УДК 517.51+517.55

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИКИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л.С.Маергойз, Е.И.Яковлев

Данная работа посвящена решению задачи Дирихле для выпуклых функций в неограниченной области в $\mathbb{R}^n$ и ее приложению к изучению асимптотики выпуклых функций n-кратных степенных рядов с неограниченной областью сходимости в $\mathbb{C}^n$.

Обозначения: $\langle u,y\rangle = u_1y_1+\dots+u_ny_n$; $V^*(y) = \sup\{\langle u,y\rangle - V(u): u\in M\}$ – преобразование Юнга функции $V: M \to (-\infty,\infty]$ $(M\in\mathbb{R}^n)$; $\operatorname{dom} V=\{u\in M: V(u)<\infty\}$; $\operatorname{epi} V=\{(u,\lambda)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}: u\in\operatorname{dom}V; \lambda\geq V(u)\}$; $V0^+(x)=\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}V(xt+y)$, $y\in\operatorname{dom}V$ – асимптотическая (рецессивная) функция для выпуклой функции V [1, с.83]; $\bar{M}$ – замыкание M; $A(M)$ – асимптотический конус выпуклого множества M; K_τ – замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, опорной функцией которого является полунепрерывная снизу сублинейная функция $\tau: \mathbb{R}^n \to (-\infty,\infty]$; $\partial\tau(x)=\{y\in K_\tau: \langle y,x\rangle=\tau(x)\}$; $\operatorname{cl}\varphi$ – полунепрерывная снизу оболочка функции φ: $\operatorname{epi}\operatorname{cl}\varphi=\overline{\operatorname{epi}\varphi}$.

1°.ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2, с.42; 1, с.79]. Асимптотическим конусом $A(M)$ множества $M\subset\mathbb{R}^m$ называется множество в $\mathbb{R}^m$, состоящее из пределов всевозможных последовательностей вида $\{\lambda_1x_1,\dots,\lambda_nx_n,\dots\}$, где $x_i\in M$, $\lambda_i\downarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $M\subset\mathbb{R}^n$; $\varphi: M\to(-\infty,\infty)$; $\varphi\not\equiv\infty$. Асимптотической функцией функции φ

назовем функцию $\psi 0^+ : R^n \to (-\infty, \infty]$ такую, что $epi\, \psi 0^+ = A(epi\, \psi)$ [1, с.82].

Отметим ряд свойств функции $\psi 0^+$:

1) $\psi 0^+(x) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+; \lambda a \to x} \lambda \psi(a), a \in dom\, \psi; \forall x \in A(dom\, \psi)$. (1)

2) Пусть K - неограниченное замкнутое выпуклое множество в R^n ; $K \neq R^n$; $dim\, K = n$; ψ - след на $\Gamma := \partial K$ выпуклой полунепрерывной снизу функции $V: K \to (-\infty, \infty]$, конечной внутри K ; $\Gamma_x = \{y \in dom\, \psi : xt + y \in dom\, \psi \;\; \forall t \geq 0\}$, $T(\psi) = \{x \in R^n \setminus \{0\} : \Gamma x \neq \emptyset\}$. Тогда

$$\psi 0^+(x) = \lim_{t \to \infty} t^{-1} \cdot \psi(xt + y) \quad \forall y \in \Gamma x, \forall x \in T(\psi). \quad (2)$$

В частности, если граница Γ такова, что содержит два параллельных друг другу аффинных многообразия Π_1 , Π_2 , $dim\, \Pi_1 = dim\, \Pi_2$, то множества $epi(V/\Pi_i)$, $i = 1, 2$,имеют одинаковые асимптотические конусы.

Рассмотрим задачу выпуклого продолжения с границы выпуклого множества в его внутренность , причем надграфики функций этого продолжения имеют заданный асимптотический конус.

Пусть K - неограниченное замкнутое выпуклое множество в R^n; $K \neq R^n$; $h : R^n \to (-\infty, \infty)$ - полунепрерывная снизу сублинейная функция, причем $dom\, h \subset A(K)$; $\mathcal{J}_h(K) = \{V\}$ - класс выпуклых полунепрерывных снизу функций со свойством: $V0^+ = h$; $int\, K \subset dom\, V$; $\Gamma := \partial K = \partial(dom\, V)$; $\mathcal{J}_h(\Gamma) = \{\psi : \Gamma \to (-\infty, \infty]\}$ - класс полунепрерывных снизу выпуклых на выпуклых участках границы Γ функций со свойствами (см. определение 2 и формулу (2)):

а) $\psi 0^+ \geq h$; $\psi 0^+(x) = h(x) \quad \forall x \in T(\psi)$; (3)

б) для каждой функции ψ из $\mathcal{J}_h(\Gamma)$ найдется вектор $(a, b) \in R^n \times R$ такой, что

$$\psi(y) \geq \langle a, y \rangle + b \quad \forall y \in \Gamma, \quad (4)$$

причем $a \in ri\, K_h$ ($ri\, K_h$ - относительная внутренность K_h).

Покажем, что $\mathcal{J}_h(\Gamma) \supset \{V|_\Gamma , V \in \mathcal{J}_h(K)\}$. Поскольку $dom\, h \neq R^n$, то $dim\, K_h > 0$. Имеем $K_h = \overline{dom\, V^*} \; \forall V \in \mathcal{J}_h(K)$ [1, с. 133]. Тогда $ri\, K_h \subset dom\, V^*$; $V_y \geq \langle a, y \rangle - V^*(a) \;\; \forall y \in K$, $a \in ri\, K_h$ $(V = V^{**})$. Учитывая формулы (2) и $\lim\limits_{\lambda \to 0+; \lambda z \to x} \lambda V(z) = V0^+(x), z \in dom\, V$ (см. (1)), заключаем о справедливости условий (3),(4) для $\varphi = V/_{\Gamma}$, $V \in \mathcal{J}_h(K)$.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. Для любой функции φ из $\mathcal{J}_h(\Gamma)$ найти функцию V из $\mathcal{J}_h(K)$ такую, что $V/_{\Gamma} = \varphi$.

Для случая, когда K - компакт и, следовательно, $A(K)=\{0\}$, $h(x)\equiv\infty, x\in R^n\setminus\{0\}$, задача решена в [3].

ТЕОРЕМА 3. Задача Дирихле разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть $L=\{x\in R^n: -h(x)=h(-x)\}$. Известно, что L - линейное многообразие. Предположим $\dim L>0$. Тогда $K=L+K_1$, где K_1 - замкнутое выпуклое множество в ортогональном дополнении $L^{\perp}$ к L, причем $\dim K_1 = n-\dim L$. Так как φ - выпуклая полунепрерывная снизу функция на $L+v\subset\partial K$ $\forall v\in\partial K_1$, то [I, с.87] функции $\varphi_1(v):=\varphi(v+u)-h(u)$; $h_1(v):=h(v+u)-h(u)$ не зависят от u и определены соответственно на ∂K_1 и $L^{\perp}$. Но $L\subset \operatorname{dom} h\subset A(K)$; h - линейная функция на L, поэтому $\varphi_1\in\mathcal{J}_{h_1}(\partial K_1)$; $h_1(-x)=-h_1(x)$ в $L^{\perp}$ лишь при $x=0$. Если V_1 - решение задачи Дирихле в K_1 такое, что $V_1/\partial K_1=\varphi_1$, то $V(v+u):=h(u)+V_1(v)$, $v\in K_1$; $u\in L$ - искомое решение задачи Дирихле в $K=L+K_1$. Итак, не ограничивает общность рассуждений предположение: $\dim L=0$ и, следовательно, $\dim K_h=n$. Поскольку решения задачи Дирихле для функций φ из $\mathcal{J}_h(\Gamma)$; $\varphi(y)-\langle a,y\rangle$ (см. (4)) из $\mathcal{J}_H(\Gamma)$, где $a\in \operatorname{int} K_h$; $H(x):=h(x):=h(x)-\langle a,x\rangle$, существуют одновременно, то можно считать, что

$$h(x)>0 \quad \forall x\in R^n\setminus\{0\};\ \varphi(y)\geq b \quad \forall y\in\Gamma. \tag{5}$$

2. Пусть $y_0\in \operatorname{int} K$; P_k - функционал Минковского множества $K-y_0$; f - фиксированная выпуклая полунепрерывная снизу функция в K такая, что $f0^+=h$;

$$\beta(y):=\max\{[1-P_k(y-y_0)]^{-1}; f(y)\};$$
$$g(y):=\beta(y),\ y\in \operatorname{int}K;\ g(y):=\varphi(y),\ y\in\Gamma. \tag{6}$$

Поскольку β - выпуклая полунепрерывная снизу функция в K, то из (5) вытекает, что $d:=\inf\{\beta(y): y\in K\}>-\infty$. Следуя схеме Л.Хермандера [3; 4, с.I2], рассмотрим преобразование

$$x_i=y_i(y_{n+1}-c)^{-1},\ i=1,\dots,n;\ x_{n+1}=(y_{n+1}-c)^{-1}, \tag{7}$$

где $c<\min\{d,b\}$ (см. (5)). Оно задает гомеоморфное отображение B полупространства в $R^{n+1}\{y_{n+1}>c\}$ на полупространство $M=\{(x,x_{n+1})\in R^n\times R: x_{n+1}>0\}$, сохраняющее выпуклые множества. Пусть $S=epi\, g$; T_k - замкнутый проективный конус выпуклого множества K. Тогда [1,с.79] $T_k\cap\{z_{n+1}=0\}=\{(z,0)\in R^n\times R: z\in A(K)\}$. Множество $B(S)$ замкнуто в относительной топологии множества M, поскольку S замкнуто в R^{n+1}. Множество $F:=\overline{B(S)}$ в R^{n+1} имеет вид:

$$F=\{x\in T_k:\ \psi(x)\le 1\}, \tag{8}$$

где

$$\psi(x)=\begin{cases} x_{n+1}\left[g\left(\frac{x_1}{x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)-c\right], x\in T_k;\ x_{n+1}>0,\\ h(x_1,\dots,x_n),\ (x_1,\dots,x_n)\in A(K);\ x_{n+1}=0\end{cases}$$

(см. (6),(7)). Функция ψ является функционалом Минковского множества F. Поскольку $\psi(x)>0\ \ \forall x\in T_k\setminus\{0\}$ и функция ψ - полунепрерывная снизу (g - полунепрерывная снизу функция и

$$\lim_{x\to(z,0)}\psi(x)=h(z),$$

см. (6),(3)), то из (8) заключаем: F - компакт.

3. Пусть $co F$ - выпуклая оболочка множества F. Покажем:

$$co F=\{x\in T_k:\ co\,\psi(x)\le 1\}, \tag{9}$$

где $co\,\psi$ - выпуклая оболочка ψ, т.е. справедливо соотношение

$$co\,(epi\,\psi)=epi\,(co\,\psi). \tag{10}$$

Пусть $x\in co F$. Тогда существует выпуклая комбинация $x=\lambda_1 x^{(1)}+\dots+\lambda_m x^{(m)}$ точек $\{x^{(i)}\}_1^m$ из F. Из (10),(8) находим: $co\,\psi(x)\le\lambda_1\psi(x^{(1)})+\dots+\lambda_m\psi(x^{(m)})\le 1$. Наоборот, пусть для некоторой точки x из T_k имеем: $\gamma:=co\,\psi(x)\le 1$. Тогда из (10) заключаем:

$$(x,\gamma)=\sum_{i=1}^m\lambda_i(x^{(i)},\mu_i),\ \sum_{i=1}^m\lambda_i=1;\ \lambda_i>0, \tag{10'}$$

где $\mu_i\geqslant\psi(x^{(i)})\ge 0;\ i=1,\dots,m$. Легко проверяется, что общности рассуждений не нарушает предположение: $\mu_i>0;\ i=1,\dots,m$; $\gamma>0$. Обозначим $\tilde{x}^{(i)}=\gamma x^{(i)}\mu_i^{(i)}$; $\alpha_i=\lambda_i\mu_i\gamma^{-1}$.

Из (10') получаем:

$$(x,\gamma)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\tilde{x}^{(i)},\gamma),\ x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^{(i)};\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1.$$

Но $\psi(\tilde{x}^{(i)})=\gamma\mu_i^{-1}\psi(x^{(i)})\le\gamma\le 1,\ i=1,\dots,m$, т.е. $x\in co F$. Итак, формула (9) справедлива. Следовательно, $co F$ - компакт, и выпуклая полунепрерывная снизу функция $\Phi(x):=co\,\psi(x),\ x\in T_k$ - его функционал Минковского.

4. Функция $V(y)=\Phi(y_1,\dots,y_n,1)+C$ (см. (7)) - искомая. Прежде всего, V - выпуклая полунепрерывная снизу функция в K, конечная в $int K$, поскольку $c\le V(y)\le g(y)\ \forall y\in int\,K$. Пусть $\Delta=[x^{(1)},x^{(2)}]$ - произвольный отрезок на границе ∂T_k конуса T_k. Если $x_{n+1}\ne 0\ \forall x\in\Delta$, то

$$\psi(x)=x_{n+1}\cdot\left[g\left(\frac{x_1}{x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)-c\right].$$

Непосредственно проверяем, что ψ - выпуклая функция на Δ, используя выпуклость функции g на отрезке $\{(\frac{x_1}{x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{x_{n+1}}),x\in\Delta\}$. Если у точек $x^{(i)},\ i=1,2,n+1$ -координаты таковы, что $x^{(i)}_{n+1}=0,\ i=1,2$, то

$$\lim_{t\to 0}\psi[x^{(1)}+(x^{(2)}-x^{(1)})t]=h(x^{(1)})$$

(см. (3)) и, следовательно, ψ - выпуклая функция на Δ. Наконец, если $x_{n+1}=0\ \forall x\in\Delta$, то $\psi(x)=h(x),\ x\in\Delta$. Итак, ψ - выпуклая функция на любом выпуклом подмножестве в ∂T_k. Поэтому $co\,\psi(x)=\psi(x)\ \forall x\in\partial T_k$ и $V/_{\Gamma}=\varphi$. При этом так как справедливо (I), то $VO^+(x)=\lim_{x'\to x} co\,\psi(x')=co\,\psi(x)=h(x)$, $x_{n+1}=0$. Теорема доказана.

2°. Решение задачи Дирихле позволяет описать так называемые "асимптотические цилиндры" надграфика выпуклой функции, обладающего заданным асимптотическим конусом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть M - замкнутое выпуклое множество в R^n; $G:M\to(-\infty,\infty)$ - выпуклая полунепрерывная снизу функция такая, что $dom\,G\supset int\,M$; $r=GO^+$; $N_r:=\{u\in(dom\,r)\setminus\{0\}\}\ne\emptyset,\ x\in N_r$. Асимптотическим x-цилиндром $\mathcal{J}_x(G)$ надграфика $epi\,G$ назовем замыкание множества

$$\{(u,z)\in R^n\times R:(xt+u,tr(x)+z)\in epi\,G\ \ \forall t>t_0(u;z)\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $M=R^n$ это понятие в эквивалентной форме введено в [5].

Асимптотические цилиндры надграфика функции G определяет система функций: $\mathcal{L}(G)=\{\delta_G^x,\ x\in N_r\},\ epi\,\delta_G^x=\mathcal{J}_x(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I (ср.[5 , с.7I]). В обозначениях определения 3 имеем: $\delta_G^x = cl\,\gamma_G^x$, где

$$\gamma_G^x(u) = \lim_{t\to\infty}[G(xt+u) - tr(x)],\ u \in B_x(\operatorname{dom} G) \tag{II}$$

- выпуклая функция, $B_x(\operatorname{dom} G) = \{u \in R^n : xt + u \in \operatorname{dom} G\ \forall t \geq t_0(u)$, причем справедлива формула для $x \in N_r$:

$$\delta_G^x(u) = \begin{cases} \sup\{[\langle u, y\rangle - G^*(y)] : y \in \partial r(x)\}, u \in \overline{B_x(M)}, \partial r(x) \neq \emptyset, \\ -\infty;\ u \in \overline{B_x(M)};\ \partial r(x) = \emptyset. \end{cases} \tag{I2}$$

Формула $\delta_G^x = cl\,\gamma_G^x$ вытекает из определения 3. Вывод формулы (I2) может быть сделан по схеме, изложенной в [5 ,с.7I].

Итак, $\mathcal{J}_x(G) \neq 0\ \forall x \in N_r$ и либо поверхность $\mathcal{J}_x(G)$ - замкнутая огибающая невертикальных одномерных асимптот функции G в направлении x, либо такие асимптоты у функции G отсутствуют внутри M (ср. [5]). Если у двух цилиндров $\mathcal{J}_{x_i}(G)$, $i=1,2$, имеется параллельные друг другу граничные опорные гиперплоскости Π_i, $i=1,2$, то $\Pi_1 = \Pi_2$. Пример функции $V(u_1, u_2) = 0$, при $u_1 \geq u_2^{-2}$; $u_2 > 0$; $V(u_1, u_2) = -[4^{-1}(u_1 u_2)^2 + u_1 u_2^2 - u_1 u_2]^{\frac{1}{2}} + 1 - 2^{-1} \cdot u_1 u_2$ при $u_2 \geq \frac{1}{2}$; $\max\{0, 4(u_1^{-1} - 1)\} \leq u_1 \leq u_2^{-2}$ показывает, что при $x = (0, 1)$ имеем: $\delta_G^x \neq \gamma_G^x$ (см. (II)).

Формула (I2) показывает, что асимптотические цилиндры надграфика функции G определяются граничными значениями ее преобразования Юнга G^*. И наоборот, определенные условия на асимптотическое поведение функции G^* приводят к неограниченному возрастанию функции G при подходе к границе ее области существования.

Пусть Ω -замкнутая выпуклая неограниченная область в R^n ; $\Omega \neq R^n$; $Q_1(\rho) = \{W : \Omega \to (-\infty, \infty)\}$ - класс выпуклых полунепрерывных снизу функций, конечных внутри Ω, у каждой из которых асимптотическая функция $W0^+$ совпадает с заданной сублинейной полунепрерывной снизу функцией $\rho : R^n \to (-\infty, \infty]$ со свойствами: $N_\rho := (\operatorname{dom} \rho) \setminus \{0\} \neq \emptyset$; $\operatorname{dom} \rho \subset A(\Omega)$; $\dim K_\rho = n$; $Q_2(\rho) = \{W \in Q_1(\rho) : \operatorname{dom} W = \operatorname{int} \Omega\}$; h - опорная функция для Ω; $K = K_\rho$; $\tilde{\mathcal{J}}_h(K) = \{V \in \mathcal{J}_h(K) : \delta_V^x(u) \equiv -\infty\ \forall u \in B_x(K), x \in N_h\}$ (в обозначениях теоремы I и предложения I) - класс функций, у которого отсутствуют "собственные" асимптотические цилиндры. Поскольку $W^*0^+ = h\ \forall W \in Q_1(\rho)$ [I,с.I33], то из (I2)

получаем:
$$\mathcal{J}_h(K)=\{W^*: W\in Q_1(\rho)\};\ \tilde{\mathcal{J}}_h(K)=\{W^*: W\in Q_2(\rho)\}. \quad (13)$$
Итак, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для того чтобы функция W из $Q_1(\rho)$ принадлежала классу $Q_2(\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы $W^*\in\tilde{\mathcal{J}}_h(K)$.

Для исследования асимптотики функций класса $Q_2(\rho)$ нам понадобится дополнение к теореме I.

ТЕОРЕМА 2. Задача Дирихле разрешима в классе $\tilde{\mathcal{J}}_h(K)$ для любой функции $\varphi\in\mathcal{J}_h(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно в построенной выше конструкции решения задачи Дирихле взять $f=\alpha^*$, где $\alpha(u)=[1-p_\Omega(u-u_0)]^{-1}+f_0(u), u\in\Omega; u_0\in\operatorname{int}\Omega; p_\Omega$ – функционал Минковского $\Omega-u_0$; f_0 – фиксированная функция из $Q_1(\rho)$. Прежде всего $f\in\mathcal{J}_h(K)$ (см. (I3)). Далее, так как $f^*(u)=\alpha^{**}(u)=\alpha(u)=\infty$ $\forall u\in\partial\Omega$, то из предложения I (см. (I2)) находим: $\delta_k^x(y)=\delta_\beta^x(y)\equiv-\infty; y\in B_x(K)$ $\forall x\in N_h$ (учитывая, что $h(x)>0$ $\forall x\in R^n\setminus\{0\}$). Поскольку $V(y):=c+co\,\psi(y_1,\dots,y_n,1)\le\beta(y)$, то из предложения I выводим: $V\in\tilde{\mathcal{J}}_h(K)$.

СЛЕДСТВИЕ. $\{\mathcal{L}(W), W\in Q_2(\rho)\}=\{\mathcal{L}(W), W\in Q_1(\rho)\}=\{E(\varphi;\rho),$ $\varphi\in\mathcal{J}_h(\Gamma)$, где $E(\varphi;\rho)=\{\varkappa_x, x\in N_\rho\}$;
$$\varkappa_x(u)=\begin{cases}\sup\{[\langle u,y\rangle-\varphi(y)], y\in\partial\rho(x)\}, u\in B_x(\Omega); \partial\rho(x)\ne\emptyset,\\ -\infty, u\in B_x(\Omega); \partial\rho(x)=\emptyset.\end{cases}$$

3°. Пусть D^+ – неограниченная замкнутая логарифмически выпуклая полная область в $\mathbb{R}^n_+=\{r\in R^n: r_i\ge0\}$; $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(D_+)=\{\Phi: D_+\to(-\infty,\infty]\}$ – класс функций, конечных и непрерывных внутри D_+, полунепрерывных снизу в D, возрастающих по каждой из переменных, выпуклых от $\ln r_1,\dots,\ln r_n$. Как и в случае $D_+=\mathbb{R}^n_+$ [6, гл.3; 7] класс $\mathcal{O}\!\mathcal{L}(D_+)$ играет важную роль в исследовании асимптотики функций класса $H(D)$ n-кратных степенных рядов с областью сходимости D, замыкание образа которой в абсолютном октанте $\mathbb{R}^n_+$ совпадает с D_+.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $f\in H(D)$, то $\ln^+ M_f(r)\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}(D_+)$, где $M_f(r)=\sup\{|f(z)|, |z_j|<r_j, j=1,\dots,n;$ $r\in D_+\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяем: функция $M_f(r)$ - полунепрерывная снизу (D_+ - полная область). Если $r_0 \in \partial D_+$, то функция $M_f(r)$ - полунепрерывная сверху в $\Pi(r_0) :=$ $:= \{r \in R_+^n : r_j \le r_j^{(0)}, j=1,\dots,n\}; r_0 = (r_1^{(0)},\dots,r_n^{(0)})$, поскольку она возрастает по каждой переменной. Выпуклость функции $\ln^+ M_f(r)$ внутри D доказывается так же, как это делается при доказательстве теоремы Валирона [7,с.98]. Используя гомотетию и непрерывность $M_f(r)$ в $\Pi(r_0)$, убеждаемся теперь в выпуклости $\ln^+ M_f(r)$ в D.

Для любой функции Φ класса $\mathfrak{A}(D_+)$ по аналогии со случаем $D=R_+^n$ введем характеристики роста - порядок-функцию

$$\rho_\Phi(x) = \overline{\lim_{t\to\infty}} (\ln t)^{-1} \ln^+ \Phi(t^{x_1},\dots,t^{x_n}),\ x \in A(\Omega),$$

где $A(\Omega)$ - асимптотический конус выпуклого множества $\Omega =$ $= \{(\ln r_1,\dots,\ln r_n), r \in D_+; \prod_{i=1}^n r_i \ne 0\}$, и, если множество

$$D(\rho_\Phi) := \{u \in A(\Omega) : 0 < \rho_\Phi(u) < \infty\} \ne \emptyset,$$

- систему тип-функций $A_\Phi = \{\sigma_\Phi(\cdot\,; x) := cl\,\gamma_\Phi(\cdot\,; x), x \in D(\rho_\Phi)\}$, где $\gamma_\Phi(r;x) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho_\Phi(x)} \Phi(r_1 t^{x_1},\dots,r_n t^{x_n}), r \in D_+; \prod_{i=1}^n r_i \ne 0.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f \in H(D)$, то $g(z) = f(e^{-iz_1},\dots,e^{-iz_n})$ - функция, голоморфная в трубчатой области $R^n + i\Omega$. В [8] изучалась асимптотика функции $m_g(y) := \sup\{|g(x+iy)|, x \in R^n\} = M_f(e^{y_1},\dots,e^{y_n})$ с помощью индикатрисы роста "порядка" $\rho > 0$: $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho} \ln m_g(ty) = \overline{\lim}(\ln \tau)^{-\rho} \ln M_f(\tau^{y_1},\dots,\tau^{y_n})$.

Пусть $\mathcal{G}(D_+)$ - подкласс класса $\mathfrak{A}(D_+)$, состоящий из неотрицательных логарифмически-выпуклых от $\ln r_1,\dots,\ln r_n$ функций; $\rho : R^n \to (-\infty,\infty]$ - произвольная неотрицательная полунепрерывная снизу сублинейная неубывающая по каждой из переменных функция со свойствами: $dom\,\rho \subset A(\Omega); D(\rho) \ne \emptyset;$ $\dim K_\rho = n;$ $\mathcal{G}_i(D_+;\rho) = \{cl\exp\{V(\ln r_1,\dots,\ln r_n)\}, r \in D_+;$ $\prod_{i=1}^n r_i \ne 0;\ V \in Q_i(\rho)\}, i=1,2;\ \tilde{\mathcal{J}}_h(\Gamma) = \{\varphi \in \mathcal{J}_h(\Gamma) : \varphi(y) = \infty,$ $y \in \Gamma \setminus [\cup\, \partial\rho(x) \mid x \in D(\rho)]\};\ \Gamma = \partial K_\rho;$

h - опорная функция множества $\Omega = K_h$; $E^+(\varphi;\rho) = \{x_x^+,$ $x \in D_\rho\}$, где $x_x^+(r) = \sup\{r_1^{y_1}\cdots r_n^{y_n} e^{-\varphi(y)}, y \in \partial\rho(x)\}, r \in D_+;$ $\partial\rho(x) \ne \emptyset;\ x_x^+(r) \equiv 0;\ r \in D_+;\ \partial\rho(x) = \emptyset$. Имеем: $\mathcal{G}(D_+;\rho) \subset \mathcal{G}_1(D_+;\rho) \subset \mathcal{G}(D_+)$. Из следствия I вытекает такой факт о стыковке тип-функций класса $\mathcal{G}(D_+;\rho)$.

$i=1,2$, справедливость которого при $D_+ = R^n_+$ доказана, например, в [7], теорема I.5.5.

ТЕОРЕМА 3. $\{A_\varphi, \varphi \in \mathcal{O}_i(D_+;\rho)\} = \{E^+(\psi;\rho), \psi \in \tilde{\mathcal{J}}_h(\Gamma)\}$, $i=1,2$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Теоремы I,3 первоначально были доказаны Е.И. Яковлевым для случая строго выпуклой области. В публикуемом виде результаты статьи принадлежат Л.С.Маергойзу.

ЛИТЕРАТУРА

I. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.

2. FENCHEL W. Convex cones, sets and functions.- Mimiographed lecture notes. Princeton: Univ. Press, 1953.

3. МАЕРГОЙЗ Л.С. Одна краевая задача для выпуклых функций и ее приложение к исследованию асимптотики функций. - ДАН СССР, т.198, №4, с.762-765.

4. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976.

5. МАЕРГОЙЗ Л.С. Об асимптотике выпуклых функций многих переменных. - Оптимизация, вып. I(18), 1971, с.67-81.

6. РОНКИН Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. - М.: Наука, 1971.

7. МАЕРГОЙЗ Л.С. Элементы теории роста выпуклых и целых функций многих переменных. - Красноярск: изд. Красноярск. гос. ун-та, 1976.

8. ВЛАДИМИРОВ В.С. Выпуклые однородные функции-индикатрисы роста голоморфных функций.- Матем. заметки, т.2, №2, 1967, с.167-174.

9. ШОПФ Г.О. О зависимости гиперповерхностей сопряженных типов от сопряженных порядков для некоторого класса целых функций многих переменных. - Изв. вузов. Математика, 1976, №4, с.105-121.

Поступила в ред.-изд. отдел
20.06.1984 г.