Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ОБ ОПЕРАТОРЕ ВЗЯТИЯ ПОЛЯРЫ

А.М.Рубинов, А.А.Ягубов

Изучаются условия, при которых оператор, переводящий совокупность всех выпуклых, замкнутых, содержащих ноль подмножеств гильбертова пространства в себя, является оператором взятия поляры.

I. Рассмотрим вещественное гильбертово пространство H. Через $conv$ обозначим совокупность всех выпуклых замкнутых подмножеств этого пространства, содержащих ноль. Поляру множества $U \in conv$ обозначим через $\pi(U)$:

$$\pi(U)=\{y\in H:(y,x)\leq 1 \quad \text{для всех } x\in U\}.$$

Понятно, что $\pi(U)\in conv$. Хорошо известно (см., например, [1,2]), что оператор $\pi: conv \to conv$ обладает следующими свойствами:

а) $\pi(B)=B$ (B - единичный шар пространства H).

б) Для любого линейного ограниченного оператора $A:H\to H$ и любого $U\in conv$ выполняется $\pi(AU)=(A^*)^{-1}\pi(U)$. Здесь A^* - оператор, сопряженный A.

в) Если $U_\lambda\in conv (\lambda\in\Lambda)$, где Λ - произвольное множество индексов, то

в$_1$) $\pi(\overline{co}\, U_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\pi(U_\lambda)$;

в$_2$) $\pi(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)=\overline{co}\, U_{\lambda\in\Lambda}\pi(U_\lambda)$

(символ $\overline{co}$ обозначает оператор взятия выпуклой замкнутой оболочки).

Теми же свойствами, наряду с оператором π, обладает оператор $-\pi$, где

$$(-\mathcal{X})(V) = -(\mathcal{X}(V)) = \{y \in H : (y, x) \geq -1 \text{ для всех } x \in V\}.$$

В настоящей заметке показывается, что свойства а)-в) полностью характеризуют операторы $\mathcal{X}$ и $-\mathcal{X}$; при этом достаточно, чтобы свойство б) выполнялось не в полном объеме, а лишь для некоторых специальных операторов A , свойство $в_2$) выполнялось только для конечного множества индексов Λ . Если пространство H конечномерно и рассматриваемые операторы непрерывны в некоторых топологиях, то справедливость свойства $в_1$) можно требовать лишь для конечного множества индексов.

2. Рассмотрим оператор $P: conv \to conv$ со следующими свойствами:

α) $P(B) = B$.

β) $P(AV) = (A^*)^{-1} P(V)$ для любого $V \in conv$ и операторов A :

β_1) $A = cI$, где I - тождественный оператор, c - число;

β_2) $A = A_v$, где A_v - оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство, проходящее через вектор v ; если $\|v\| = 1$, то $A_v x = (x, v) v$;

β_3) $A = \tilde{A}_v$, где $\tilde{A}_v$ - оператор ортогонального проектирования на гиперплоскость, ортогональную вектору v ; если $\|v\| = 1$, то $\tilde{A}_v x = x - (x, v) v$;

β_4) $A = A_{u,v,\alpha}$, где $A_{u,v,\alpha}$ - оператор "двумерного поворота"; $A_{u,v,\alpha} = T_\alpha \circ P_{\tau_{u,v}}$; здесь $P_{\tau_{u,v}}$ - оператор ортогонального проектирования на плоскость, натянутую на векторы u, v , T_α - оператор поворота на угол α ,определенный на плоскости.

γ) Если $V_\lambda \in conv\,(\lambda \in \Lambda)$, то

γ_1) $P(\overline{co} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P(V_\lambda)$ для любого множества индексов Λ ;

γ_2) $P(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) = co \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P(V_\lambda)$ для любого множества индексов Λ .

ТЕОРЕМА I. П у с т ь о п е р а т о р $P: conv \to conv$ о б л а д а е т с в о й с т в а м и α) -γ) . Т о г д а л и б о $P = \mathcal{X}$, л и б о $P = -\mathcal{X}$.

Доказательство теоремы опирается на ряд лемм.

ЛЕММА I. П у с т ь $v \in H$, $C = \{x \in B : (x, v) = 0\}$. Т о г д а $P(C) = B + R_v$ (где $R_v = \{\lambda v : \lambda \in (-\infty, \infty)\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности, считаем, что $\|v\| = 1$.

Рассмотрим гиперплоскость H_ϑ, ортогональную вектору ϑ, и оператор $\hat{A}_\vartheta$ проектирования на эту гиперплоскость: $\hat{A}_\vartheta x = x-(x,\vartheta)\vartheta$. Понятно, что $\hat{A}_\vartheta B = C$. Используя самосопряженность оператора $\hat{A}_\vartheta$, получим, что $P(C)=(\hat{A}_\vartheta)^{-1}(B)$. Так как $\hat{A}_\vartheta(H)=H_\vartheta$ и $B\cap H_\vartheta=C$, то $(\hat{A}_\vartheta)^{-1}(B)=(\hat{A}_\vartheta)^{-1}(C)$. Последнее множество, как легко проверить, совпадает с $C+\mathbb{R}_\vartheta = B+\mathbb{R}_\vartheta$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\vartheta\in H$, $\|\vartheta\|=1$ и $W=\{x\in B:(\vartheta,x)\geq 0\}$ – один из двух единичных полушаров, определяемых вектором ϑ. Тогда либо $P(W)=\mathcal{K}(W)$, либо $P(W)=-\mathcal{K}(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $P(W)=\mathcal{Z}$. Рассмотрим множество $-W$: второй полушар, определенный элементом ϑ. Так как $-W=(-I)W$, то в силу β_1) $P(-W)=-P(W)=-\mathcal{Z}$. Так как $W\cup(-W)=B$, $W\cap(-W)=C$, где C - множество, определенное в лемме I, то, используя свойства α), γ) и лемму I, получим следующую систему уравнений относительно множества $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\cap(-\mathcal{Z})=B\ ;\quad \mathcal{Z}\cup(-\mathcal{Z})=B+\mathbb{R}_\vartheta. \qquad (I)$$

Покажем, что решением этой системы (в пространстве $conv$) могут служить лишь множества $\mathcal{Z}_+=B+\mathbb{R}_+\vartheta$ и $\mathcal{Z}_-=B-\mathbb{R}_+\vartheta$ (здесь $\mathbb{R}_+\vartheta=\{\lambda\vartheta:\lambda\geq 0\}$). Отметим, что $\mathcal{Z}_+=-\mathcal{Z}_-$. Второе из равенств (I) показывает, что $\mathbb{R}\vartheta\subset\mathcal{Z}\cup(-\mathcal{Z})$. В частности, точки $n\vartheta$, где $n\in N=\{0,1,2,\dots\}$, содержатся в этом объединении. Пусть $N_+=\{n\in N: n\vartheta\in\mathcal{Z}\}$, $N_-=\{n\in N: n\vartheta\in-\mathcal{Z}\}$. Хоть одно из множеств N_+, N_- бесконечно. Пусть, например, N_+ бесконечно и n_0 - наименьший элемент N_+. Из выпуклости множества $\mathcal{Z}$ в этом случае следует, что луч $[n_0,+\infty)\vartheta$ содержится в $\mathcal{Z}$. Если $n_0>0$, то точка $0=0\cdot\vartheta$ не входит в $\mathcal{Z}$. Понятно, что одновременно $0\notin-\mathcal{Z}$ и, следовательно, $0\notin\mathcal{Z}\cup(-\mathcal{Z})$. Это, однако, невозможно, так как $0\in\mathbb{R}\vartheta$. Таким образом, $n_0=0$. Снова привлекая выпуклость $\mathcal{Z}$, получим, что в рассматриваемом случае $N_+=N$, $N_-=\emptyset$ и $\mathbb{R}_+\vartheta\subset\mathcal{Z}$. Первое из равенств (I) показывает $B\subset\mathcal{Z}$. Из выпуклости и замкнутости $\mathcal{Z}$ вытекает, что $\overline{co}(B\cup\mathbb{R}_+\vartheta)\subset\mathcal{Z}$. Так как $\mathbb{R}_+\vartheta$ - луч, исходящий из нуля, то $\overline{co}(B\cup\mathbb{R}_+\vartheta)=B+\mathbb{R}_+\vartheta$, и, следовательно, $\mathcal{Z}_+\subset\mathcal{Z}$. Таким же образом предположение о том, что множество N_- бесконечно, приводит к включению $\mathcal{Z}_-\subset\mathcal{Z}$.

Покажем теперь, что соотношение $\mathcal{Z}_+\subset\mathcal{Z}$ равносильно равенству $\mathcal{Z}_+=\mathcal{Z}$. Допустим противное. Тогда пусть существует элемент такой $x\in\mathcal{Z}$, что $x\notin\mathcal{Z}_+=B+R_+v$. Второе из равенств (I) показывает, что $x\in B+Rv=C+Rv$. Это означает, что при некоторых $c\in C$ и $\mu\in R$ справедливо равенство $x=c+\mu v$. Если $\mu\geq 0$, то $x\in C+R_+v\in\mathcal{Z}_+$, что невозможно. Таким образом, $\mu<0$ и поэтому $-x=-c+(-\mu)v\in C+R_+v\subset\mathcal{Z}_+\subset\mathcal{Z}$. Последние соотношения показывают, что $x\in-\mathcal{Z}$. Следовательно, $x\in\mathcal{Z}\cap(-\mathcal{Z})=B$. В то же время, так как $x\notin\mathcal{Z}_+=B+R_+v$, то $x\notin B$. Полученное противоречие и показывает, что $\mathcal{Z}_+=\mathcal{Z}$. Таким же образом соотношение $\mathcal{Z}_-\subset\mathcal{Z}$ приводит к равенству $\mathcal{Z}_-=\mathcal{Z}$. Итак, показано, что если $\mathcal{Z}=P(W)$, то либо $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_+$, либо $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_-$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\mathcal{X}(W)=\mathcal{Z}_-$, $-\mathcal{X}(W)=\mathcal{Z}_+$. (Это можно проверить, используя равенства $W=B\cap H_+$, $\mathcal{X}(H)=-R_+v$, $\mathcal{X}(B)=B$, где $H_+=\{x\in H:(v,x)\geq 0\}$.) Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $v\in H$, $\|v\|=1$, $[0,v]=\{\lambda v:\lambda\in[0,1]\}$. Тогда либо $P([0,v])=\mathcal{X}([0,v])$, либо $P([0,v])=-\mathcal{X}([0,v])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор проектирования на прямую Rv: $A_v x=(x,v)v$. Так как $[0,v]=A_v(W)$, то, привлекая β_2), получим, что $P([0,v])=A_v^{-1}(P(W))$. (Здесь используется самосопряженность оператора A_v.) В то же время $\mathcal{X}([0,v])=A_v^{-1}(\mathcal{X}(W))$. Поэтому если $P(W)=\mathcal{X}(W)$, то $P([0,v])=\mathcal{X}([0,v])$, если же $P(W)=-\mathcal{X}(W)$, то $P([0,v])=-\mathcal{X}([0,v])$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Выберем произвольный вектор v, $\|v\|=1$ и найдем $P([0,v])$. Если $P([0,v])=\mathcal{X}([0,v])$, то, используя операторы "двумерного поворота" из β_4), легко убедимся в том, что $P([0,w])=\mathcal{X}([0,w])$ для любого $w\in H$, $\|w\|=1$. Если $w\neq 0$, то, привлекая β_1) и используя оператор $A=\frac{1}{\|w\|}I$, можно проверить, что в этом случае $P([0,w])=\mathcal{X}([0,w])$. Наконец, если $w=0$, то $[0,w]=(0\cdot I)v$ $(\|v\|=1)$. И снова используя β_1), получим, что $P([0,v])=\mathcal{X}([0,v])=H$. Пусть теперь $V\in conv$. Тогда $V=\cup_{w\in V}[0,w]$ и потому, привлекая γ_1), имеем

$$P(V)=\cap_{w\in V}P([0,w])=\cap_{w\in V}\mathcal{X}([0,w])=\mathcal{X}(V).$$

Подобным же образом, если $P([0,v])=-\mathcal{X}([0,v])$, то для любого $V\in conv$ выполняется $P(V)=-\mathcal{X}(V)$. Теорема доказана.

3. Через conv_0 и conv_1 обозначим подмножества множества conv, состоящие соответственно из ограниченных множеств и множеств, содержащих ноль в качестве внутренней точки.

Пусть оператор P обладает свойствами $\alpha)-\gamma)$, причем $\gamma_1)$ выполняется лишь для конечного множества индексов Λ; тогда $P(V)\in\operatorname{conv}_1$, если $V\in\operatorname{conv}_0$. Действительно, из $\gamma_1)$ и $\gamma_2)$ вытекает антитонность P по включению: соотношение $V_1\supset V_2$ влечет $P(V_1)\subset P(V_2)$. Поэтому если $V\in\operatorname{conv}_0$, то $V\subset\mu B$ при некотором $\mu>0$ и, следовательно, $P(V)\supset P(\mu B)=\frac{1}{\mu}P(B)=\frac{1}{\mu}B$. В множестве conv_0 введем операции сложения и умножения на положительное число по Минковскому: $U+V=\{u+v: u\in U, v\in V\}, tU=\{tu: u\in U\}$. С помощью этих операций введем в conv_0 метрику Хаусдорфа:

$$\rho_H(U,V)=\inf\{t>0: U\subset V+tB, V\subset U+tB\}.$$

Заметим, что $\mathcal{X}(tV)=t^{-1}\mathcal{X}(V), \mathcal{X}(U+V)=\bigcup_{0\le\alpha\le 1}[\alpha\mathcal{X}(U)\cap(1-\alpha)\mathcal{X}(V)]$ (см. [2]; здесь и ниже считается, что для $V\in\operatorname{conv}_1$ умножение на ноль определяется равенством $0\cdot V=\bigcap_{t>0}tV$). Это обстоятельство побуждает ввести в conv_1 операции инверсного умножения на число $\odot$ и инверсного сложения $\oplus$. По определению,

$$t\odot U=\frac{1}{t}U \quad (t>0, U\in\operatorname{conv}_1);$$

$$U\oplus V=\bigcup_{0\le\alpha\le 1}[\alpha U\cap(1-\alpha)V] \quad (U,V\in\operatorname{conv}_1).$$

С помощью этих опрераций введем в conv_1 метрику

$$\rho(U,V)=\inf\{t>0: U\supset V\oplus(t\odot B), V\supset U\oplus(t\odot B)\}.$$

Из сказанного выше легко следует, что сужение оператора $\mathcal{X}$ на conv_0 (обозначим его той же буквой $\mathcal{X}$), рассматриваемое как отображение $\operatorname{conv}_0\to\operatorname{conv}_1$, линейно и изометрично, т.е.

$$\mathcal{X}(tU)=t\odot\mathcal{X}(U)\,(t>0); \mathcal{X}(U+V)=\mathcal{X}(U)\oplus\mathcal{X}(V); \rho_H(U,V)=\rho(\mathcal{X}(U),\mathcal{X}(V)).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть оператор* $P:\operatorname{conv}_0\to\operatorname{conv}_1$ *обладает свойствами* $\alpha)$ *и* $\gamma)$, *а свойство* $\beta)$ *выполняется лишь для операторов* A *из классов* $\beta_1)-\beta_3)$. *Пусть, кроме того,* P *непрерывен. Тогда либо* $P=\mathcal{X}$, *либо* $P=-\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве лемм I–3 оператор P

рассматривался лишь на множествах из $conv_0$, поэтому эти леммы верны и в рассматриваемом случае. Пусть $S=\{v\in H: \|v\|=1\}$. Положим $S_+=\{v\in S: P([0,v])=\mathcal{X}([0,v])\}$, $S_-=\{v\in S: P([0,v])=-\mathcal{X}([0,v])\}$. Из непрерывности операторов P и $\mathcal{X}$ следует, что множества S_+ и S_- замкнуты. В силу леммы 3 $S_+\cup S_-=S$. Отметим, наконец, что $S_+\cap S_-=\emptyset$. Действительно, если $v\in S_+\cap S_-$, то $\mathcal{X}([0,v])=-\mathcal{X}([0,v])$, что невозможно. Так как единичная сфера связна, то одно из множеств S_+ и S_- пусто. Рассуждая далее так же, как при доказательстве теоремы I, легко убедиться в справедливости данной теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает теорема, в случае непрерывности P, справедливости свойства β) достаточно требовать лишь для простейших самосопряженных операторов. В рассматриваемом случае его можно сформулировать так: $P(AV)=A^{-1}(P(V))$ для операторов умножения на число и ортогонального проектирования на подпространства L, для которых $\dim L=1$ или $\operatorname{codim} L=1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространство H конечномерно и непрерывный оператор $P: conv_0 \to conv_0$ обладает свойствами α) и γ_2), свойство β) выполняется лишь для операторов из классов β_1) - β_3), а свойство γ_1) - лишь для конечного множества индексов Λ. Тогда либо $P=\mathcal{X}$, либо $P=-\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, убедимся в том, что для всех w либо $P([0,w])=\mathcal{X}([0,w])$, либо $P([0,w])=-\mathcal{X}([0,w])$. Ради определенности рассмотрим лишь первый случай. Пусть $V\in conv_0$. Тогда существует счетное плотное в V подмножество $\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$. Положим $V_n=co\, \bigcup_{i=1}^{n}[0,x_i]$. Так как пространство H конечномерно, то $V_n\to V$ по метрике Хаусдорфа. Используя свойство γ_1), для множества индексов $\{1,2,\dots,n\}$ получим, что $P(V_n)=\mathcal{X}(V_n)$. Из непрерывности операторов P и $\mathcal{X}$ следует, что $P(V)=\mathcal{X}(V)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
2. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. - Усп. мат. наук, 1968, т.23, №6, с. 51-116.

Поступила в ред.-изд. отдел
31.10. 84 г.