Численные методы

УДК 519.8

УСКОРЕННЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ НА ПЛОСКОСТИ

Ф.А.Пайзерова

В настоящей работе излагается модификация метода минимизации выпуклой непрерывно дифференцируемой функции на плоскости, предложенного в [1]. Отличительной чертой этого метода является то, что он позволяет отыскивать минимум без вычисления производных. Предлагаемая модификация позволяет повысить скорость сходимости метода.

Для ряда методов минимизации выпуклых функций в n-мерном пространстве рассматриваемая задача представляет собой вспомогательную задачу, которую необходимо решать на каждом шаге. Поэтому повышение скорости сходимости в методе из [1] существенно влияет на эффективность методов минимизации выпуклых функций многих переменных.

Пусть известно, что минимум выпуклой непрерывно дифференцируемой функции $f(Z)$ на E_2 содержится в выпуклом четырехугольнике $ABCD$. Площадь этого четырехугольника назовем площадью неопределенности. Пусть R - точка пересечения диагоналей четырехугольника. На отрезках AC и BD на расстоянии ε от точки R (по обе стороны) возьмем четыре точки (например, M, N, Q, P) и вычислим функцию $f(Z)$ в этих точках и в точке R (рис. 1). Рассмотрим соотношения

$$f(Q) \geq f(R), \quad f(P) \geqslant f(R), \tag{1}$$

$$f(M) \geq f(R), \quad f(N) \geqslant f(R). \tag{2}$$

Случаи, когда выполнены соотношения (I)-(2) или только соотношение (I), рассмотрены в [I].

Пусть не выполнены оба соотношения. Тогда найдутся две точки (например, M и Q) такие, что $f(M)<f(R), f(Q)<f(R)$. Отсюда в силу выпуклости функции $f(Z)$ заключаем, что $f(Z)>f(R)$ для всех $Z\in DRC$. Через точку R проведем прямую VW , параллельную прямой DC . На отрезке VW по обе стороны от R на расстоянии ε возьмем точки G и H и вычислим $f(Z)$ в этих точках. Если $f(H)\geq f(R)$ и $f(G)\geq f(R)$, то R - точка минимума функции $f(Z)$ на VW (см. [2]), и поскольку $f(M)<f(R)$, то $f(Z)>f(R)$ для всех $Z\in VWCD$. Этот случай также описан в [I]. Ниже будет рассмотрена модификация метода, приведенного в [I]. Возможны следующие случаи.

Пусть $f(H)<f(R)$ (рис. I). Тогда $f(Z)>f(R)$ для всех $Z\in VRCD$. Значит, $f(Z)>f(R)$ для $Z\in VCD$:

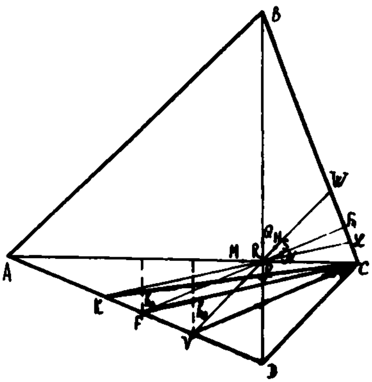

Рис. I

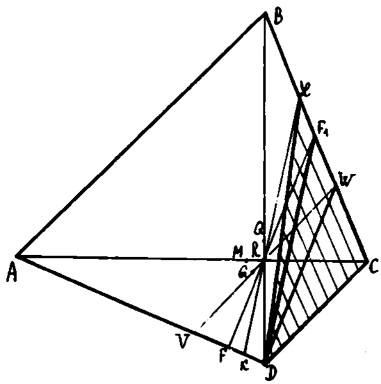

Рис. 2

Через точку R проведем прямую FF_1 , параллельную прямой VC . На отрезке FF_1 на расстоянии ε от точки R возьмем точки T и S и вычислим $f(Z)$ в этих точках. Если $f(T)\geq f(R)$ и $f(S)\geq f(R)$, то R - точка минимума функции $f(Z)$ на FF_1 и $f(Z)>f(R)$ для всех $Z\in FF_1CD$. Пусть $f(S)<f(R)$. В этом случае заключаем, что $f(Z)>f(R)$ для $Z\in FRCD$ и, тем самым, $f(Z)>f(R)$ для $Z\in FCD$. Далее, снова через точку R проведем прямую KL , параллельную FC , и рассуждаем аналогично. В результате получаем новый четырехугольник $ABCK$, в котором содержится точка минимума функции $f(Z)$. Вычислим отношение площадей вновь полученного четырехугольника $ABCK$ и четырехугольника $ABCD$.

Предположим, что $\frac{RD}{BR}=\alpha, \frac{AR}{RC}\geq\alpha, \frac{RC}{AR}=\alpha_1\geq\alpha$. Пусть h - высота треугольника ABC. Тогда $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(1+\alpha)ACh, S_{ACD}=\frac{1}{2}\alpha ACh, RC=\frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1)}AC$. Имеем $S_{VCD}=S_{DRC}=\frac{\alpha\alpha_1}{2(1+\alpha_1)}ACh$. Определим h_2. Так как $S_{AVC}=\frac{1}{2}ACh_2$ и $S_{AVC}=S_{ACD}-S_{VCD}=\frac{\alpha}{2(1+\alpha_1)}ACh$, то $h_2=\frac{\alpha}{(1+\alpha_1)}h$ и $S_{FVC}=S_{VRC}=\frac{\alpha\alpha_1}{2(1+\alpha_1)^2}ACh$. Аналогичным образом получаем $h_3=\frac{\alpha}{(1+\alpha_1)^2}h$ и $S_{FKC}=S_{FRC}=\frac{\alpha\alpha_1}{2(1+\alpha_1)^3}ACh$. Отсюда $S_{KCD}=S_{VCD}+S_{FVC}+S_{FKC}=\frac{\alpha\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_1+3)}{2(1+\alpha_1)^3}ACh$. Следовательно, отношение площадей нового четырехугольника $ABCK$ и четырехугольника $ABCD$ равно

$$1-\frac{\alpha\alpha_1(\alpha_1^3+3\alpha_1+3)}{(1+\alpha)(1+\alpha_1)^3}. \qquad (3)$$

Так как $\frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_1+3)}{(1+\alpha_1)^3}\geqslant\frac{\alpha(\alpha^2+3\alpha+3)}{(1+\alpha)^3}$ при $\alpha_1\geqslant\alpha$, то из (3)

$$1-\frac{\alpha\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_1+3)}{(1+\alpha)(1+\alpha_1)^3}\leq 1-\frac{\alpha^2(\alpha^2+3\alpha+3)}{(1+\alpha)^4}. \qquad (4)$$

Если уменьшать площадь неопределенности, как на рис. 2, то, проводя аналогичные рассуждения, снова имеем (4).

Пусть $f(H)<f(R)$ (рис. 3). Тогда $f(Z)>f(R)$ для

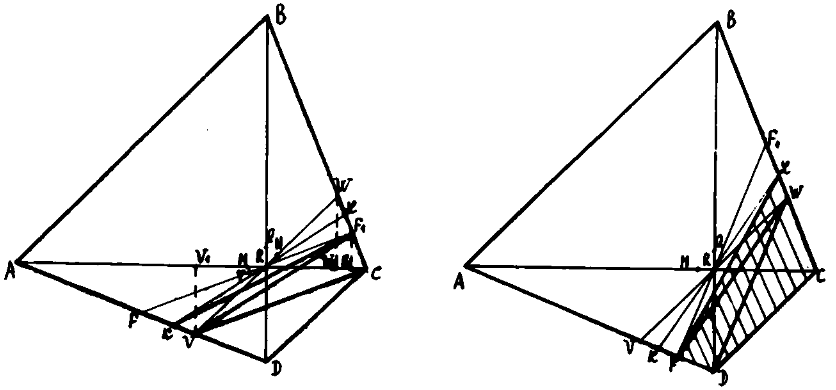

Рис. 3

всех $Z \in VRCD$ и, тем самым, для $Z \in VCD$ имеем $f(Z) > f(R)$. Через точку R проведем прямую FF_1, параллельную прямой VC. На отрезке FF_1 на расстоянии ε от R возьмем точки T и S и вычислим значение функции $f(Z)$ в этих точках. Если $f(T) \geq f(R)$ и $f(S) \geq f(R)$, то R – точка минимума $f(Z)$ на FF_1 и $f(Z) > f(R)$ для всех $Z \in FF_1CD$. Пусть $f(T) < f(R)$. В этом случае $f(Z) > f(R)$ для $Z \in VRF_1CD$ и, значит, для $Z \in VF_1CD$ будет $f(Z) > f(R)$. Снова через R проведем прямую KL, параллельную прямой VF_1, и рассуждаем аналогично. Получаем новый четырехугольник ABF_1K, в котором содержится точка минимума функции $f(Z)$. Найдем отношение площади четырехугольника ABF_1K к площади четырехугольника $ABCD$.

Предположим, что $\frac{RD}{BR} = \alpha$, $\frac{RC}{AR} = \alpha_1 = \alpha$, $\frac{AR}{RC} \geq \alpha$. Треугольники DRC и ABR подобны, так как $\frac{BD}{BR} = \frac{RC}{AR} = \alpha$, $\angle DRC = \angle ARB$. Тогда $\frac{DC}{AB} = \alpha$ и $DC \parallel AB$. Прямая VW параллельна прямой DC и, следовательно, треугольники ABD и VRD подобны, $\frac{BD}{RD} = \frac{AB}{VR}$. Аналогично устанавливаем, что $\frac{BD}{RB} = \frac{DC}{WR}$. Отсюда $VR = WR$. Так как $\angle ARV = \angle CRW$, то $VV_1 = WW_1$. Прямая FF_1 параллельна прямой VC по построению. Из подобия треугольников VWC и RWF_1 имеем $\frac{VW}{WR} = \frac{WC}{WF_1} = 2$. Следовательно, $WF_1 = F_1C$ и $F_1F_2 = \frac{1}{2}WW$.

Получаем $S_{KF_1CD} = S_{VCD} + S_{VF_1C} + S_{KF_1V} = S_{VCD} + S_{VF_1C} + S_{VRF_1} = S_{VCD} + S_{VRC} + S_{RF_1C}$. С учетом проведенных выше вычислений имеем $RC = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}AC$, $VV_1 = h_2 = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}h$, $S_{VCD} = \frac{\alpha\alpha_1}{2(1+\alpha_1)}ACh$, $S_{VRC} = \frac{\alpha\alpha_1}{2(1+\alpha_1)^2}ACh$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(1+\alpha)ACh$. Определим $S_{RF_1C} = \frac{\alpha\alpha_1}{4(1+\alpha_1)^2}ACh$. Тогда $S_{KF_1CD} = \frac{\alpha\alpha_1(2\alpha_1+5)}{4(1+\alpha_1)^2}ACh$. Отношение площадей вновь полученного четырехугольника ABF_1K и четырехугольника $ABCD$ равно

$$1 - \frac{\alpha\alpha_1(2\alpha_1+5)}{2(1+\alpha)(1+\alpha_1)^2} = 1 - \frac{\alpha^2(2\alpha+5)}{2(1+\alpha)^3}, \qquad (5)$$

так как $\alpha_1 = \alpha$.

Если уменьшать площадь неопределенности, как показано на рис. 4, то справедлива оценка (5). Оценка, полученная в (5), хуже, чем оценка (4).

В случае, если $\frac{RC}{AR} = \alpha_1 > \alpha$, имеем всегда оценку лучше (5

Если на некотором шаге оказалось $\frac{RD}{BR}=\alpha\le\alpha_0$, где значение α_0 будет определено, то через точку D проведем прямую, параллельную AC, и продолжаем AB и BC до пересечения с этой прямой (рис.5). Вместо четырехугольника $ABCD$ возьмем треугольник A_1BC_1. Пусть h – высота треугольника ABC. Тогда $S_{ABCD}=\frac{1}{2}A_1C_1h$, $S_{A_1BC_1}=\frac{1}{2}(1+\alpha)A_1C_1h$, $S_{VBF}=\frac{1}{6}(1+\alpha)A_1C_1h$, $S_{VFK}=S_{VR_1F}=\frac{1}{36}(1+\alpha)A_1C_1h$, $S_{VBK}=\frac{7}{36}(1+\alpha)A_1C_1h$. Отношение площадей нового четырехугольника A_1VKC_1 и четырехугольника $ABCD$ равно

$$\frac{11}{18}(1+\alpha). \tag{6}$$

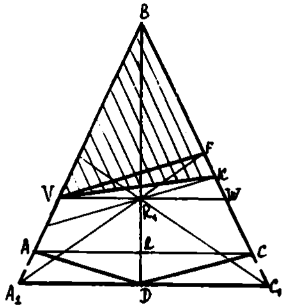

Рис. 5

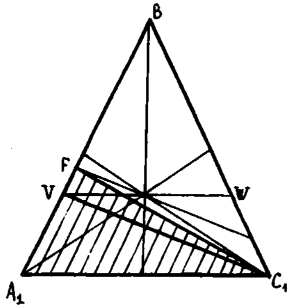

Рис. 6

Если уменьшать треугольник, как показано на рис.6, то отношение площадей нового треугольника FBC_1 и четырехугольника $ABCD$ будет

$$\frac{5}{9}(1+\alpha). \tag{7}$$

Если $\alpha\le\alpha_0=0{,}3787$, то следует переходить к треугольнику. Значение α_0 является решением уравнения

$$1-\frac{\alpha^2(2\alpha+5)}{2(1+\alpha)^3}=\frac{11}{18}(1+\alpha).$$

Метод имеет геометрическую скорость сходимости со знаменателем $q=\frac{11}{18}(1+\alpha_0)=0{,}8425$. В [I] получено значение $q=0{,}9543$. Другая модификация метода сходится со скоростью геометрической прогрессии $q=0{,}89$.

Проведено численное исследование метода. Теоретически необходимое число вычислений значения функции для получения одной и той же точности для изложенной модификации уменьшается примерно в 3 раза, а практическая скорость сходимости выше.

ЛИТЕРАТУРА

I. ДЕМЬЯНОВ В.Ф. Минимизация выпуклой функции на плоскости. - Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1976, т.16, №1, с. 247-251.

2. УАЙЛД Д.Дж. Методы поиска экстремума. - М.: Наука, 1967.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.10.84 г.