Выпуск 35(52) О П Т И М И З А Ц И Я 1985 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 513.88+512.25/26

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В КОМПАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Г.Пинскер

Многие прикладные задачи экономики приводят к некоторому классу линейных параметрических задач, в которых параметр пробегает заданный компакт, а исходные данные задачи представляют собой вещественные и непрерывные функции параметра. Если существует такое значение параметра, для которого целевая функция задачи достигает своего наибольшего значения, то будем говорить, что задача имеет решение. В одной из работ автора установлено существование решения довольно широкого класса задач этого рода. В настоящей статье теорема о существовании решения доказывается в самом общем случае, без всяких ограничений. Это обстоятельство существенно расширяет круг возможных приложений теории. Рассматриваемая задача состоит в следующем,

Пусть $Q=\{t\}$ - компакт, $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ и $c_j(t)$ ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$)-известные вещественные и непрерывные функции параметра $t\in Q$, и пусть при всяком фиксированном значении параметра t задача ("числовая") линейного программирования

$$f[X(t)]=\sum_{j=1}^{n} c_j(t)x_j(t)\to max \tag{1}$$

при условии, что

$$X(t)=\{x_j(t)\},\ x_j(t)\geq 0; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)=b_i(t), \tag{3}$$

имеет решение.

Функцию $\varphi(t)$, выражающую наибольшее значение целевой функции (I) в точке $t \in Q$, будем называть м а к с и - м у м - ф у н к ц и е й задачи. Задача (I)-(3) имеет решение, если при некотором $t = t^*$ имеем $\varphi(t^*) \geq \varphi(t)\ (t \in Q)$.

Перейдем к исследованию задачи (I)-(3). С этой целью введем некоторые обозначения и докажем одно вспомогательное предложение.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_s$ - всевозможные оптимальные базисы задачи и $\Delta_1(t), \Delta_2(t), \ldots, \Delta_s(t)$ - соответствующие им базисные определители. Так как все функции $a_{ij}(t)$ непрерывны в Q, то непрерывны в Q и все базисные определители, и потому множества $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_s$, в которых соответствующие определители отличны от нуля, открыты в компакте Q. Эти множества будем называть б а з и с н ы м и для соответствующих оптимальных базисов.

Пусть, например, $B_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ - оптимальный базис задачи, тогда для всех $t \in \mathcal{D}_1$ базисные неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ и целевая функция (I) могут быть выражены через свободные неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$ в виде

$$x_i(t) = a_i(t) + a'_{ik+1}(t) x_{k+1}(t) + \ldots + a'_{in} x_n(t) \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k);$$

$$f[X(t)] = c(t) + c'_{k+1}(t) x_{k+1}(t) + \ldots + c'_n(t) x_n(t), \tag{5}$$

где

$$X(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t), 0, \ldots, 0) \tag{6}$$

- базисное решение системы (2).

Важно отметить, что все коэффициенты при неизвестных и свободные члены в равенствах (4) и (5) непрерывны в $\mathcal{D}_1$, так как каждый из них представляет собой отношение, числитель которого образован с помощью действий сложения и умножения функций $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ и $c_j(t)$, непрерывных во всем компакте Q, а знаменатель $\Delta_1(t)$ не равен нулю в базисном множестве $\mathcal{D}_1$.

Соотношения, аналогичные (4)-(6), имеют место и для всех оптимальных базисов задачи.

Пусть P_r - множество всех точек $t \in Q$, для которых задача (I)-(3) имеет решение с оптимальным базисом $B_r\ (r = 1, \ldots, s)$.

Очевидно, $P_r \subset \mathcal{D}_r$ и объединение всех P_r, а также всех $\mathcal{D}_r$ совпадает со всем компактом Q.

Если $t \in P_1$, то

$$x_i(t) = a_i(t) \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,k), \qquad (7)$$

а коэффициенты при неизвестных в соотношении (5)

$$c'_{k+1}(t) \leq 0, \ldots, c'_k(t) \leq 0. \qquad (8)$$

При этом свободный член в (5) равен наибольшему значению целевой функции (I) в точке $t \in P$, т.е. максимум-функция

$$\varphi(t) = c(t) \quad (t \in P_1). \qquad (9)$$

Напомним, что свободный член $c(t)$ - функция, непрерывная во всем базисном множестве $\mathfrak{D}_1$.

Соображения, изложенные выше для случая оптимального базиса B_1, сохранят, очевидно, свою силу и для всех других оптимальных базисов $B_2, \ldots, B_s$.

Существенное значение для последующего изложения имеет предложение о замкнутости множества P_r в соответствующем базисном множестве $\mathfrak{D}_r$.

ЛЕММА. Если $t_n \in P_r$, $t_n \to t_0$ и $t_0 \in \mathfrak{D}_r$, то $t_0 \in P_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости рассмотрим случай, когда $r = 1$. Если $t_n \in P_1$, то $x_i(t_n) = a_i(t_n) \geq 0$ $(i=1,\ldots,k)$ и $c_j(t_n) \leq 0$ $(j=k+1,\ldots,n)$. Переходя в соотношениях (7),(8) к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание непрерывность функций $a_i(t)$ и $c_j(t)$ в базисном множестве $\mathfrak{D}_1$, заключаем, что $x_i(t_0) = a_i(t_0) \geq 0$ и $c_j(t_0) \leq 0$. Отсюда следует, что $X(t_0)$ - оптимальный план задачи (I)-(3) с оптимальным базисом B_1 и, таким образом, $t_0 \in P_1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Задача (I)-(3) всегда имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $t \in Q$. Через $\mathfrak{D}_t$ обозначим пересечение всех базисных множеств $\mathfrak{D}_r$, содержащих точку t. Множество $\mathfrak{D}_t$ - открытое и непустое подмножество Q. В нем содержится некоторая замкнутая сфера $\bar{S}_t$ с центром в точке t.

Допустим теперь, что множество $T_1 = P_1 \cap \bar{S}_t$ непусто. Так как $T_1 \subset \bar{S}_t$ и $T_1 \subset P_1 \subset \mathfrak{D}_1$, то множество T_1 замкнуто в Q. Действительно, если $t_n \in T_1$ и $t_n \to t_0$, то, ввиду замкнутости сферы $\bar{S}_t$, $t_0 \in \bar{S}_t$. Вместе с тем $\bar{S}_t \subset \mathfrak{D}_1$ и, таким образом, $t_0 \in \mathfrak{D}_1$.

В силу леммы, так как $t_n \in P_1$, а $t_0 \in \mathfrak{D}_1$, то $t_0 \in P_1$. С другой стороны, $t_0 \in \bar{S}_t$ и, следовательно, $t_0 \in T_1$. Итак, множество T_1 замкнуто в Q. Заметим теперь, что свободный член $c(t)$ в соотношении (5) - функция, непрерывная в $\mathcal{D}_1$ и тем более в $T_1 \subset \mathcal{D}_1$, и так как T_1 - замкнутое подмножество компакта Q, то в некоторой точке $t_1 \in T_1$ функция $c(t)$ достигает своего наибольшего в T_1 значения $c(t_1)$. В силу (9) $\varphi(t) = c(t)$ в T_1 и, таким образом, $\varphi(t_1) = c(t_1)$ - наибольшее значение максимум-функции на множестве T_1.

Аналогично, если $T_k = P_k \cap \bar{S}_t$ непусто, то максимум-функция $\varphi(t)$ достигает своего наибольшего значения на множестве T_k в некоторой точке $t_k \in T_k$.

Легко видеть, что вся сфера $\bar{S}_t = \bigcup_{k=1}^{s} T_k$ и наибольшее из чисел $\varphi(t_k)$ будет наибольшим значением функции $\varphi(t)$ в замкнутой сфере $\bar{S}_t$. Очевидно, совокупность всех сфер $\bar{S}_t$ образует покрытие компакта Q. Выбрав из него конечное покрытие $\bar{S}_{p_1}, \bar{S}_{p_2}, \dots, \bar{S}_{p_\ell}$ и сравнив числа $\varphi(p_1), \varphi(p_2), \dots, \varphi(p_\ell)$, найдем наибольшее из них. Пусть это будет $\varphi(p_m)$, тогда в точке p_m максимум-функция $\varphi(t)$ достигает своего максимального значения на компакте Q, $\varphi(p_m) \geq \varphi(t)$, для всех $t \in Q$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. ПИНСКЕР А.Г. Компактные системы задач линейного программирования. - Оптимизация, 1984, вып. 34(51), с.53-65.
2. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Академиздат, 1949.
4. ЮДИН Д.Б., ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Линейное программирование. Теория и конечные методы. - М.: Наука, 1963.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.11.84 г.