Выпуск 35(52) ОПТИМИЗАЦИЯ 1985 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.II+517.98

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ОПЕРАТОРНО-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Н.М.Абасов

I. Введение. Экстремальная структура выпуклых множеств в локально-выпуклых пространствах изучена достаточно хорошо. Относительно операторно-выпуклых множеств имеются всего два более общих результата: теорема Крейна – Мильмана для субдифференциалов и описание субдифференциала любого сублинейного оператора [I,2]. Поэтому изучение операторно-выпуклых множеств представляет интерес. В настоящей заметке методом булевозначных моделей дается явное представление крайних точек субдифференциалов некоторых сублинейных операторов, имеющих абстрактную норму [3]. Устанавливается, что крайние точки субдифференциала $\partial(P)$ можно получить как слабо циклические пределы перемешиваний одномерных операторов, построенных по крайним точкам отрезка $[0,1]$, принадлежащего K-пространству образов, и по крайним точкам субдифференциала $\partial(p)$ исходного сублинейного функционала p. Отметим, что теорему, установленную в заметке, можно доказать, используя экстремальную структуру субдифференциалов, описанную в [2]. В отличие от [2], где пользуются реализацией произвольного сублинейного оператора P через канонический сублинейный оператор $\mathcal{E}$, мы не будем пользоваться такой реализацией оператора P. Всюду в дальнейшем будем придерживаться терминологии работ [3–6].

2. Основные обозначения, постановка задачи. Пусть X – банахово пространство, p – непрерывный сублинейный функционал на X, Y – расширенное K-пространство, Q – стоуновский компакт Y, 1 – единица в Y. Обозначим через $C_\infty(Q,X)$

множество классов эквивалентности непрерывных отображений котощих подмножеств Q в X [7]. Норму элемента $q: Q_0 \to X$ определим равным такому единственному элементу $|q| \in C_\infty(Q)$, что сужение $|q|$ на $Q_0 - |q||_{Q_0}$ совпадает с $\|q(\cdot)\|$. Обозначим через $\Pi(C_\infty(Q,X),Y)$ множество линейных операторов $T: C_\infty(Q,X) \to Y$, имеющих абстрактную норму $|T| = \sup_{|x|\leq 1}(Tx)$, а через $U = \{T \in \Pi(C_\infty(Q,X),Y) : |T| \leq 1\}$ – единичный шар в смысле абстрактной нормы множества $\Pi(C_\infty(Q,X),Y)$. Рассмотрим оператор $P': X \to Y; P' = p \otimes 1$. Как следует из результатов [6,9], существует единственный сублинейный оператор $P \in \Pi(C_\infty(Q,X),Y)$ такой, что $P|_X = P'$ и $|P| = |P'|$ (элемент $x \in X$ отождествляем с постоянной функцией из $C_\infty(Q,X)$, принимающей значение, равное x).

Задача: описать крайние точки субдифференциала $\partial(P)$ в терминах крайних точек субдифференциала $\partial(p)$ и крайних точек отрезка $[0,1] \subset Y$.

3. Основные понятия и определения. Пусть Z_1 и Z_2 – два произвольных элемента булевозначного универсума V^B, а $Z_1\downarrow$ и $Z_2\downarrow$ соответственно их спуски [2,5,8]. Каждому оператору $f: Z_1 \to Z_2$ "внутри" V^B можно сопоставить единственный оператор $f\downarrow : Z_1\downarrow \to Z_2\downarrow$ такой, что $f\downarrow(z) = f(z)\ (z \in Z_1\downarrow)$. Оператор $f\downarrow$ называется спуском f. Наоборот, каждому экстенсиональному оператору $g: Z_1\downarrow \to Z_2\downarrow$ можно сопоставить единственный оператор $g\uparrow : Z_1 \to Z_2$ такой, что $g\uparrow(z) = g(z)\ (z \in Z_1)$ "внутри" V^B. Оператор $g\uparrow$ называется подъемом g. Для произвольных множеств Z_1 и Z_2 и произвольного оператора $f: Z_1 \to Z_2$ через $Z_1^\vee, Z_2^\vee, f^\vee$ соответственно обозначим их образы в V^B при каноническом вложении. Для банахова пространства X пополнение $X^\vee$ внутри $V^B - \widehat{X^\vee}$ будет банаховым пространством. Непрерывное продолжение функционала $p^\vee$ на $\widehat{X^\vee}$ обозначим через $\widehat{p^\vee}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $T \in \Pi(C_\infty(Q,X),Y)$ называется S_p-крайним (p-скалярно крайним), если существует пара $(f,e) \in Ch(p) \times Ch[0,1]$, что $T|_X = f \otimes e$. Множество всех S_p-крайних операторов обозначим через M_p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $T \in \Pi(C_\infty(Q,X),Y)$ называется слабо циклически предельной точкой множества M_p, если для любого натурального числа n и любого конечного набора точек $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ существует семейство $\{T_\xi\} \subset M_p\ (T_\xi|_X =$

$= f_\xi \otimes e_\xi \ (\xi \in \Xi)$, что

$$|T(x_i) - \sum_\xi T_\xi(x_i)| \le \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1} \ (i = 1, \dots, K),$$

причем семейство $\{e_\xi\}$ образует разбиение единицы $\mathbb{1}$.

4. Формулировка результата. Пусть F - непрерывный сублинейный функционал на некотором банаховом пространстве Z "внутри" V^B. Каждому элементу $f \in \partial(F)\downarrow$ можно сопоставить элемент $i(f) \in \partial(F\downarrow)$ по правилу $i(f) = f\downarrow$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Отображение $i: f \to f\downarrow$ осуществляет аффинный изоморфизм множеств $\partial(F)\downarrow$ и $\partial(F\downarrow)$, причем $i^{-1}(f') = f'\uparrow \ (f' \in \partial(F\downarrow))$.

Доказательство предложения становится очевидным, если вспомнить определение отношения неравенства $\le$ в $\mathcal{R}\downarrow$. А именно: для любых β_1, β_2 выполнено $\beta_1 \le \beta_2$ в том и только в том случае, если $[\![\beta_1 \le \beta_2]\!] = \mathbb{1}$ [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Отображение $i: f \to f\downarrow$ осуществляет биекцию множеств $Ch(F)\downarrow$ и $Ch(F\downarrow)$, причем $i^{-1}(f') = f'\uparrow \ (f' \in Ch(F\downarrow))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону предложение 2 доказывается легко, если пользоваться предложением I. Докажем в обратную сторону. Предположим, что $f' \in Ch(F\downarrow)$. Допустим, что для $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}^+$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = \mathbb{1}$ "внутри" V^B выполнено $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = i^{-1}(f') = f$ для некоторых $f_1, f_2 \in \partial(F)\downarrow$. Тогда для спусков $f_1\downarrow, f_2\downarrow$ и $f\downarrow$ справедливо $\alpha_1\downarrow f_1\downarrow + \alpha_2\downarrow f_2\downarrow = f\downarrow$, причем $\alpha_1\downarrow$ и $\alpha_2\downarrow$ будут мультипликаторами. Из этого равенства, если воспользоваться критерием крайней точки (см. [I]) и предложением I, следует, что $\alpha_1\downarrow f_1\downarrow = \alpha_1\downarrow f\downarrow$ и $\alpha_2\downarrow f_2\downarrow = \alpha_2\downarrow f\downarrow$. Легко заметить, что подъемом мультипликатора будет число. Поэтому из последних равенств непосредственно вытекает требуемое. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА. Оператор $T \in \Pi(C_\infty(Q,X), Y)$ является крайней точкой субдифференциала $\partial(P)$ в том и только в том случае, если T является слабо циклически предельной точкой множества M_P.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем работать с булевозначным универсумом V^B, построенным по булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств компакта Q. Обозначим $\{\widetilde{f}^\vee : f \in \partial(P)\}\uparrow$

через $\widetilde{A}$. Пусть ρ – такой сублинейный функционал на $\widetilde{X^{\vee}}$, что

$$[\![\rho = \sup \widetilde{A}]\!] = \mathbb{1}.$$

Легко проверить, что

$$[\![\rho(x) = p^{\vee}(x)\,(x \in X^{\vee})]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда, по принципу переноса имеем

$$[\![\rho(x) = \widetilde{p^{\vee}}(x)\ (x \in \widetilde{X^{\vee}})]\!] = \mathbb{1}.$$

Значит, в силу классической теоремы Мильмана в слабой топологии сопряженного пространства $\widetilde{X^{\vee}}^*$ справедливо

$$[\![Ch(\widetilde{p^{\vee}}) \subset cl\,\widetilde{A}]\!] = \mathbb{1}. \tag{1}$$

Пусть $T \in Ch(P)$. Из (1) и предложения 2 следует

$$[\![t = T\mathbb{1} \in cl\,\widetilde{A}]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow [\![\forall n \in \omega, \forall \{x_{1^{\vee}}^{\vee}, \ldots, x_{k^{\vee}}^{\vee}\} \subset X^{\vee}\,\exists$$

$$\exists f \in \widetilde{A}, |f(x_i^{\vee}) - t(x_i^{\vee})| \le \frac{1}{n}\,(i = 1^{\vee}, \ldots, k^{\vee})]\!] = \mathbb{1} \leftrightarrow \bigvee_{f \in Ch(p)} [\![|f^{\vee}(x_i^{\vee}) -$$

$$- t(x_i^{\vee})| \le \frac{1}{n^{\vee}}]\!] = \mathbb{1}\,(\forall n \in \omega, \forall \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{P}_{fin}(X).$$

Таким образом, можно подобрать разбиение единицы $\mathbb{1}$ $\{\pi_{\xi}\}_{\xi \in \Xi}$ и семейство $\{f_{\xi}\}_{\xi \in \Xi}$ элементов $Ch(\rho)$, для которых

$$[\![|f_{\xi}^{\vee}(x_i^{\vee}) - t(x_i^{\vee})| \le \frac{1}{n^{\vee}}]\!] \ge \pi_{\xi}\,(\xi \in \Xi, i = 1, \ldots, k). \tag{2}$$

Так как

$$f_{\xi}^{\vee}(x_i^{\vee}) = f_{\xi}(x_i) \cdot \mathbb{1},\ t(x_i^{\vee}) = T(x_i)\,(\xi \in \Xi, i = 1, \ldots, k),$$

то (2) можно переписать в виде

$$[\![|f_{\xi}(x_i) \cdot \mathbb{1} - T(x_i)| \le \frac{1}{n^{\vee}}]\!] \ge \pi_{\xi}\,(\xi \in \Xi, i = 1, \ldots, k). \tag{3}$$

Поскольку для любых $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{R}\downarrow$ и любого $b \in B$ верно

$$b\beta_1 \le b\beta_2 \leftrightarrow b \le [\![\beta_1 \le \beta_2]\!],$$

то (3), в свою очередь, равносильно следующему:

$$\pi_{\xi}|f_{\xi}(x_i) \cdot \mathbb{1} - T(x_i)| \le \frac{1}{n}\pi_{\xi}\mathbb{1}\,(\xi \in \Xi, i = 1, \ldots, k).$$

Если заменить $\pi_{\xi}\mathbb{1}$ через $e_{\xi}\,(\xi \in \Xi)$, то из последнего соотношения непосредственно следует

$$|T(x_i)-\sum_{\gamma} T_{\gamma}(x_i)| \leq \frac{1}{n} 1 \ (i=1,\ldots,k).$$

Таким образом установлено, что T является слабо циклически предельной точкой множества M_p. В обратную сторону доказательство теоремы очевидным образом следует из приведенной схемы доказательства. Отсюда непосредственно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ. Оператор $T \in U$ является крайней точкой шара U в том и только в том случае, если T является слабо циклически предельной точкой множества $M_{\mathbb{U} \cdot \mathbb{U}}$.

В заключение автор выражает благодарность А.Г.Кусраеву за постановку задачи, интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Теорема Крейна—Мильмана и ее обращение.- Сиб. мат. журн., 1980, т.21, №1, с.130-138.
2. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Анализ субдифференциалов с помощью булевозначных моделей. - Докл. АН СССР, 1982, т.265, №5, с.1061-1064.
3. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.: Физматгиз, 1961.
4. АКИЛОВ Г.П., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Упорядоченные векторные пространства. - Новосибирск: Наука, 1978.
5. ИЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. - М.: Мир, 1973.
6. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. - Новосибирск, 1982.- (Препринт / Ин-т математики СО АН СССР).
7. ЛЮБЕЦКИЙ В.А., ГОРДОН Е.И. Булевы расширения равномерных структур. - В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М: Наука, с. 82-153.
8. ГОРДОН Е.И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства. - Докл. АН СССР, 1977, т.237, №4, с.773-775.
9. KUSRAEV A.G. On Boolean-valued convex analysis. - In: Mathematische Optimierung - Theorie und Anwendungen. Eisenach - Wartburg, 1983, p.106-109.

Поступила в ред.-изд. отдел
29.II.84 г.