \quad \text{для любого } x\in L^1. \tag{1}$$

Возьмем некоторое $y\in L^\infty$ такое, что $y(t)\geq\varepsilon>0$ почти всюду на $T$. Рассмотрим измеримую функцию $\frac{w}{y}$, задаваемую соотношением $\frac{w}{y}(t)=\frac{w(t)}{y(t)}$ п.в. на $T$. Очевидно, $\frac{w}{y}\in L^1$.

Для каждого $\varepsilon>0$ зададим отображение $\psi_\varepsilon:V^\circ+\varepsilon\to L^1_+$ посредством формулы

$$\psi_\varepsilon(y)=\frac{w}{y\,p_\varepsilon(\frac{w}{y})} \quad \text{для любого } y\in V^\circ+\varepsilon. \tag{2}$$

Отображение $\psi_\varepsilon$ определено корректно, ибо $\frac{w}{y}\in L^1_+$ и $p_\varepsilon(\frac{w}{y})>0$. Действительно, $V^\circ\subset L^\infty_+$ по предложению 2 и

$$p_\varepsilon(\frac{w}{y})=\sup_{z\in V^\circ+\varepsilon}\int_T\frac{w(t)z(t)}{y(t)}d\mu\geqslant\int_T\frac{w(t)y(t)}{y(t)}d\mu=\int_T w(t)d\mu=1>0.$$

Легко доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть последовательность $\{y_n\}$ такова, что $y_n\in V^\circ+\varepsilon$ при любом $n$ и имеет место сходимость $y_n\to y$, $y\in V^\circ+\varepsilon$ в $(L^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ -топологии. Тогда $\psi_\varepsilon(y_n) \to \psi_\varepsilon(y)$ в $(L^1, \|\cdot\|_1)$ - топологии.

Теперь рассмотрим множество $X_\varepsilon = \{x \in L^1 : \rho_\varepsilon(x) = 1\}$. Очевидно, имеем $X_\varepsilon \neq \emptyset$ и $\psi_\varepsilon(V^\circ + \varepsilon) \subset X_\varepsilon \subset L^1_+$. Для каждого $\varepsilon > 0$ зададим многозначное отображение $\varphi_\varepsilon : X_\varepsilon \to V^\circ + \varepsilon$ посредством

$$\varphi_\varepsilon(x) = \{y \in V^\circ + \varepsilon : \langle x, y\rangle \geq \langle z, y\rangle \quad \text{для всех } z \in L^1 \text{ таких, что } \rho_\varepsilon(z) \leq 1. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, используя предложение I, что для каждого $x \in X_\varepsilon$ множество $\varphi_\varepsilon(x)$ непусто и выпукло.

Зададим многозначное отображение $\gamma_\varepsilon : V^\circ + \varepsilon \to V^\circ + \varepsilon$ формулой

$$\gamma_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon. \tag{4}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При каждом $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $\gamma_\varepsilon : V^\circ + \varepsilon \to V^\circ + \varepsilon$ имеет неподвижную точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\gamma_\varepsilon$ имеет замкнутый график в топологии произведения банаховых пространств $L^\infty \times L^\infty$. Так как эта топология очевидно метризуема, то все рассуждения можно приводить на языке последовательностей. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таковы, что $x_n \in V^\circ + \varepsilon$, $y_n \in \gamma_\varepsilon(x_n)$ при всех $n$ и имеет место сходимость $x_n \to x$, $y_n \to y$, где $x, y \in L^\infty$ в $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ -топологии. Так как из предложения I следует замкнутость множества $V^\circ + \varepsilon$, то $x, y \in V^\circ + \varepsilon$. Остается показать, что $y \in \gamma_\varepsilon(x)$. Из соотношения $y_n \in \gamma_\varepsilon(x_n)$ при любом $n$ в силу (3) и (4) получаем $\langle \psi_\varepsilon(x_n), y_n\rangle \geq \langle z, y_n\rangle$ для любых $z \in L^1$ таких, что $\rho_\varepsilon(z) \leq 1$. Сходимость $y_n \to y$ влечет за собой

$$\langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle. \tag{5}$$

Для каждого $n$ имеем соотношения

$$0 \leq \left|\int_T y_n \psi_\varepsilon(x_n)\, d\mu - \int_T y \psi_\varepsilon(x)\, d\mu\right| =$$

$$= \left|\int_T [\psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x_n)] \cdot [y + y_n]\, d\mu + \int_T \psi_\varepsilon(x_n) y\, d\mu - \int_T \psi_\varepsilon(x) y_n\, d\mu\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_T [\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(x_n)]\cdot[y+y_n]d\mu\right| + \left|\int_T \psi_\varepsilon(x_n)\, y\, d\mu - \int_T \psi_\varepsilon(x) y_n d\mu\right| \leq$$

$$\leq \int_T |\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(x_n)|\cdot|y+y_n|d\mu + \left|\int_T \psi_\varepsilon(x_n) y d\mu - \int_T \psi_\varepsilon(x) y_n d\mu\right|. \quad (6)$$

Множество $V^\circ+\varepsilon$ в силу компактности ограничено по норме $\|\cdot\|_\infty$ и $y_1, y_n \in V^\circ+\varepsilon$, поэтому существует $\delta>0$ такое, что $|y(t)|\leq\delta$ и $|y_n(t)|\leq\delta$ п.в. на $T$. Отсюда получаем неравенство $|y(t)+y_n(t)|\leq|y(t)|+|y_n(t)|\leq 2\delta$ п.в. на $T$ и

$$0\leq\int_T|\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(x_n)|\cdot|y_n+y|d\mu\leq 2\delta\int_T|\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(x_n)|d\mu. \quad (7)$$

Теперь предложение 3 и неравенство (7) дают нам сходимость

$$\int_T|\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(x_n)|\cdot|y+y_n|d\mu \to 0. \quad (8)$$

Кроме того, имеем сходимость

$$\left|\int_T\psi_\varepsilon(x_n)y d\mu - \int_T\psi_\varepsilon(x) y_n d\mu\right| \to 0. \quad (9)$$

Применение (8) и (9) к (6) даст нам сходимость

$$\left|\int_T y_n\psi_\varepsilon(x_n)d\mu - \int_T y\psi_\varepsilon(x)d\mu\right|\to 0 \text{ и } \int_T y_n\psi_\varepsilon(x_n)d\mu \to \int_T y\psi_\varepsilon(x)d\mu,$$

или, что то же самое,

$$\langle\psi_\varepsilon(x_n), y_n\rangle \to \langle\psi_\varepsilon(x), y\rangle. \quad (10)$$

Переходя теперь в неравенстве $\langle\psi_\varepsilon(x_n), y_n\rangle \geqslant \langle z, y_n\rangle$ к пределу, при помощи (5) и (10) окончательно получаем неравенство $\langle\psi_\varepsilon(x), y\rangle\geqslant\langle z, y\rangle$, которое выполняется для всех $z\in L^1$ таких, что $P_\varepsilon(z)\leq 1$. А это и означает, что $y\in\gamma_\varepsilon(x)$. Замкнутость графика многозначного отображения $\gamma_\varepsilon$ показана. Таким образом, для многозначного отображения $\gamma_\varepsilon: V^\circ+\varepsilon\to V^\circ+\varepsilon$ выполнены все условия теоремы Гликсберга [6] и это отображение имеет неподвижную точку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для каждого натурального $n$ существует $\bar{u}_n\in V^\circ+\frac{1}{n}$ такое, что $\frac{w}{\bar{u}_n}\in(V^\circ+\frac{1}{n})^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{y}_n\in V^\circ+\frac{1}{n}$ - неподвижная точка многозначного отображения $\gamma_{1/n}$, существующая по предложению 4. Положим $\bar{u}_n=\bar{y}_n\cdot P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)$, где сублинейный функционал $P_{\frac{1}{n}}$

определен формулой (I). Покажем сначала, что $\bar{u}_n \in V^\circ + \frac{1}{n}$. Так как $\bar{y}_n \in \gamma_{\frac{1}{n}}(\bar{y}_n)$, то из (2)-(4) следует неравенство

$$\left\langle \frac{w}{\bar{y}_n \cdot P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)}, \bar{y}_n \right\rangle \geq \langle z, \bar{y}_n \rangle$$

для всех $z \in L^1$ таких, что $P_{\frac{1}{n}}(z) \leq 1$. Далее, имеем

$$\left\langle \frac{w}{\bar{y}_n \cdot P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)}, \bar{y}_n \right\rangle = \int_T \frac{w \bar{y}_n d\mu}{\bar{y}_n \cdot P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)} = \frac{1}{P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)} \int_T w d\mu = \frac{1}{P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)} \geq \langle z, \bar{y}_n \rangle \leq \frac{1}{P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)},$$

откуда получаем неравенство

$$\langle z, \bar{u}_n \rangle = \left\langle z, \bar{y}_n \cdot P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right) \right\rangle \leq 1, \tag{II}$$

верное для всех $z \in L^1$ таких, что $P_{\frac{1}{n}}(z) \leq 1$. Из (I) очевидно следует соотношение $P_{\frac{1}{n}}(z) \leq 1 \Longleftrightarrow z \in (V^\circ + \frac{1}{n})^\circ$.

Таким образом, неравенство (II) имеет место для всех $z \in (V^\circ + \frac{1}{n})^\circ$, а это означает, что $\bar{u}_n \in (V^\circ + \frac{1}{n})^{\circ\circ}$. Рассмотрим биполяру $(V^\circ + \frac{1}{n})^{\circ\circ}$. Множество $V^\circ + \frac{1}{n}$ – выпуклый $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ –компакт, поэтому выпуклая оболочка $co\{0, V^\circ + \frac{1}{n}\}$ компактна в той же топологии. Отсюда следует ее $\sigma(L^\infty, L^1)$ - замкнутость, что влечет за собой (см.[4, IУ.I.5]) соотношение $(V^\circ + \frac{1}{n})^{\circ\circ} = co\{0, V^\circ + \frac{1}{n}\}$. Так как $V^\circ + \frac{1}{n}$ – выпуклое множество и $\bar{u}_n \in (V^\circ + \frac{1}{n})^{\circ\circ}$, то существует вещественное число $\delta$, $0 \leq \delta \leq 1$, такое, что для некоторого $x \in V^\circ + \frac{1}{n}$ будет $\bar{u}_n = \delta x$. С другой стороны, $\bar{u}_n = \bar{y}_n \cdot P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)$, где $\bar{y}_n \in V^\circ + \frac{1}{n}$ и $P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right) \geq 1$. Значит, $\bar{u}_n \in co\{\bar{y}_n, x\} \subset V^\circ + \frac{1}{n}$, т.е. $\bar{u}_n \in V^\circ + \frac{1}{n}$. Теперь покажем, что $\frac{w}{\bar{u}_n} \in (V^\circ + \frac{1}{n})^\circ$. Для произвольного $y \in V^\circ + \frac{1}{n}$ из (I) следует

$$1 = \frac{1}{P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)} P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right) = \frac{1}{P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)} \sup_{z \in V^\circ + \frac{1}{n}} \left\langle \frac{w}{\bar{y}_n}, z \right\rangle \geq \frac{1}{P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)} \left\langle \frac{w}{\bar{y}_n}, y \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{w}{\bar{y}_n P_{\frac{1}{n}}\left(\frac{w}{\bar{y}_n}\right)}, y \right\rangle = \left\langle \frac{w}{\bar{u}_n}, y \right\rangle.$$

А это означает, что $\frac{w}{\bar{u}_n} \in (V^\circ + \frac{1}{n})^\circ$. Доказательство завершено.

Рассмотрим теперь отображение $k:[0,1]\times V^\circ \to L^\infty$, задаваемое соотношением $k(\varepsilon, y)=y+\varepsilon,\ y\in V^\circ;\ \varepsilon\in[0;1]$. Очевидно, образ $k([0;1]\times V^\circ)$ компактен в $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ - топологии, содержит нуль, выпукл и $\sigma(L^\infty, L^1)$-замкнут. Возьмем любое натуральное $n$. По предложению 5 найдется $\bar{u}_n \in V^\circ+\frac{1}{n}$ такое, что $\frac{w}{\bar{u}_n}\in(V^\circ+\frac{1}{n})^\circ$. Очевидно, $\bar{u}_n\in k([0;1]\times V^\circ)$. Без ограничения общности можно полагать, что последовательность $\{\bar{u}_n\}$ сходится по норме $\|\cdot\|_\infty$. Через $\bar{u}\in k([0;1]\times V^\circ)$ обозначим предел этой последовательности. Несложно проверяется, что $\bar{u}\in V^\circ$ и $\frac{w}{\bar{u}}\in V^{\circ\circ}$. Так как $V$ - выпуклое $\sigma$ - замкнутое множество, содержащее нуль, то (см. [4, IV.3.I]) оно $\sigma(L^1, L^\infty)$-замкнуто, что влечет за собой равенство $V^{\circ\circ}=V$. Итак, для пары $V, w$, удовлетворяющей условию леммы, сформулированной в начале параграфа, найдено $\bar{u}\in V^\circ$ такое, что $\frac{w}{\bar{u}}\in V$. Для того чтобы эта лемма была полностью доказана, осталось проверить единственность $\bar{u}$. Предположим противное. Пусть $v\in V^\circ$ таково, что $\frac{w}{v}\in V$ и $v\neq\bar{u}$. Для всех $x\in V$ имеем $\langle x, v\rangle\le 1$ и $\langle x,\bar{u}\rangle\le 1$. Отсюда $\langle\frac{w}{\bar{u}}, v\rangle\le 1, \langle\frac{w}{v},\bar{u}\rangle\le 1$ и получаем

$$2\ge\left\langle\frac{w}{\bar{u}}, v\right\rangle+\left\langle\frac{w}{v},\bar{u}\right\rangle=\int_T\left(\frac{v}{\bar{u}}+\frac{\bar{u}}{v}\right)w\,d\mu. \qquad (12)$$

Пусть $\Omega=\{t\in T:\ \bar{u}(t)\neq v(t)\}$. Так как $v\neq\bar{u}$, то $\mu(\Omega)>0$. Очевидно,

$$\left(\frac{v(t)}{\bar{u}(t)}-\frac{\bar{u}(t)}{v(t)}\right)^2>0 \quad \text{для любого } t\in\Omega.$$

Но тогда

$$\left(\frac{v(t)}{\bar{u}(t)}+\frac{\bar{u}(t)}{v(t)}\right)^2=\left(\frac{v(t)}{\bar{u}(t)}-\frac{\bar{u}(t)}{v(t)}\right)^2+4>4$$

и, следовательно,

$$\frac{v(t)}{\bar{u}(t)}+\frac{\bar{u}(t)}{v(t)}>2 \quad \text{для любого } t\in\Omega.$$

Отсюда следует

$$\int_\Omega\left(\frac{v}{\bar{u}}+\frac{\bar{u}}{v}\right)w\,d\mu>2\int_\Omega w\,d\mu. \qquad (13)$$

Теперь из (12) и (13) получаем

$$2\geq\int_T\left(\frac{v}{\bar u}+\frac{\bar u}{v}\right)w\,d\mu=\int_{T\setminus\Omega}\left(\frac{v}{\bar u}+\frac{\bar u}{v}\right)w\,d\mu+\int_\Omega\left(\frac{v}{\bar u}+\frac{\bar u}{v}\right)w\,d\mu=$$

$$=2\int_{T\setminus\Omega}w\,d\mu+\int_\Omega\left(\frac{v}{\bar u}+\frac{\bar u}{v}\right)w\,d\mu>2\int_{T\setminus\Omega}w\,d\mu+2\int_\Omega w\,d\mu=2\int_T w\,d\mu=2$$

– противоречие. Итак, $v=\bar u$ и лемма доказана.

## §3. Доказательство теоремы

Возьмем произвольную арбитражную схему $(u,V)\in G(T,\Sigma,\mu)$. Положим $f_w(u,V)=\frac{w}{\bar y}+u$, где $\bar y\in(V-u)^\circ$ таково, что $\frac{w}{\bar y}\in V-u$. Существование и единственность $\bar y$ следует из леммы, сформулированной и доказанной в предыдущем параграфе. Тем самым определено отображение $f_w: G(T,\Sigma,\mu)\to L^1$. Пусть $u_0=0$ и $V_0'=\{x\in L^1:\langle x,1\rangle\leq 1\}$. Проверим сначала выполнение условия $f_w(u_0,V_0)=w$. Имеем $\langle w,1\rangle=1$ и, следовательно, $\frac{w}{1}\in V_0-u_0$. Кроме того, $1\in(V_0-u_0)^\circ$. Таким образом, получаем $f_w(u_0,V_0)=\frac{w}{1}+u_0=w$. Проверим выполнение аксиомы I.

Пусть существует $x\in V$, $x\geq f_w(u,V)$ и $x\neq f(u,V)$. Легко показать, что найдется число $\delta>0$ такое, что $\mu(\{t\in T: x(t)\geq\frac{w(t)}{\bar y(t)}+u(t)+\delta\})>0$. Так как $\bar y\in(V-u)^\circ$, то получаем

$$1\geq\langle x-u,\bar y\rangle=\int_T(x-u)\bar y\,d\mu\geq\int_{T\setminus\Omega}\left(\frac{w}{\bar y}+u-u\right)\bar y\,d\mu+\int_\Omega\left(\frac{w}{\bar y}+u+\delta-u\right)\bar y\,d\mu=$$

$$=\int_{T\setminus\Omega}w\,d\mu+\int_\Omega w\,d\mu+\delta\int_\Omega\bar y\,d\mu=\int_T w\,d\mu+\delta\int_\Omega\bar y\,d\mu=1+\delta\int_\Omega\bar y\,d\mu,$$

где $\Omega=\{t\in T: x(t)\geq\frac{w(t)}{\bar y(t)}+u(t)+\delta\}$. Из условия 4, которому должна удовлетворять пара $(u,V)$, имеем $\bar y(t)\geq\geq\varepsilon>0$ п.в. на $T$. Но тогда $\delta\int_\Omega\bar y\,d\mu\geq\delta\varepsilon\mu(\Omega)>0$ и получаем $1\geq 1+\delta\varepsilon\mu(\Omega)$ – противоречие. Значит, $x=f_w(u,V)$ и аксиома I выполняется. Пусть аффинное отображение $A: L^1\to L^1$ имеет вид $Ax=ax+b$ для всех $x\in L^1$, где $a\in L^\infty$, $a(t)\geq\xi>0$ и $b\in L^1$. Имеем $Af_w(u,V)=A(\frac{w}{\bar y}+u)=$ $=a\frac{w}{\bar y}+au+b$. Рассмотрим пару $(Au,AV)$. Очевидно, $(Au,AV)\in$ $\in G(T,\Sigma,\mu)$. Далее, $AV-Au=a(V-u)$ и $a\cdot\frac{w}{\bar y}\in AV-Au$. Так как $(AV-Au)^\circ=\frac{1}{a}(V-u)^\circ$, то $\frac{1}{a}\bar y\in(AV-Au)^\circ$. Значит, $f_w(Au,AV)=a\frac{w}{\bar y}+Au=a\frac{w}{\bar y}+au+b=Af_w(u,V)$, т.е. аксиома 2 выполняется.

Теперь проверим выполнение аксиомы 3. Пусть арбитражные схемы $(u,V)$ и $(u,W)$ из множества $G(T,\Sigma,\mu)$ таковы, что $V\subset W$ и $f_w(u,W)\in V$. По определению имеем $f_w(u,W)=\frac{w}{\bar y}+u$, где $\bar y\in(W-u)^\circ$, $\bar y(t)\geq\varepsilon>0$ п.в. на $T$ и $\partial\frac{w}{\bar y}\in W-u$. Так как $V\subset W$, то $(W-u)^\circ\subset(V-u)^\circ$ и $\bar y\in\partial(V-u)$. Из $f_w(u,W)\in V$ следует $\frac{w}{\bar y}\in V-u$. Значит, $f_w(u,V)=\frac{w}{\bar y}+u=f_w(u,W)$, т.е. аксиома 3 также выполняется. Осталось показать единственность отображения $f_w: G(T,\Sigma,\mu)\to L^1$. Предположим, что некоторое отображение $g:G(T,\Sigma,\mu)\to L^1$ удовлетворяет аксиомам I–3 и условию $g(u_0,V_0)=w$, где $u_0=0$, $V_0=\{x\in L^1:\langle x,1\rangle\leq 1\}$. Зададим аффинное отображение $A:L^1\to L^1$, положив

$$Ax=\frac{(x-u)\,w}{f_w(u,V)-u}\quad \text{для любого } x\in L^1.$$

Отображение $A$ определено корректно, ибо $f_w(u,V)-u=\frac{w}{\bar y}+u-u=\frac{w}{\bar y}$, а из $\bar y\in(V-u)^\circ\subset L^\infty_+$ (см. §2, предложение 2) и $w(t)\geq\delta>0$ п.в. на $T$ получаем $\frac{w(t)}{\bar y(t)}\geq\frac{w(t)}{\|\bar y\|_\infty}>0$ п.в. на $T$. Пусть $W=\{x\in L^1:\langle Ax,1\rangle\leq 1\}$. Имеем $V\subset W$, ибо для любого $x\in V$ будет

$$1\geq\langle x-u,\bar y\rangle=\int_T(x-u)\bar y\,d\mu=\int_T\frac{(x-u)w\,d\mu}{f_w(u,V)-u}=\int_T Ax\,d\mu=\langle Ax,1\rangle.$$

Легко проверяется что $(u,W)\in G(T,\Sigma,\mu)$. Кроме того, $Au=0$ и $AW=\{x\in L^1:\langle x,1\rangle\leq 1\}$. Следовательно, $g(Au,AW)=w$. Применяя теперь аксиому 2, получаем $g(u,W)=A^{-1}\circ Ag(u,W)=A^{-1}g(Au,AW)=A^{-1}w=f_w(u,V)$. Итак, $g(u,W)=f_w(u,V)$ и $g(u,W)\in V$. Но $V\subset W$, и по аксиоме 3 будем иметь $g(u,V)=g(u,W)=f_w(u,V)$. Таким образом, единственность отображения $f_w: G(T,\Sigma,\mu)\to L^1$ показана и тем самым доказательство теоремы завершено.

## ЛИТЕРАТУРА


I. ВИЛКАС Э.Й. Многоцелевая оптимизация. – Математические методы в социальных науках, вып. 7. Вильнюс, 1976, с.17–67.

2. ВОРОБЬЕВ Н.Н. Современное состояние теории игр. – Усп. мат. наук, 1970, т.25, вып. 2, с.81–140.

3. ROTH A.E. Axiomatic models of bargaining. - Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1979, v.170.
4. KALAI E. Nonsymmetric Nash solutions and replications of the two-person bargaining. - Internat. J. of Game Theory, 1977, v. 6 , issue 1, p.129-133.
5. NASH J.F. The bargaining problem. - Econometrica, 1950, v.28, p.155-162.
6. ГЛИКСБЕРГ И.Л. Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия в смысле Нэша. - В кн.: Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963, с.497-503.

Поступила в ред.-изд. отдел
21.01.1985 г.