

УДК 519.866:338:63

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТИВНО-ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ
ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ
(на примере сельскохозяйственного производства)

В.А.Карцаш

Двойственные задачи стохастического программирования рассматривались в ряде работ, в основном математического плана [1-4]. Исследованию общих свойств оптимальных двойственных оценок в некоторых задачах стохастического программирования посвящена работа [5]. В [4], вероятно, впервые даны систематические сведения из теории двойственности в стохастической версии, рассмотрены аналогии с двойственностью в детерминированном варианте и отмечены некоторые особенности в интерпретации стохастических оценок по сравнению с детерминированными двойственными оценками. Однако производственно-экономический аспект соотношений двойственности и содержательный смысл двойственных оценок факторов в случайных производственных ситуациях на конкретных моделях изучались еще сравнительно мало.

В [6,7] на основе решений стохастических задач ирригации излагалась идея построения хозрасчетного механизма в орошении с применением стохастических оценок водных ресурсов; высказывалась целесообразность дотаций к ценам продукции, получаемой в засушливые годы хозяйствами зоны рискованного земледелия. В [8] предлагалось использовать стохастические оценки факторов сельскохозяйственного производства для выделения влияния погоды на урожайность культур и продуктивность скота с целью объективной оценки результатов трудовых усилий коллективов и отдельных работников.

Уже на основе этих попыток конструктивного использования стохастических оценок можно заключить, что учет случайных производственных ситуаций и связанных с ними вариаций степени дефицитности факторов затрагивает сами принципы построения и функционирования экономического механизма управления на базе оценок оптимального плана.

Вопросы использования именно стохастических объективно-обусловленных оценок для построения экономических рычагов управления особенно актуальны для отраслей сельского хозяйства и тесно связанных с ним отраслей АПК, для которых детерминистический подход в оптимизации приводит к слишком грубым аппроксимациям реальных процессов из-за сильного влияния случайных погодных факторов [7].

В настоящей статье рассматриваются задачи, двойственные к задаче, описанной в [7,9] и относящейся по содержанию к двухэтапным стохастическим задачам линейного программирования. Однако специфика структуры решения позволяет формально свести ее к одноэтапной задаче линейного программирования. Соответствующие пары двойственных задач легко решаются, что позволяет получать, в частности, системы дискретно распределенных стохастических оценок. Отмечаются некоторые конкретные свойства таких оценок. Дается сельскохозяйственная интерпретация решений пары двойственных задач. Излагаются некоторые методические схемы применения стохастических оценок в анализе сельскохозяйственного производства и построения гибкого экономического механизма управления.

1. Двойственные стохастические задачи линейного программирования с условиями инвариантности

В [6,7] рассматривался класс экономико-математических моделей, в которых представляется полная совокупность дискретных реализаций случайных производственных ситуаций - исходов условий и результатов производства - и предусматривается двухэтапная схема принятия управляющих решений. Специфика этого класса моделей состоит в том, что искомые параметры априорного решения, принимаемого до реализации случайной ситуации, выражаются явной аналитической зависимостью через искомые параметры апостериорных решений, зависящих от реализовавшейся ситуации. Детерминированный характер априорного ре-

шения обеспечивается заданием условий его инвариантности относительно реализаций случайных ситуаций. Такие предположения имеют реальную основу исходя из конкретных свойств моделируемых производственных процессов [9].

Модели этого класса приводятся к обычным задачам линейного программирования, если априорные параметры представимы в виде линейной комбинации апостериорных параметров решений:

$$x_{\nu k} = \sum_{\ell=1}^{n_k} a_{\nu \ell}^k y_{\nu \ell}^k, \quad k = \overline{1, m}, \quad \nu = \overline{1, N}, \quad (I)$$

где $x_{\nu k}$ - k -я компонента m -мерного вектор-столбца $X^{(\nu)}$, описывающего априорное решение; $y_{\nu \ell}^k$ - компонента n_k -мерного вектор-столбца Y_{ν} , описывающего апостериорное решение в ситуации ν из N возможных ситуаций; ℓ - номер апостериорного решения, применяемого в ситуации ν с интенсивностью $y_{\nu \ell}^k$ в рамках k -го априорного решения, применяемого с интенсивностью $x_{\nu k}$; n_k^{ν} - число апостериорных решений, которые допускаются в рамках k -го априорного решения в ситуации ν .

В случае зависимости (I) вектор априорных решений X называем стратегией, а совокупность апостериорных решений $\{Y_{\nu}\}, \nu = \overline{1, N}$, - тактикой, определяемой рамками стратегии.

Если допустить, что интенсивности применения стратегических и тактических решений являются величинами, имеющими одинаковые физические размерности, то это означает, что все $a_{\nu \ell}^k = 1$, и условие (I) упрощается. Имея в виду в дальнейшем именно этот случай, запишем (I) в виде:

$$X^{(\nu)} = E^{(\nu)} Y_{\nu}, \quad \nu = \overline{1, N}, \quad (I')$$

где

$$E^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица $E^{(\nu)}$ размерности $m \times n$ в каждой k -й строке имеет n_k^{ν} единиц, остальные элементы нулевые. Ввиду в дальнейшем для упрощения записи будем предполагать, что $n_k^{\nu} = n_k, \nu = \overline{1, N}, k = \overline{1, m}$, т.е. матрица $E^{(\nu)} = E$ для всех ν одна и та же.

Очевидно, что условия инвариантности стратегического решения относительно ситуаций будут представимы в виде:

$$X^{(y)} = X^{(y+1)} = X, \quad y = \overline{1, N-1}, \quad \text{или } X = EY, \quad y = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Пусть C, \tilde{C} - вектор-строки соответственно размерности m и n с ограниченными случайными компонентами; Q - набор ограниченных случайных параметров, в частности, Q может быть матрицей из случайных величин. Предполагается известным совокупное распределение вероятностей случайного набора параметров (C, \tilde{C}, Q) . X - искомый детерминированный вектор интенсивностей априорных решений размерности m ; $Y(\tilde{C}, Q)$ - искомый вектор интенсивностей апостериорных решений размерности n ; G_1 - выпуклая замкнутая ограниченная область допустимых значений вектора X ; $G_2(X, Q)$ - выпуклая замкнутая ограниченная область при любом X из G_1 и любом Q . В этих обозначениях можно выписать следующую двухэтапную стохастическую задачу:

$$M \max_{X \in G_1} [(MC, X) + M \max_{Y \in G_2(X, Q)} (\tilde{C}, Y)], \quad (3)$$

M - символ математического ожидания.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Если в задачу (3) ввести дополнительное условие инвариантности типа

$$X = EY(\tilde{C}, Q) \quad Y(\tilde{C}, Q), \quad (4)$$

то решение задачи (3) можно свести к одноэтапной задаче нахождения системы оптимальных векторов $Y^*(\tilde{C}, Q) \quad V(\tilde{C}, Q)$, при этом $X^* = EY^*(\tilde{C}, Q)$, где (\tilde{C}', Q') - какая-либо реализация (\tilde{C}, Q) .

В самом деле,

$$\max_{X \in G_1} [MC, X] + M \max_{Y \in G_2(X, Q)} (\tilde{C}, Y) = \max_{X \in G_1, Y \in G_2(X, Q)} M[(C, X) + (\tilde{C}, Y)] =$$

$$EY(\tilde{C}, Q) = X \quad Y(\tilde{C}, Q) \quad EY(\tilde{C}, Q) = X^* \quad Y(\tilde{C}, Q)$$

$$= \max_{Y \in G_0^E \cap G_2^E(Q)} M[(CE, Y) + (\tilde{C}, Y)] = \max_{Y \in G_3(Q)} M[(CE + \tilde{C}, Y)].$$

Здесь $G_0^E = \{Y: Y(\tilde{C}, Q) \text{ и } (\tilde{C}', Q') EY(\tilde{C}, Q) = EY(\tilde{C}', Q') \in G_1\}$;
 $G_2^E(Q) = \{Y: Y \in G_2(EY, Q)\}$; $G_3(Q) = G_0^E \cap G_2^E(Q)$.

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \max_{(X, \{Y_\nu\}_{\nu=1}^N)} [(C_0, X) + \sum_{\nu=1}^N P_\nu (C_\nu, Y_\nu)], \\
 2) A_0^y X + A_\nu Y_\nu \leq B_\nu, \quad \nu = \overline{1, N}, \\
 3) -I_m X + E Y_\nu = 0, \quad \nu = \overline{1, N}, \\
 4) Y_\nu \geq 0, \quad \nu = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь C_0 - m -мерная вектор-строка; C_ν - n -мерная вектор-строка; A_0^y - матрица размерности $n \times m$; A_ν - матрица размерности $n \times n$; B_ν - n -мерный вектор-столбец; I_m - единичная матрица размерности m ; набор $(A_0^y, A_\nu, C_\nu, B_\nu)$ описывает ν -ю совокупную реализацию из N возможных случайных реализаций набора параметров задачи; P_ν - вероятность ν -й реализации. C_0 и X - детерминированные векторы. Задачу (5) можно рассматривать как двухэтапную задачу стохастического линейного программирования с преобразованным функционалом.

Задача, двойственная к (5), имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \min \sum_{\nu=1}^N P_\nu (W_\nu, B_\nu), \\
 2) \sum_{\nu=1}^N P_\nu W_\nu A_0^y - \bar{V} I_m = C_0, \quad \bar{V} = \sum_{\nu=1}^N P_\nu V_\nu, \\
 3) W_\nu A_\nu + V_\nu E \geq \bar{C}_\nu, \quad \nu = \overline{1, N}, \\
 4) W_\nu \geq 0, \quad \nu = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Задачу (5) легко преобразовать подстановкой X из 3) в условия 1)-3) к виду:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \max \sum_{\nu=1}^N P_\nu (\bar{C}_\nu, Y_\nu), \\
 2) \bar{A}_\nu Y_\nu \leq B_\nu, \quad \nu = \overline{1, N}, \\
 3) E Y_{\nu+1} - E Y_\nu = 0, \quad \nu = \overline{1, N-1}, \\
 4) Y_\nu \geq 0, \quad \nu = \overline{1, N}.
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь $\bar{C}_\nu = C_0 E + C_\nu$, $\bar{A}_\nu = A_0^y E + A_\nu$. Отсюда видно, что задача в форме (6) имела m избыточных условий (в п.3) и переменных (вектор X).

Задача, двойственная к (6), запишется так:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \min \sum_{y=1}^N P_y (\tilde{W}_y, B_y), \\ 2) \quad & \tilde{W}_y \bar{A}_y + \frac{1}{P_y} (\tilde{V}_{y-1} - \tilde{V}_y) E \geq \tilde{C}_y, \quad y = \overline{1, N}, \\ & (\tilde{V}_0 \equiv 0), \\ 3) \quad & \tilde{W}_y \geq 0, \quad y = \overline{1, N}. \end{aligned} \right\} (6')$$

Заметим, что при переходе от задачи (5) к (6) ограничения $-I_m X + E Y_N = 0$ отброшены как избыточные. Однако для сопоставления решений задач (5') и (6') удобно считать, что $V_N \equiv 0$.

Задача в форме (5) богаче по своей структуре и поэтому допускает дополнительные содержательные интерпретации. Вместе с тем задача в форме (6) предпочтительнее с вычислительной точки зрения. Поэтому представляет интерес вопрос о связи оптимальных решений двойственных задач (5') и (6'). Эта связь формулируется следующими утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Набор $\{\hat{W}_y^*, \hat{V}_y^*, y = \overline{1, N}\}$ составляет оптимальное решение задачи (5'), где $\hat{W}_y^* = \tilde{W}_y^*, y = \overline{1, \dots, N};$
 $\hat{V}_y^* = \tilde{W}_y^* \bar{A}_y + \frac{1}{P_y} (\tilde{V}_{y-1}^* - \tilde{V}_y^*) - C_0, y = \overline{1, \dots, N};$

$\{\tilde{W}_y^*, \tilde{V}_y^*, y = \overline{1, N}\}$ - оптимальное решение задачи (6').

Покажем сначала, что сконструированное таким образом решение является допустимым для задачи (5'). Непосредственной его подстановкой в 2) задачи (5') убеждаемся, что эти условия выполняются. Из 2) задачи (6) следует выполнение условий 3) задачи (5'). Допустимость доказана.

Далее, в силу известной теоремы двойственности и тождественности задач (5) и (6) имеем:

$$\sum_{y=1}^N (\tilde{W}_y^*, B_y) P_y = \max \delta(6) = \max \delta(5) = \sum_{y=1}^N (W_y^*, B_y) P_y,$$

где $\{\tilde{W}_y^*\}_{y=1}^N$ - фрагмент оптимального решения задачи (6'), который мы принимаем при конструировании решения задачи (5') согласно утверждению 2, а $\{W_y^*\}_{y=1}^N$ - соответствующий фрагмент какого-либо оптимального решения задачи (5') оптимально. тельно, сконструированное решение задачи (5') оптимально.

Это дает возможность, решив более простые задачи в форме (6) и (6'), при необходимости легко восстановить решения задач (5) и (5').

2. Модель планирования сельскохозяйственного производства с учетом погодного фактора

В рамках задачи (5) будем рассматривать модель годового планирования сельскохозяйственного производства в масштабах хозяйства (района, области), учитывая влияние на производство климатических условий. Последние характеризуются набором из N возможных для данной территории годовых случайных реализаций погоды (с любой практически необходимой степенью детализации погодных характеристик). Реализации погоды определяют N существенно различных по условиям и результатам производства годовых производственных исходов. Каждый Y -й исход, в свою очередь, характеризуется: а) набором наиболее подходящих способов производства, описываемых матрицей A_Y и вектором C_Y и отбираемых с помощью тактических решений в ситуациях этого исхода; б) объемами ресурсов и требуемых выпусков продукции, описываемый вектором B_Y ; в) вероятностью реализации данного исхода P_Y .

Кроме того, имеются программные способы, отбираемые с помощью стратегических решений и описываемые вектором C_0 и матрицами

$$A_0 = (A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^Y, \dots, A_0^N); \Phi_f = (\Phi_{f1}, \Phi_{f2}, \dots, \Phi_{fY}, \dots, \Phi_{fN}), f=1,2.$$

A_0^Y и Φ_{fY} - подматрицы размерности $\lambda \times m_0$ и $\lambda \times m_f$ (соответственно матриц A_0 и Φ_f размерности $N\lambda \times m_0$ и $N\lambda \times m_f$), состоящие из тех частей программных "сквозных" способов, которые содержат нормативы затрат и выпусков, относящиеся к Y -й погодной реализации.

Конкретизируем смысл введенных обозначений. $X = (X_0, X_1, X_2)$, где $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m_0}^0)$ - вектор, компоненты которого выражают искомые площади посевов культур и среднегодовое поголовье животных для объекта планирования; $X_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_{m_1}^1)$ - вектор, компоненты которого выражают искомые объемы пополнения основных средств производства; $X_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_2}^2)$ - вектор, компоненты которого выражают искомые объемы резервов ресурсов и продуктов на случай неблагоприятных ситуаций. Таким образом, вектор X характеризует годовую программу формирования структуры сельскохозяйственного производства: растениевод-

ства и животноводства; основных производственных фондов; запасов и резервов.

$$Y_y = (Y_y^1, Y_y^2, \dots, Y_y^k, \dots, Y_y^{m_0}), \quad y=1, \bar{N}; \quad Y_y^k = (Y_{y1}^k, Y_{y2}^k, \dots, Y_{y\ell}^k, \dots, Y_{y\ell}^k)$$

- вектор, компоненты которого обозначают искомые объемы работ по возделыванию k -й культуры или по содержанию k -го вида животных в y -й погодной ситуации. Эти объемы измеряются в площадях обрабатываемых способом ℓ посевов или в поголовье животных, для которых осуществляется ℓ -я технология их содержания. Y_y - годовой план функционирования сельскохозяйственного производства для случая, когда реализуется y -я погодная ситуация. $A_y^k = (A_{00}^{yk}, A_{01}^{yk}, \dots, A_{0\ell}^{yk}, \dots, A_{0m_0}^{yk})$, $A_{0\ell}^{yk}$ - ℓ -мерный вектор-столбец из коэффициентов затрат и выпусков в y -й погодной ситуации, описывающий y -ю часть k -го программного способа выполнения тех элементов технологий в растениеводстве и животноводстве, интенсивности применения которых определяются до реализации погодной ситуации.

$R_{fy} = (R_{f1}^y, R_{f2}^y, \dots, R_{fk}^y, \dots, R_{f\ell}^y, \dots, R_{f\ell}^y)$ - ℓ -мерный вектор-столбец из коэффициентов затрат и выпусков в y -й погодной ситуации, описывающий y -ю часть k -го программного способа формирования основных средств производства ($f=1$): закупку или

строительство объектов основных средств или образования запасов продуктов и ресурсов ($f=2$).

$A_y = (A_y^1, A_y^2, \dots, A_y^k, \dots, A_y^{m_0})$, $A_y^k = (A_{y1}^k, A_{y2}^k, \dots, A_{y\ell}^k, \dots, A_{y\ell}^k)$, A_y^k - ℓ -мерный вектор-столбец из коэффициентов затрат и выпусков, описывающий ℓ -й тактический способ возделывания k -й культуры на единице площади или способ содержания одной головы скота, если реализуется погодная ситуация y .

$C_0^k = (C_{00}^k, C_{01}^k, C_{02}^k)$, $C_{0f}^k = (C_{0f1}^k, C_{0f2}^k, \dots, C_{0f\ell}^k, \dots, C_{0f\ell}^k)$, $f=0, 1, 2$;

C_{00}^k , $k=1, \dots, m_0$ - показатель среднего годового эффекта на единицу площади посева или от одной головы скота в результате применения соответствующего k -го программного способа; C_{0f}^k ,

$k=1, \dots, m_0$ - средние удельные затраты на пополнение основных производственных средств; C_{02}^k , $k=1, \dots, m_0$ - средние удельные затраты на резервирование единицы ресурса или продукта.

$C_y = (C_y^1, C_y^2, \dots, C_y^k, \dots, C_y^{m_0})$, $C_y^k = (C_{y1}^k, C_{y2}^k, \dots, C_{y\ell}^k, \dots, C_{y\ell}^k)$, C_y^k - норматив затрат на единицу площади посева k -й куль-

туры или на одну голову скота в результате выполнения l -й работы в γ -й погодной ситуации.

$B_{\gamma} = (b_{\gamma}^1, b_{\gamma}^2, \dots, b_{\gamma}^3, \dots, b_{\gamma}^z), b_{\gamma}^3$ - объем 3 -го ресурса или необходимого выпуска 3 -го продукта при γ -й реализации погодных условий. Этот объем зависит от соответствующих условий и требований к производству. Так, если b_{γ}^3 - ресурс мощности зерновых комбайнов 3 -й марки в гектарах площади зерновых, которую они могут убрать за сезон, то он определяется не только числом комбайнов, но и коэффициентом чистого рабочего времени $\alpha_{\gamma} \leq 1$ в γ -й реализации погодных условий, т.е. b_{γ}^3 - случайная величина. Объем необходимого выпуска продукции также может задаваться дифференцированно по погодным реализациям, соотносясь не только с потребностями, но и с реальными возможностями производства, зависящими от объективных погодных условий.

Используя введенные обозначения, запишем нашу модель оптимизации годового плана:

$$\left. \begin{aligned} 1) \max & \left[\sum_{f=0}^2 (C_{of}, X_f) + \sum_{\gamma=1}^N P_{\gamma} (C_{\gamma}, Y_{\gamma}) \right], \\ 2) A_0 X_0 + \sum_{f=1}^2 Q_{\gamma f} X_f + A_{\gamma} Y_{\gamma} & \leq B_{\gamma}, \gamma = \overline{1, N}, \\ 3) -Im_0 X_0 + E Y_{\gamma} & = 0, \gamma = \overline{1, N}, \\ 4) Y_{\gamma} \geq 0, \gamma = \overline{1, N}, X_f & \geq 0, f = \overline{1, 2}. \end{aligned} \right\} (7)$$

Задачу (7) нетрудно преобразовать к виду задачи (5). Для этого необходимо ввести искусственные тактические переменные - векторы $Y_{f\gamma}$ такие, что соблюдаются условия инвариантности по ситуациям векторов стратегических решений $X_f, f = \overline{1, 2}$:

$$\left. \begin{aligned} 1) \max & \left[\sum_{f=0}^2 (C_{of}, X_f) + \sum_{\gamma=1}^N (C_{\gamma}, Y_{\gamma}) P_{\gamma} \right], \\ 2) A_0 X_0 + \sum_{f=1}^2 Q_{\gamma f} X_f + A_{\gamma} Y_{\gamma} & \leq B_{\gamma}, \gamma = \overline{1, N}, \\ 3) -Im_0 X_0 + E Y_{\gamma} & = 0, \gamma = \overline{1, N}, \\ & -Im_f X_f + Y_{f\gamma} = 0, \gamma = \overline{1, N}, f = \overline{1, 2}, \\ 4) Y_{\gamma} \geq 0, Y_{f\gamma} & \geq 0, \gamma = \overline{1, N}, f = \overline{1, 2}. \end{aligned} \right\} (8)$$

Задачу (8) преобразуем к виду задачи (6):

$$\left. \begin{array}{l} 1) \max \sum_{y=1}^N (\bar{C}_y, \bar{Y}_y) P_y, \\ 2) \bar{A}_y \bar{Y}_y \leq B_y, \quad y=1, \overline{N}, \\ 3) \bar{E} \bar{Y}_{y+1} - \bar{E} \bar{Y}_y = 0, \quad y=1, \overline{N-1}, \\ 4) \bar{Y}_y \geq 0, \quad y=1, \overline{N}. \end{array} \right\} \quad (9)$$

Здесь $\bar{C}_y = (C_y + C_{00}E; C_{01}; C_{02})$, $\bar{A}_y = (A_y + A_0^y E; \mathcal{R}_{1y}; \mathcal{R}_{2y})$, $\bar{Y}_y = (Y_y, Y_{1y}, Y_{2y})$. Матрица \bar{E} получается путем расширения матрицы E :

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{m_2} \end{pmatrix}$$

где I_{m_1}, I_{m_2} - единичные матрицы соответственно размерности m_1 и m_2 .

Таким образом, для задач (8) и (9) двойственными будут соответственно задачи (5') и (6') с точностью до обозначений.

3. Соотношения двойственности и их экономическая интерпретация

Допустим, что получен оптимальный годовой план сельскохозяйственного производства по модели, записанной в форме (8) или (9). Обозначим его через $\{X_f^*, f=0,1,2, Y_y^*, Y_{fy}^*, f=1,2, y=1, \overline{N}\}$.

Решения соответствующих задач типа (5') и (6') дадут систему оценок факторов сельскохозяйственного производства. В отличие от детерминированного случая эти оценки дифференцированы по погодным ситуациям: $\{W_y^*, V_{fy}^*, f=0,1,2, y=1, \overline{N}\}$ или $\{W_y^*, V_{fy}^*, f=0,1,2, y=1, \overline{N}\}$.

Общие свойства оценок оптимального плана формулируются в теоремах двойственности [10, 11] и позволяют проводить комплексный экономический анализ принимаемых решений.

Одна из теорем двойственности утверждает, что для оптимальных решений пары двойственных задач значения их целевых функций равны. Для двух пар задач: (8) и (5'), (9) и (6') имеем соответственно

$$\sum_{f=0}^2 (C_{0f}, X_f^*) + \sum_{y=1}^N (C_y, Y_y^*) P_y = \sum_{y=1}^N (W_y^*, B_y) P_y; \quad (10)$$

$$\sum_{f=1}^2 \sum_{y=1}^N (C_{0f}, Y_{fy}^*) P_y + \sum_{y=1}^N ((C_{00} E + C_y), Y_y^*) P_y = \sum_{y=1}^N (\bar{W}_y^*, B_y) P_y. \quad (11)$$

Среди ресурсов и факторов производства, учитываемых в моделях (8) и (9) и получающих оценки, важнейшими являются: земельные угодья с их качественной дифференциацией как по плодородию, так и по условиям производства работ; трудовые ресурсы с дифференциацией по специализации, квалификации и сезонам сельскохозяйственных работ; водные ресурсы орошаемого земледелия, различающиеся по их доступности для использования; различного рода основные и оборотные средства производства; задания по производству продукции; некоторые технологические условия и ограничения. Все эти ресурсы и факторы учитываются и в обычных детерминированных моделях планирования сельскохозяйственного производства. Важнейшей особенностью моделей (8) и (9) является учет погодного фактора и оценка его влияния на эффективность использования всех других производственных факторов и ресурсов.

Обозначим через w_{zy}^* оптимальную оценку единицы z -го ресурса в y -й погодной ситуации, через $v_{ky}^{(*)}$ - оценку ограничения на равенство по k -му структурному элементу в y -й ситуации. Пусть z -й ресурс возрастает (уменьшается) в y -й погодной ситуации на величину Δv_{zy} . Тогда, согласно (10), если от указанной вариации решение задачи (5') не изменится, максимальное значение целевой функции задачи (8) возрастет (уменьшится) на величину $\Delta v_{zy} w_{zy}^* P_y$. В частности, при $\Delta v_{zy} = \pm 1$ прирост среднего значения эффекта будет равен $\pm w_{zy}^* P_y$. Таким образом, стохастическая оценка ресурса означает прирост случайной величины эффекта в ситуации y в расчете на добавочную единицу этого ресурса именно в данной погодной ситуации y .

Если, например, приобретается дополнительный комбайн или осваивается дополнительный гектар земли под пашню, то это будет означать, что $\Delta v_{zy} = 1$ для всех $y = 1, N$. При тех же предположениях относительно устойчивости двойственной задачи прирост эффекта будет равен $\bar{w}_z^* = \sum_{y=1}^N w_{zy}^* P_y$. Однако, как указывалось выше, фактическое использование техники может быть различным в зависимости от ситуаций. Тогда прирост среднего эффекта от

прироста техники на величину Δb_3 будет равен: $\bar{w}_3^* \Delta b_3 =$
 $= \sum_{y=1}^N (\alpha_y \Delta b_3) w_{3y}^* p_y$, т.е. средняя оценка δ -го ресурса
 равна: $w_3^* = \sum_{y=1}^N \alpha_y w_{3y}^* p_y$.

Поскольку в задачах (8) и (9) предусмотрены условия равенства посевных площадей каждой культуры по ситуациям и в каждую ситуацию "погружается" один и тот же набор культур, то ограничения по пашне достаточно ввести один раз в блоке ограничений какого-либо исхода y' . Поэтому ресурсы пахотных земель получают единую оценку $\bar{w}_3^* = w_{3y'}^* p_{y'}$, означающую прирост среднего эффекта на 1 га пахотных земель по полной системе событий (ситуаций).

Если речь идет, например, о привлечении сезонных рабочих или техники со стороны только при наступлении ситуаций с напряженным соответствующим балансом (множество таких ситуаций обозначим через N_3), то вклад в приращение эффекта будут давать только те ситуации, в которых используется дополнительный ресурс. В этом случае средний эффект прирастает на величину

$$\sum_{y \in N_3} w_{3y}^* p_y = \bar{w}_3^*.$$

Ограничения 3) задач (8) и (9) выражают требования, чтобы выбранные площади посевов k -й культуры, поголовье k -го вида животных, объем пополнения основных средств k -го вида или объемы созданных страховых запасов k -го вида сохраняли одинаковый размер в каждой из возможных ситуаций. Они отражают тот реальный факт, что априори выбранная (одна и та же) производственная структура может быть "погружена" случайной реализацией природы в любую из N возможных погодных ситуаций. Этим ограничениям соответствуют оценки $\{u_{yk}^{(f)}, y=1, N\}$ для задачи (8) и $\{\bar{u}_{yk}^{(f)}, y=1, N-1, f=0, 1, 2\}$ для (9).

Для m_0 избыточных ограничений из 3) задачи (8) мы можем взять произвольные оценки. В частности, можно принять

$$u_{nk}^{(0)} = -\frac{1}{p_N} \sum_{y=1}^{N-1} u_{yk}^{(0)} p_y, \quad k=1, \overline{m_0}.$$

Отсюда следует, что в этом случае

$$\bar{u}_{nk}^{(0)} = \sum_{y=1}^N u_{yk}^{(0)} p_y = 0, \quad k=1, \overline{m_0}.$$

Это же справедливо и для остальных $m_1 + m_2$ избыточных ограничений $y_{fN} = x_{f2}, f=1, 2$.

Назовем систему оценок $\{W_{\nu}^f, V_{\nu}^f, \nu=1, \bar{N}, f=0, 1, 2\}$ нормальной, если $\bar{V}_k^{(f)*} = 0, k=1, 2, \dots, m_f, f=0, 1, 2.$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Система оценок $\{W_{\nu}^f, V_{\nu}^f, \nu=1, \bar{N}, f=0, 1, 2\}$, полученная из задачи, двойственной к (9), согласно утверждению 2, является нормальной системой, если принята

$$\bar{V}_{0N}^* = \sum_{\nu=1}^N \bar{W}_{\nu}^* A_0^{\nu} P_{\nu} - C_{00}, \quad \bar{V}_{fN}^* = \sum_{\nu=1}^N \bar{W}_{\nu}^* A_f^{\nu} P_{\nu} - C_{of}, \quad f=1, 2.$$

Это непосредственно следует из того, что

$$M \hat{V}_{0\nu}^* = \sum_{\nu=1}^N \bar{W}_{\nu}^* A_0^{\nu} P_{\nu} - C_{00} - \bar{V}_{0N}^*; \quad M \hat{V}_{f\nu}^* = \sum_{\nu=1}^N \bar{W}_{\nu}^* A_f^{\nu} P_{\nu} - C_{of} - \bar{V}_{fN}^*, \quad f=1, 2.$$

В частности, если в задаче (8) $A_0 = 0, C_0 = 0$, то для нормальности системы оценок необходимо взять $\bar{V}_{0N}^* = 0$. В дальнейшем будем иметь в виду только нормальные системы оценок. Оценки $\{V_{\nu k}^{(f)*}\}$ и $\{\bar{V}_{\nu k}^{(f)*}\}$ имеют несколько различных содержательный смысл.

Оценка $V_{\nu k}^{(f)*}$ характеризует степень риска в ν -й ситуации, если принято решение возделывать дополнительно I га k -й культуры или содержать I голову k -го вида скота, приобрести дополнительную единицу ресурса или сделать запас. Дело в том, что помимо погодных ситуаций, в которых культура или животное, приобретаемые или запасаемые заранее ресурсы выгодны, могут реализоваться и такие, когда они, возможно, даже убыточны. При этом выбор должен быть оправдан в среднем по ситуациям и по каждой культуре и виду животных, по каждому ресурсу отдельно ($\bar{V}_k^{(f)*} = 0$). Таким образом, оценки $\{V_{\nu k}^{(f)*}\}$ принимают по ситуациям как положительные, так и отрицательные значения (таб. I). $\bar{V}_{\nu k}^{(f)*}$ дает оценку дисбаланса на единицу объема k -го структурного элемента между смежными ситуациями $\nu-1$ и ν . Эта оценка показывает, таким образом, относительную эффективность k -го элемента структуры в ν -й ситуации по сравнению с ситуацией $\nu-1$.

Упорядочим компоненты каждого вектор-решения $X_f^*, f=0, 1, 2$, так, чтобы все нулевые значения их имели большие номера по сравнению с ненулевыми, а именно: $x_k^{f*} > 0, k=1, \dots, m_f; x_k^{f*} = 0, k=m_f+1, \dots, m_f, f=0, 1, 2$. Компоненты векторов $Y_{0\nu}^*$ упорядочим следующим образом: $y_{\nu l}^{k*} > 0, l=1, \dots, m'_{k\nu}, k=1, \dots, m'_0, \nu=1, \bar{N}, y_{\nu l}^{k*} = 0, l=m'_{k\nu}+1, \dots, m_{k\nu}; k=1, \dots, m'_0; l=1, \bar{N}, k=m'_0+1, \dots, m_0.$

Тогда, согласно второй теореме двойственности [11], для задачи (8) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 1) \sum_{y=1}^N (W_y^*, A_0^{yk}) P_y &= C_{00}^k, \quad k=1, \dots, m_0; \\
 2) \sum_{y=1}^N (W_y^*, \Phi_{y,f}^k) P_y &= \begin{cases} C_{0f}^k, & k=1, \dots, m_f', f=1, 2; \\ C_{0f}^k, & k=m_f'+1, \dots, m_f, f=1, 2; \end{cases} \quad (I2) \\
 3) (W_y^*, A_y^{lk}) + \alpha_{yk}^{(0)*} &= \begin{cases} C_y^{lk}, & l=1, \dots, n_{ly}', k=1, \dots, m_0', y=1, \dots, \bar{N}; \\ C_y^{lk}, & l=n_{ly}'+1, \dots, n_{ly}, k=1, \dots, m_0', \\ & l=1, \dots, n_{ly}, k=m_0'+1, \dots, m_0, y=1, \dots, \bar{N}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для задачи (9):

$$\begin{aligned}
 1) (\tilde{W}_y^*, A_y^{lk}) + (\tilde{W}_y^*, A_0^{yk}) + \frac{1}{P_y} (\tilde{\alpha}_{y-1k}^{(0)*} - \tilde{\alpha}_{yk}^{(0)*}) &= \\
 &= \begin{cases} C_y^{lk} + C_{00}^k, & \text{если } l=1, \dots, n_{ly}', k=1, \dots, m_0', y=1, \dots, \bar{N}; \\ C_y^{lk} + C_{00}^k, & \text{если } l=n_{ly}'+1, \dots, n_{ly}, k=1, \dots, m_0', \\ & l=1, \dots, n_{ly}, k=m_0'+1, \dots, m_0, y=1, \dots, \bar{N}. \end{cases} \quad (I3) \\
 2) (\tilde{W}_y^*, \Phi_{y,f}^k) + \frac{1}{P_y} (\tilde{\alpha}_{y-1k}^{(f)*} - \tilde{\alpha}_{yk}^{(f)*}) &= \\
 &= \begin{cases} C_{0f}^k, & \text{если } k=1, \dots, m_f'; f=1, 2; y=1, \dots, \bar{N}; \\ C_{0f}^k, & \text{если } k=m_f'+1, \dots, m_f; f=1, 2; y=1, \dots, \bar{N}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Из (I2) и (I3) видно, что в оптимальный план включаются только те стратегии и тактические решения, для которых затраты, выраженные в оценках, покрываются получаемым эффектом, и отвергаются те, по которым затраты превышают эффект. При оценке технологий по культурам и видам животных в затраты включаются не только издержки непосредственно по данной l -й работе в y -й ситуации, но и затраты, связанные с осуществлением соответствующего априорного решения. Эти "общесезонные" затраты также выражаются в оценках соответствующей y -й ситуации: $(\tilde{W}_y^*, A_0^{yk})$. Кроме того, в оценку способа включается оценка соответствующей погодной ситуации для k -й культуры или k -го вида животных. При этом, если $\alpha_{yk}^{(0)*}$ (или $\frac{1}{P_y} (\tilde{\alpha}_{y-1k}^{(0)*} - \tilde{\alpha}_{yk}^{(0)*})$) больше нуля, то это означает, что данная ситуация для этой

культуры или вида животных является относительно благоприятной и позволяет образовать своего рода страховой фонд для покрытия затрат в относительно неблагоприятных ситуациях, когда для оправдания выбора необходимы "дотации" в размере абсолютных значений величин $\bar{v}_{\nu k}^{(0)*}$ (или $\frac{1}{p_{\nu}} (\bar{v}_{\nu-1k}^{(0)*} - \bar{v}_{\nu k}^{(0)*})$), когда они отрицательны. Таким образом, оценки $\{\bar{v}_{\nu k}^{(0)*}\}$ и $\{\bar{v}_{\nu k}^{(0)*}\}$ служат выравниванию экономических условий (рентабельности) возделывания культур или содержания животных по погодным ситуациям и носят характер локальных погодных рент. Нормализация оценок означает, что производственный объект "замыкается" относительно источников образования указанных выше страховых фондов: допускается лишь сбалансированное перераспределение средств между погодными ситуациями отдельно по каждому структурному элементу. Стоимостные балансы осуществляются лишь через систему "цен" $\{W_{\nu}^*\}$ или $\{\tilde{W}_{\nu}^*\}$, $\nu = \overline{1, N}$.

Из условий I) в (I2) и (I3) видно, что выгодность k -го структурного элемента производства (выращивания k -й культуры или содержания k -го вида животных) устанавливается лишь по оценкам тактических способов их выращивания или содержания в каждой из возможных ситуаций. По средним оценкам априорных решений об их выгодности судить нельзя. Итак, структура оценки l -го варианта технологии в оптимальном плане производства, полученном по стохастической модели, существенно отличается от структуры оценки этого способа в оптимальном плане из детерминированной модели. В первом случае учитывается влияние погодных ситуаций на дефицитность ресурсов (дифференциация по ситуациям вектора оценок $\{W_{\nu}^*\}$) и осуществляется корректировка эффективности способов с помощью погодных рент (векторы оценок $\{V_{\nu}^*\}$ или $\{\tilde{V}_{\nu}^*\}$). Поэтому использование стохастических оценок может принципиально изменить выводы относительно эффективности принимаемых решений. Отметим, что корректировка оценок способов (а следовательно, и принимаемых решений) может быть особенно существенной при большом размахе колебаний оценок по ситуациям, даже когда в среднем обеспечивается компенсация отрицательных погодных рент положительными.

4. Примеры использования стохастических оценок

Приведем типичные примеры, в которых отражается специфика использования стохастических оценок в экономическом анализе и построении механизма управления производством.

ПРИМЕР 1. Пусть k - номер, обозначающий новый сорт какой-либо культуры, который прошел предварительные испытания, так что известны характеристики его в виде опытных данных по урожайностям и затратам на I га в различных погодных ситуациях и при разных технологических схемах: $A_0^k, \{A_y^{lk}, l = 1, \overline{m_k}, y = 1, \overline{N}\}, C_{00}^k, C_y^{lk}$. Необходимо дать комплексную экономическую оценку сорта в системе других сортов культуры и других культур данного района.

Применив стохастические оценки факторов $\overline{W}_y^*, y = 1, \overline{N}$, рассчитаем величины: $u_y^{lk} = C_y^{lk} + C_{00}^k - (\overline{W}_y^* (A_0^{lk} + A_y^{lk}))$, $l = 1, \overline{m_k}; y = 1, \overline{N}$. В качестве локальных погодных рента можно принять: $u_k^* = \max_l u_y^{lk}$. Если теперь $\overline{U}_k = \sum_{y=1}^{\overline{N}} u_y^* p_y \geq 0$, то сорт можно считать экономически оправданным для данного района.

ПРИМЕР 2. Пусть k - номер вида животных определенной породы. Из практики и опытных данных известны характеристики способов содержания и кормления животных: $A^{lk} = (a_1^{lk}, a_2^{lk}, \dots, a_r^{lk}), C^{lk}$, $l \in L_k$, где L_k - множество способов содержания и кормления животных; a_s^{lk} , $s = 1, t$, - нормативы затрат кормов; a_s^{lk} , $s = t+1, \dots, r$, - нормативы затрат прочих ресурсов; C^{lk} - экономический эффект на I голову.

Предположим, что животноводство рассматривается в некоторой детерминированной модели сельхозпроизводства, из которой оптимальные ресурсы животноводства определены объемами b_s , $s = 1, r$. Обозначим искомое поголовье скота через $\{y_k^l\}$ и выпишем фрагмент задачи, относящийся к оптимизации животноводства:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \max \sum_{l \in L_k} y_k^l C^{lk}, \\ 2) \sum_{l \in L_k} a_s^{lk} y_k^l \leq b_s, \quad s = 1, \dots, r; \\ 3) y_k^l \geq 0, l \in L_k, \left(\sum_{l \in L_k} y_k^l = x_k \right), \end{array} \right\} \quad (I4)$$

x_k - планируемое общее поголовье.

Пусть из задачи (I4) определено оптимальное поголовье $Y_k^* > 0$, $l \in L'_k$, L'_k - множество оптимальных способов содержания и кормления. Обозначим через W_k^* вектор оценок производственных факторов задачи (I4). Тогда имеет место

$$\sum_{s=1}^T a_{s3} l_k^k W_{s3}^* + c^k = 0, \quad l \in L'_k.$$

В реальной жизни между тем будут возникать различные производственные ситуации и прежде всего случайные отклонения получаемых кормовых ресурсов $\{b_{\nu s}\}$ от объемов $\{b_s\}$, $s=1, \dots, T$, $\nu=1, \dots, N$. Это означает, что для ситуаций ν , менее благоприятных, чем учтенные в детерминированной модели, вообще говоря, $\bar{w}_{\nu s}^* \geq w_{\nu s}^*$, $s=1, \dots, T$. В этом случае будет справедливо: $\sum_{s=1}^T a_{s3} l_k^k \bar{w}_{\nu s}^* + c^k = u_{\nu} \leq 0$, $l \in L'_k$. Как и выше, в качестве приближенных значений локальных погодных рент можно взять:

$$u_{\nu k}^* = \max_{l \in L'_k} u_{\nu} l_k^k = u_{\nu} \bar{l}_{\nu k}. \quad \text{Если } \bar{u}_k = \sum_{\nu=1}^N u_{\nu k}^* p_{\nu} < 0,$$

то вопреки оптимальному решению по модели (I4) данная отрасль животноводства в этих условиях экономически неэффективна. В лучшем же случае множество технологий L'_k , определенное по детерминированной модели, не совпадает с оптимальным множеством технологий $\{\bar{l}_{\nu}\}$ или/и необходимо корректировать размеры отрасли $x_k^* = \sum_{l \in L'_k} Y_k^l$.

Обоснованная стратегия развития животноводства может быть определена только из стохастической модели, когда оптимальное соотношение темпов экстенсивного и интенсивного роста производства определяется с учетом влияния различных погодных ситуаций на кормопроизводство. Практика подтверждает, что наращивание поголовья скота без глубокого анализа динамики кормовой базы нередко приводит к недополучению продукции животноводства, ухудшению затратных показателей. Так, к 1980 году во всех категориях хозяйств Молдавии наблюдался рост поголовья крупного рогатого скота, в то же время обеспеченность его кормами в 1980 году составляла 88,2%. Следствием этого явилось снижение молочной и мясной продуктивности животных и рост затрат кормов на единицу продукции. Так, на 1 ц прироста живой массы скота было затрачено кормов в 1,7 раза больше норматива.

Как показали наши исследования, проблема выбора оптимального поголовья животных особенно актуальна для зон рискованного земледелия. Из табл. I видно, что в совхозе "Студенеск-

кий, расположенном в засушливой зоне Кулундинской степи, погодные ренты по крупному рогатому скоту колеблются в очень большом диапазоне. Установлено при этом, что в зонах рискованного земледелия эффективным "сглаживающим" мероприятием является оптимальная система резервирования кормов [6]. Своеобразной формой резервирования является создание страховых площадей долговременных культурных пастбищ с орошением.

ПРИМЕР 3. На основе стохастических оценок представляется возможным совершенствовать механизм стимулирования труда в сельском хозяйстве за счет конечных результатов. Известно, например, что в условиях коллективного подряда принципиальная трудность в построении справедливых и эффективных систем стимулирования состоит в том, что не удается четко отделить результат влияния погодного фактора от результата трудовых усилий коллектива^{ж)}. Из-за этого нередко на практике санкции или поощрения в большой степени определяются именно погодным фактором.

Применяемые в настоящее время в сельском хозяйстве системы доплат за конечную продукцию охватываются на устанавливаемые шкалы урожайности и соответствующие нормативные расценки в расчете на рубль основной тарифной оплаты (но не более 60%). Наиболее распространенными можно считать следующие варианты: а) когда расценка устанавливается по плановой урожайности и плановым затратам труда по тарифу; б) когда расценка устанавливается на основе средней за последние 3-5 лет фактической урожайности и плановому тарифу; в) когда берется шкала прогрессивных расценок, возрастающих с ростом урожайности.

Существенным общим недостатком всех этих принципов стимулирования является то, что ни в урожайности, ни в тарифной оплате труда, лежащих в основе определения расценок, не учитывается влияние погодного фактора. Поэтому стабильность расценок, которую обычно представляют как положительный момент механизма, как раз и не является оправданной. Нормативные расценки доплат должны быть дифференцированы по исходам погодных условий сельхозпроизводства: для каждого исхода своя шкала расценок.

^{ж)} При этом под результатом следует понимать не только прирост или снижение урожайности, но и экономию или перерасход средств: все это по отношению к какой-либо эталонной погодной ситуации.

Т а б л и ц а I

Нормальная система стохастических оценок для производственных условий некоторых районов Новосибирской области в рублях чистого дохода

	Ординский район	Чистоозерный район			Карасукский р-н, с-з Студеновский				
		исходы			исходы				
		В.	С.З.	О.З.	В.	С.З.	О.З.		
	$P=0,3$	$P=0,4$	$P=0,3$	$P=0,3$	$P=0,4$	$P=0,3$	$P=0,1$	$P=0,24$	$P=0,66$
1	104	1	-105	68	5	-73	-	-	-
2	$P_y \cdot U_{11}^*$ 6	10	-16	24	15	-39	184	-9	-175
3	$P_y \cdot U_{12}^*$ 113	-39	-74	81	-6	-75	238	12	-250
4	$P_y \cdot U_{13}^*$ -106	75	31	93	66	-159	-	-	-
5	$P_y \cdot U_{14}^*$ -308	248	60	-370	251	119	-	-	-
6	$P_y \cdot U_{15}^*$ -137	159	-22	-199	138	61	-	-	-
7	$P_y \cdot U_{16}^*$ -	-	-	-	-	-	712	87	-799
8	$P_y \cdot U_{17}^*$ -	-	-	-	-	-	389	-21	-368
9	W_{17}^* 6,1	2,0	35,9	0	0	27,6	0	2,5	29,0
10	W_{21}^* 0,7	4,1	62,0	0	0	29,0	0	3,2	32,0

П р и м е ч а н и е . В - влажный год, С.З. - среднезасушливый, О.З. - острозасушливый. От культур на поливе наибольшую отдачу в чистом доходе имеют в среднезасушливый год, когда складывается наиболее благоприятное соотношение между дополнительным урожаем и дополнительными затратами на орошение.

Различные условия приложения труда и его результативность в зависимости от погодной ситуации отражают стохастические оценки трудовых ресурсов: $\{W_{y,t}^*\}$, $y=1, N$. Они показывают тот дополнительный эффект (прирост конечного результата производства, выраженного в целевой функции: валовой продукции, прибыли, чистого дохода и т.п.), который можно получить от дополнительных трудовых усилий именно в данной погодной ситуации. Поэтому такие оценки можно взять за основу при определении шкал расценок для доплат за конечные результаты производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЮДИН Д.Б. Двойственность в стохастическом программировании. - Экономика и мат. методы, 1969, т.5, вып.2, с.280-284.
2. ГОЛЫШТЕЙН Е.Г., ЮДИН Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Сов. радио, 1966.
3. Dantzig G., Madansky A. On the solution of two-stage linear programs under uncertainty. - Proc. Fourth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability. Berkeley. V.1, 1961.
4. ЕРМОЛЪЕВ Ю.М., ЯСТРЕМСКИЙ А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. - М.: Наука, 1979, с.122-150.
5. БИМОВ В.М. Оптимальные оценки в условиях неопределенности. - Экономика и мат. методы., 1970, т.6, вып. 3, с.464-469.
6. КАРДАШ В.А. Экономическая оптимизация в орошении. - В кн.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч.П. Новосибирск, 1972 .
7. КАРДАШ В.А. Модели управления производственно-экономическими процессами в сельском хозяйстве. - М.: Экономика, 1981.
8. КАРДАШ В.А. На основе линейно-программных моделей. - Экономика сельского хозяйства, 1979, №10, с.35-39.
9. КАРДАШ В.А. Об одном подходе к постановкам стохастических задач оптимизации производства. - Экономика и мат. методы, 1977, т.13, вып. 6, с.312-316.

- Ю. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Несколько лекций по линейному программированию. Новосибирск, 1965, с.36-37.
- II. ЮДИН Д.Б., ГОЛЫШТЕЙН Е.Г. Линейное программирование. - М.: Физматгиз, 1963, с.151-168.

Поступила в ред.-изд. отдел
29.12.1983 г.