УДК 517.518.84+519.852.2+519.651

КОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

И.А.Быкадоров

В статье на основе геометрической схемы двойственности исследуются конечные системы дробно-линейных неравенств. Полученные характеристики чебышевских решений совместных систем и чебышевских приближений несовместных систем позволяют предложить эффективные итерационные методы решения соответствующих экстремальных задач, основанные на использовании алгоритмов линейного программирования.

§1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дробно-линейных неравенств

$$\frac{\sum_{j\in J_1} \varphi_{ij} x_j}{1+\sum_{j\in J_2}\psi_{ij} y_j} + f_i \le \nu,\ i\in I_+; \tag{1}$$

$$\frac{-\sum_{j\in J_1} \varphi_{ij} x_j}{1+\sum_{j\in J_2}\psi_{ij} y_j} - f_i \le \nu,\ i\in I_-; \tag{2}$$

$$1+\sum_{j\in J_2}\psi_{ij} y_j \ge \varepsilon,\ i\in I, \tag{3}$$

где $\varphi_{ij}\ (i\in I, j\in J_1)$, $\psi_{ij}\ (i\in I,\ j\in J_2)$ – заданные числа; $I=\{1,\dots,m\}$, $J_1=\{1,\dots,n_1\}$, $J_2=\{1,\dots,n_2\}$ – множества индексов; $I_+\cup I_- = I$, $\operatorname{card} I_+=m_1$, $\operatorname{card} I_-=m_2$, $0<\varepsilon\ll 1$.

ЗАДАЧА А. Для заданного вектора $f=(f_1,\dots,f_m)$ определить величину $\nu(f)$, равную минимальному значению параметра ν, при котором система (1)-(3) совместна, и, если $\nu(f)\in R$, охарактеризовать множество решений этой системы при $\nu = \nu(f)$.

Заметим, что система (I)-(2) равносильна следующей системе неравенств:

$$\sum_{j\in J_1} \varphi_{ij} x_j + (f_i - \nu)(1 + \sum_{j\in J_2} \psi_{ij} y_j) \le 0, \ i \in I_+;$$

$$-\sum_{j\in J_1} \varphi_{ij} x_j + (-f_i - \nu)(1 + \sum_{j\in J_2} \psi_{ij} y_j) \le 0, \ i \in I_-,$$

левые части которых при фиксированном значении параметра ν являются аффинными функциями. Поэтому (как это предлагается в [I] для случая двустороннего дробно-линейного приближения) рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

ЗАДАЧА В. Для заданного вектора f при фиксированном ν определить величину $z(f,\nu)$, равную минимальному значению параметра z, при котором совместна следующая система линейных неравенств:

$$\sum_{j\in J_1} \varphi_{ij} x_j + \sum_{j\in J_2} (f_i - \nu)\psi_{ij} y_j + (f_i - \nu) \le z, \ i \in I_+; \tag{4}$$

$$\sum_{j\in J_1} (-\varphi_{ij}) x_j + \sum_{j\in J_2} (-f_i - \nu)\psi_{ij} y_j + (-f_i - \nu) \le z, \ i \in I_-; \tag{5}$$

$$\sum_{j\in J_2} (-\psi_{ij}) y_j + (\varepsilon - 1) \le 0, \ i \in I. \tag{6}$$

При этом в случае, когда $z(f,\nu) \in R$, охарактеризовать множество решений этой системы при $z = z(f,\nu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Система (6) разрешима относительно вектора $(y_1, \dots, y_{n_2})$. Ей удовлетворяет, например, нулевой вектор.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Система (4)-(6) разрешима относительно вектора $(x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2}, z)$. Ей удовлетворяет, например, вектор $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1+n_2}, \bar{z})$, где

$$\bar{z} = \max\{\max_{i\in I_+}(f_i - \nu), \max_{i\in I}(-f_i - \nu)\}.$$

А это означает, что $z(f,\nu) < +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть

$$z(f,\nu) = -\infty. \tag{7}$$

Тогда $I_+ \cap I_- = \phi$.. (Иначе из системы (I)-(2) следует, что $\nu \ge 0$, а из системы (4)-(6) следует, что

$$z \geq \nu(1+\sum_{j\in J_2}\psi_{i_0 j} y_j) \geq 0,$$

где $i_0 \in I_+ \cap I_-$.) Поэтому заменой

$$\bar{\varphi}_{ij} = \begin{cases} \varphi_{ij}, & i\in I_+, \\ -\varphi_{ij}, & i\in I_-, \end{cases} \quad j\in J_1;$$

$$\bar{f}_i = \begin{cases} f_i, & i\in I_+, \\ -f_i, & i\in I_-, \end{cases}$$

систему (4)-(5) можно привести к виду:

$$\sum_{j\in J_1} \bar{\varphi}_{ij} x_j + \sum_{j\in J_2} (\bar{f}_i - \nu)\psi_{ij} y_j + (\bar{f}_i - \nu) \leq z, \; i\in I. \tag{8}$$

При этом равенство (7) принимает вид:

$$z(\bar{f}, \nu) = -\infty, \tag{9}$$

где $\bar{f} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m)$. Ясно, что при изменении вектора $\bar{f}$ равенство (9) сохранится. Положим $\bar{f}_i = \nu$, $i\in I$. Тогда система (8) имеет вид:

$$\sum_{j\in J_1} \bar{\varphi}_{ij} x_j \leq z, \; i\in I. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует существование такого вектора $(\tilde{x}_1, \ldots$ $\ldots, \tilde{x}_{n_1})$, что

$$\sum_{j\in J_1} \bar{\varphi}_{ij} \tilde{x}_j \leq -1, \; i\in I. \tag{11}$$

Наоборот, пусть $I_+ \cap I_- = \varnothing$ и существует такой вектор $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n_1})$, для которого выполнено условие (11). Тогда для любых чисел f_i, $i\in I$, и любого вектора $(y_1, \ldots, y_{n_2})$, удовлетворяющего системе (3), существует такое число $N > 0$, что вектор $(N\tilde{x}_1, \ldots, N\tilde{x}_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$ удовлетворяет системе (8) при любом значении параметра z. Поэтому в этом случае выполняется равенство (9).

Из замечаний 2 и 3 непосредственно получаем следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Величина $z(f, \nu)$ принадлежит R в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий:

1) $I_+ \cap I_- \neq \emptyset$;

2) $I_+ \cap I_- = \emptyset$, но не существует вектора $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_1})$, удовлетворяющего условию (II).

§2. Геометрическая интерпретация задач А и В

Следуя [2], в пространстве $R^{n_1+n_2+1}$ рассмотрим точки

$$\alpha_i^+(f,\nu) = (\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in_1}, (f_i-\nu)\psi_{i1}, \dots, (f_i-\nu)\psi_{in_2}, (f_i-\nu)), \ i \in I_+;$$

$$\alpha_i^-(f,\nu) = (-\varphi_{i1}, \dots, -\varphi_{in_1}, (-f_i-\nu)\psi_{i1}, \dots, (-f_i-\nu)\psi_{in_2}, (-f_i-\nu)), \ i \in I_-;$$

$$\beta_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, -\psi_{i1}, \dots, -\psi_{in_2}, (\varepsilon-1)), \ i \in I,$$

а также множества

$$A^+(f,\nu) = \{\alpha_i^+(f,\nu) \mid i \in I_+\};$$
$$A^-(f,\nu) = \{\alpha_i^-(f,\nu) \mid i \in I_-\};$$
$$M(f,\nu) = conv(A^+(f,\nu) \cup A^-(f,\nu));$$
$$K = cone\{\beta_i \mid i \in I\};$$

последнюю координатную ось

$$B = \{b_z = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1+n_2}, z) \mid z \in R\}$$

и открытый луч

$$B_\lambda = \{b_z \in B \mid z > \lambda\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (II) (возможное лишь при $I_+ \cap I_- = \emptyset$, см. замечание 3) выполнено в том и только в том случае, если выпуклое множество

$$\check{M} = conv\{(\bar{\varphi}_{i1}, \dots, \bar{\varphi}_{in_1}) \mid i \in I\} \subset R^{n_1}$$

не содержит нулевой элемент $0_{n_1} \in R^{n_1}$ или, что то же, выполнено условие

$$(M(f,\nu) + K) \cap B = \emptyset.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если величина $z(f,\nu)$ принадлежит R, то она совпадает с последней координатой крайней точки пересечения оси B с множеством $M(f,\nu)+K$. При этом вектор $(x_1,\dots,x_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2})$ в том и только в том случае является решением системы (4)-(6) при $z=z(f,\nu)$, если при $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{n_1+n_2+1})=(x_1,\dots,x_{n_1},y_1,\dots,y_{n_2},1)$, переменном векторе $\alpha=(a_1,\dots,a_{n_1+n_2+1})$ и

$$(\xi,\alpha)=\sum_{k=1}^{n_1+n_2+1}\xi_k\cdot a_k$$

определяемая уравнением

$$(\xi,\alpha)=z(f,\nu) \qquad (12)$$

гиперплоскость H проходит через точку $b_{z(f,\nu)}$ и строго отделяет открытый луч $B_{z(f,\nu)}$ от множества $M(f,\nu)+K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, учитывая замечание 4, имеем:

$$(M(f,\nu)+K)\cap B\neq\phi. \qquad (13)$$

Пусть b_{z_0} - крайняя точка пересечения оси B с множеством $M(f,\nu)+K$. По теореме Фаркаша (см., например, [3]) разрешимость системы (6) (см. замечание 1) равносильна выполнению условия

$$(\underbrace{0,\dots,0}_{n_1+n_2},1)\notin K.$$

Поэтому через точку b_{z_0} можно провести гиперплоскость, строго отделяющую луч B_{z_0} от многогранного множества $M(f,\nu)+K$. Уравнение каждой такой гиперплоскости можно привести к виду

$$(\xi^0,\alpha)=z_0,$$

где $\xi^0=(\xi^0_1,\dots,\xi^0_{n_1+n_2+1})$, причем $\xi^0_{n_1+n_2+1}=1$, так как точка b_{z_0} принадлежит рассматриваемой гиперплоскости. При этом

$$(\xi^0,\alpha_i^{\pm}(f,\nu))\leq z_0,\ i\in I_{\pm}, \qquad (14)$$

и существует по крайней мере одна такая точка $\alpha^* \in A^+(f, \nu) \cup$ $\cup A^-(f, \nu)$, что

$$(\xi^\circ, \alpha^*) = z_0. \tag{15}$$

Положим $\gamma_i = \alpha^* + c\beta_i$, где $c > 0$, $i \in I$. Так как эти точки принадлежат множеству $M(f, \nu) + K$, то

$$(\xi^\circ, \gamma_i) \leq z_0, \ i \in I,$$

откуда с учетом (15) имеем

$$(\xi^\circ, \beta_i) \leq 0 \quad i \in I. \tag{16}$$

Так как b_{z_0} - крайняя точка пересечения оси B с множеством $M(f, \nu) + K$, то из (14) и (16) заключаем, что $z_0 = z(f, \nu)$ и вектор $(x_1^\circ, \ldots, x_{n_1}^\circ, y_1^\circ, \ldots, y_{n_2}^\circ) = (\xi_1^\circ, \ldots, \xi_{n_1+n_2}^\circ)$ является решением системы (4)-(6) при $z = z(f, \nu)$.

Наоборот, пусть $z = z(f, \nu)$ и вектор $(x_1^\circ, \ldots, x_{n_1}^\circ,$ $y_1^\circ, \ldots, y_{n_2}^\circ)$ является решением системы (4)-(6) при $z = z(f, \nu)$. Тогда при $\xi^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_{n_1}^\circ, y_1^\circ, \ldots, y_{n_2}^\circ, 1)$ имеем:

$$\begin{aligned}
&(\xi^\circ, \alpha) = z(f, \nu) && \text{при } \alpha = b_{z(f,\nu)}; \\
&(\xi^\circ, \alpha) \leq z(f, \nu) && \text{при } \alpha \in M(f, \nu) + K; \\
&(\xi^\circ, \alpha) > z(f, \nu) && \text{при } \alpha \in B_{z(f,\nu)},
\end{aligned} \tag{17}$$

т.е. при $\xi = \xi^\circ$ определяемая уравнением (12) гиперплоскость строго отделяет луч $B_{z(f,\nu)}$ от множества $M(f, \nu) +$ $+ K$. Отсюда, с учетом (13), заключаем, что $b_{z(f,\nu)} \in$ $\in (M(f, \nu) + K) \cap B$. Если точка $b_{z(f,\nu)}$ не является крайней точкой пересечения оси B с множеством $M(f, \nu) + K$, то в силу замкнутости множества $M(f, \nu) + K$ существует такое $\delta > 0$, что $b_{z(f,\nu)} + \delta \in M(f, \nu) + K$. Но

$$(\xi^\circ, b_{z(f,\nu)} + \delta) = z(f, \nu) + \delta > z(f, \nu),$$

что противоречит (17). Это завершает доказательство утверждения 2, из которого вытекает следующая характеристика задачи А.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если величина $z(f, \bar{\nu})$ принадлежит R для некоторого $\bar{\nu} \in R$, то $\nu = \nu(f) \in R$ в том и только в том случае, если существует однародная гиперплоскость, строго отделяющая луч B_λ при $\lambda=0$ от множества $M(f,\nu)+K$. При этом вектор $(x_1^*,\dots,x_{n_1}^*,y_1^*,\dots,y_{n_2}^*)$ в том и только в том случае является решением системы (I)-(3) при $\nu=\nu(f)$, если уравнение отделяющей гиперплоскости можно записать в виде

$$(\xi^*,\alpha)=0,$$

где $\xi^*=(x_1^*,\dots,x_{n_1}^*,y_1^*,\dots,y_{n_2}^*,1)$.

Доказательство этого факта непосредственно следует из утверждения 2 и того, что $\nu=\nu(f)$ в том и только в том случае, если $z(f,\nu)=0$.

§3. Предлагаемый алгоритм

Приведенные результаты позволяют предложить эффективный алгоритм для решения интересующей нас задачи А. При этом учитывается, что задача В является задачей линейного программирования.

Прежде всего заметим, что если значение $\bar\nu$ параметра ν является допустимым (т.е. соответствующая система (I)-(3) разрешима), то значение $\bar{\bar\nu}>\bar\nu$ также является допустимым.

Предположим, что в рассматриваемой задаче величина $\nu(f)$ принадлежит R и известны некоторые ее оценки $\nu_0^-\leq\nu(f)\leq\nu_0^+$. Предлагаемый алгоритм состоит в последовательном уточнении этих оценок. На k-м шаге процесса при некотором $\nu_k\in]\nu_k^-,\nu_k^+[$ решаем задачу В. Если при этом $z(f,\nu_k)=0$, то $\nu_k=\nu(f)$. Если же $z(f,\nu_k)\neq 0$, то переходим к следующему шагу. При определении новых оценок искомой величины $\nu(f)$ предлагается учитывать следующие обстоятельства.

I. Если $z(f,\nu_k)<0$, то значение ν_k является допустимым, но не оптимальным, поэтому его надо уменьшить. Если же $z(f,\nu_k)>0$, то значение ν_k не является допустимым, поэтому его надо увеличить.

2. Если $(x_1(\nu_k),\dots,x_{n_1}(\nu_k),y_1(\nu_k),\dots,y_{n_2}(\nu_k),z(f,\nu_k))$ - решение задачи В при $\nu=\nu_k$ и

$$\mu_k = \max_{i\in I}\left(\nu_k + z(f,\nu_k)\frac{1}{1+\sum_{j\in J_2}\psi_{ij}y_j(\nu_k)}\right),$$

то $z(f,\mu_k)\geq 0$. Однако в этом случае малость величины $\nu_k-\mu_k$, вообще говоря, не означает близости величины $\nu_{k+1}=\mu_k$ к искомому значению $\nu(f)$.

Учитывая сказанное, новые оценки для $\nu(f)$ предлагается определять следующим образом. Если $z(f,\nu_k)<0$, то $\nu_{k+1}^- = \nu_k^-$, $\nu_{k+1}^+ = \min\{\nu_k,\mu_k,\max\{\mu_k^+,\mu_k^-\}\}$, где

$$\mu_k^{\pm} = \max_{i\in I_\pm}\left(\frac{\pm\sum_{j\in J_1}\varphi_{ij}x_j(\nu_k)}{1+\sum_{j\in J_2}\psi_{ij}y_j(\nu_k)} \pm f_i\right).$$

Если же $z(f,\nu_k)>0$, то $\nu_{k+1}^- = \nu_k$, $\nu_{k+1}^+ = \min\{\nu_k^+,\mu_k,\max\{\mu_k^+,\mu_k^-\}\}$. При этом величину $\nu_{k+1}\in\,]\,\nu_{k+1}^-,\ \nu_{k+1}^+\,[$ можно определять, например, методом золотого сечения, т.е.

$$\nu_{k+1} = \nu_{k+1}^- + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\nu_{k+1}^+ - \nu_{k+1}^-\right).$$

Отметим, что проведенные экспериментальные расчеты подтвердили эффективность описанного алгоритма.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г.Ш.Рубинштейну за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О равномерном приближении непрерывной функции с помощью обобщенных рациональных функций. - Усп. мат. наук, 1960, т.15, вып.3, с.232-234.
2. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств. - Докл. АН СССР, 1955, т.100, №4, с. 627-630.
3. КАРМАНОВ В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1980.

Поступила в ред.-изд. отдел
7.12.1984 г.