УДК 5I9.853

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

Х.Кирстен, Р.Тихачке

Многие задачи математической физики (из теории упругости, теории упруго-пластических сред, гидродинамики и др. областей) допускают формулировку в виде вариационных неравенств [I]. В такой постановке задача сводится к отысканию условного экстремума некоторого функционала. Практическое использование алгоритмов математического программирования, как правило, предполагает сведение этих задач к конечномерным. Численному решению вариационных неравенств в последнее время посвящено значительное число работ (см. библиографию в [2]). Но часто оказывается, что общие методы математического программирования для решения таких задач являются неэффективными, так как они далеко не всегда учитывают специфику этих задач.

В данной работе рассмотрен специальный алгоритм метода возможных направлений, который использует структурные особенности решаемых задач. С помощью принципа максимума для так называемой задачи с препятствием [I-2] удается доказать некоторые свойства монотонности алгоритма и в конечном счете сходимость метода. Контрольные примеры иллюстрируют поведение алгоритма и позволяют судить о его эффективности.

I. Постановка задачи и предварительные сведения

Рассмотрим вначале эллиптическую краевую задачу:

$$\begin{aligned} Lu(x)&=f(x) \quad \forall x\in\Omega, \\ u(x)&=\mu(x) \quad \forall x\in\Gamma, \end{aligned} \tag{I.I}$$

где

$$\Omega\subset R^m,\ \Gamma=\partial\Omega,\ \bar\Omega=\Omega\cup\Gamma,\ m\geq 1,\ x=(x_1,\dots,x_m),$$

$$Lu\equiv -div(k\,grad\,u)+qu=-\sum \partial/\partial x_i\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+$$
$$+q(x)u(x),\quad 0<k_0\leq k(x),\ 0\leq q(x)\ \forall x\in\bar\Omega,$$

причем Ω - ограниченная область с достаточно гладкой (кусочно) границей Γ. Если функции k, q, f, μ удовлетворяют условиям $k\in C^1(\bar\Omega), q\in C(\bar\Omega), f\in C(\bar\Omega), \mu\in C(\Gamma)$ и для μ имеется $W_2^1(\Omega)$ -расширение, то задача (I.I) имеет единственное обобщенное решение $u\in W_2^1(\Omega)$[3].

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Как известно, для эллиптического дифференциального оператора L справедлив следующий принцип максимума: если $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar\Omega)$ удовлетворяет условиям

(i) $u(x)\leq 0\quad \forall x\in\Gamma,$

(ii) $Lu(x)\leq 0\quad \forall x\in\Omega,$

то

$$u(x)\leq 0\ \forall x\in\bar\Omega.$$

Расширение принципа максимума для функции $u\in C^0(\bar\Omega)$ с кусочно-непрерывными производными можно найти в [4,5].

Обобщенное решение $u\in W_2^1(\Omega)$ задачи (I.1) удовлетворяет принципу минимума энергии [3]:

$$J(u)=min\{J(v):v\in M\},\tag{I.2}$$

где

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v),$$
$$a(v,w)=\int_\Omega\{\sum k(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}+q(x)vw\}dx,$$
$$(f,v)=\int_\Omega fv\,dx,\ M=\{v\in W_2^1(\Omega):v/_\Gamma=\mu\},$$

а $v/_\Gamma$ означает след элемента v на Γ. Обобщенное решение задачи (I.I) удовлетворяет тождеству:

$$u\in M: a(u,v)=(f,v)\quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).\tag{I.3}$$

В дальнейшем ищем минимум функционала на множестве M при дополнительном условии

$$u(x)\geq \psi(x)\quad \forall x\in\bar\Omega,\tag{I.4}$$

т.е. на

$$K=\{v\in W_2^1(\Omega): v(x)\geq\psi(x)\ \forall x\in\Omega, v(x)=\mu(x)\ \forall x\in\Gamma\}$$

решается задача

$$J(u)=\min\{J(v): v\in K\}. \qquad (I.5)$$

При этом предполагается, что $f(x)\le 0\ \forall x\in\Omega$ и $\psi\in C^2(\bar\Omega)$ – заданная функция, удовлетворяющая условию $\psi(x)\le\mu(x)\ \forall x\in\Gamma$. Требование неположительности f на самом деле не ограничивает общности.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Задача (I.I) описывает прогибание мембраны в области Ω. В этом случае дополнительное условие (I.4) означает, что прогибание ограничено твердым препятствием. Такая задача называется в литературе задачей с препятствием.

При сделанных выше предположениях относительно функций ψ и μ множество K является непустым, замкнутым в $W_2^1(\Omega)$ и выпуклым.

Решение экстремальной задачи (I.5) можно характеризовать следующим образом.

ТЕОРЕМА I.I [6]. Функция $u\in K$ представляет собой решение задачи (I.5) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет вариационному неравенству

$$u\in K: a(u, v-u)\ge (f, v-u)\quad \forall v\in K. \qquad (I.6)$$

ТЕОРЕМА I.2 [7]. При сделанных предположениях задачи (I.5) и (I.6) имеют единственное решение.

ЗАМЕЧАНИЕ I.3. Решение $u\in W_2^1(\Omega)$ задачи (I.5) определяет разбиение области Ω на две части:

$$\Omega^-=\{x\in\Omega: u(x)=\psi(x)\},$$

$$\Omega^+=\{x\in\Omega: u(x)>\psi(x)\}=\Omega\setminus\Omega^-,$$

и множество $\Gamma_0=\bar\Omega^-\cap\bar\Omega^+$ называется свободной границей. Если решение u задачи (I.5) достаточно гладкое, тогда в области Ω^+ имеет место равенство $Lu=f$.

Далее в этом разделе излагается известный аппарат, осуществляющий конечномерную аппроксимацию задачи (I.5). Получающееся при этом семейство конечномерных пространств V_h (h – некоторый параметр) приближает бесконечномерное пространство

$V=W_2^1(\Omega)$ и аналогично $K_h\subset V_h$ приближает множество $K\subset V$. В конкретном случае применяем метод конечных элементов. Для аппроксимации пространства $V=W_2^1(\Omega)$ достаточно применять линейные элементы (см. [8]).

Рассмотрим разбиение T_h области Ω на некоторое семейство подобластей $T\in T_h$ (отрезки для $m=1$, треугольники для $m=2$ и тетраэдры для $m=3$), обладающих следующими свойствами:

а) $mes\, T\leq h \quad \forall T\in T_h,$

б) $T\subset \Omega \quad \forall T\in T_h,$

в) $int\, T\cap int\, T'=\phi \quad \forall T, T'\in T_h, T\neq T',$

г) существует $\theta_0>0: \theta_0\leq\theta(T) \ \forall\theta(T), \forall T\in T_h$, где $\theta(T)$ - угол элемента $T\in T_h\ (m>1)$;

д) $\Omega_h=\bigcup\limits_{T\in T_h} T\to\Omega$ в следующем смысле: для любого компакта $E\subset\Omega$ при достаточно малых h справедливо включение $\Omega_h\supset E$.

Пространство V_h ассоциируется с разбиением T_h следующим образом: на Ω_h определяются кусочно-линейные базисные функции w_i , обладающие свойствами

(i) w_i - аффинная функция на каждом $T\in T_h$;

(ii) $w_i(x_i)=1, w_i(x_j)=0 \quad \forall j,\ i\neq j.$

Здесь $\{x_i: i=1(1)n\}\equiv P$ - множество всех вершин элементов $T\in T_h$, V_h - пространство, натянутое на все w_i :

$$V_h=span\{w_1,\dots,w_n\}.$$

Включение $v_h\subset V_h$ означает, что

$$v_h(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i(x).$$

Отсюда вытекает, что $\alpha_i=v_h(x_i)$. Для построения множества K_h применяем внутреннюю аппроксимацию:

$$K_h=\{v_h\in V_h: v_h(x_i)\geq\psi(x_i) \quad \forall x_i\in P,$$
$$v_h(x_i)=\mu(x_i) \quad \forall x_i\in\Gamma\}.$$

Множество K_h аппроксимирует K так, что $K_h\subset V_h, K_h\neq\emptyset \ \forall h$, замкнуто и выпукло в V_h, но при этом не предполагается, что $K_h\subset K$.

Таким образом, задачи (I.5) и (I.6) порождают конечномерную экстремальную задачу

$$u_h \in K_h : J(u_h) = \min\{J(v_h) : v_h \in K_h\} \qquad (I.7)$$

и конечномерное вариационное неравенство

$$u_h \in K_h : a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \;\; \forall v_h \in K_h, \qquad (I.8)$$

которые также эквивалентны. Относительно погрешности аппроксимации задач (I.5) и (I.6) с помощью (I.7) и (I.8) при $m=\ell$ и $f=const$. справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА I.3 [2]. Пусть u - единственное решение задачи (I.5) или (I.6). Тогда существует единственное решение u_h задачи (I.7) или (I.8) и имеет место

$$u_h \to u \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

$$\|u_h - u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\sqrt{h}.$$

Это означает, что при достаточно малом h решения задач (I.7) и (I.8) являются достаточно хорошей аппроксимацией решений задач (I.5) и (I.6).

2. Решение задачи (I.7) методом возможных направлений

Для дальнейшего исследования переформулируем конечномерную экстремальную задачу (I.7). Функцию $v_h \in V_h$ можно единственным образом отождествить с вектором $v \in R^n$:

$$v_h := (v_h(x_1), \ldots, v_h(x_n))^T := (v_1, \ldots, v_n)^T := v.$$

Введем обозначения:

$$\varphi(x_i) := \varphi_i, \; \mu(x_i) := \mu_i, \; f_i := (f, w_i);$$

$$f := (f_1, \ldots, f_n)^T, \; a_{ij} := a(w_i, w_j), \; A := \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n};$$

$$I := \{1, 2, \ldots, n\}, \; I_\Gamma := \{i \in I : x_i \in \Gamma\}.$$

Тогда задача (I.7) в пространстве R^n имеет вид:

$$u \in K_n : J(u) = \min\{J(v) : v \in K_n\}, \qquad (2.I)$$

где $J(v) = \frac{1}{2}\langle v, Av\rangle - \langle f, v\rangle$; $K_n = \{v \in R^n : v_i \geq \varphi_i \;\forall i \in I,\; v_i = \mu_i \;\forall i \in I_\Gamma\}$,

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ - символ скалярного произведения.

При этом матрица A положительно определена и, следовательно, функционал J является сильно выпуклым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. Для решения u экстремальной задачи (2.I) имеем

$$Au|_i = f_i \quad \forall i \in I \setminus I(u),$$

где $I(u) = \{i \in I : u_i = \varphi_i\}$ (сравнить с замечанием I.3).

Решение выпуклой квадратичной задачи (2.I) с линейными ограничениями осуществляется с использованием метода возможных направлений. В точке v^k строится допустимое направление r^k для задачи (2.I), на котором целевая функция убывает, и на этом направлении определяется следующая точка v^{k+1}.

Во многих реализациях методов возможных направлений линеаризуют задачу спуска в точке v^k и используют л о к а л ь н о наилучшее направление спуска (см. [9–II]). Можно показать, что при использовании для определения направления спуска расширенных субдифференциалов эти алгоритмы сходятся линейно. Чтобы получить более быструю сходимость метода, используем задачу, которая определяет г л о б а л ь н о наилучшее (в определенном смысле) направление спуска. Для этого направление спуска в точке определяется следующим образом:

$$r := \bar{v}^k - v^k,$$

где $\bar{v}^k$ – решение системы

$$\begin{aligned} A\bar{v}^k|_i &= f_i \quad \forall i \notin I_\varepsilon(v^k), \\ \bar{v}^k_i &= \varphi_i \quad \forall i \in I_\varepsilon(v^k), \\ \bar{v}^k_i &= \mu_i \quad \forall i \in I_r, \end{aligned} \tag{2.2}$$

а

$$I_\varepsilon(v^k) = \{i \in I \setminus I_r : v^k - \varphi_i \le \varepsilon\}, \; \varepsilon > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Система (2.2) представляет собой линейную систему уравнений размерности $n - card(I_r \cup I_\varepsilon(v^k))$.

ТЕОРЕМА 2.I. Н а п р а в л е н и е $r^k = \bar{v}^k - v^k$, г д е $\bar{v}^k$ о п р е д е л е н о   с о г л а с н о   (2.2), п р е д с т а в л я е т   с о б о й   в   т о ч к е $v^k \in K_n$ д о п у с т и м о е   и   г л о б а л ь н о - н а и л у ч ш е е   н а п р а в л е н и е   с п у с к а   н а   м н о ж е с т в е

$$\bar{K}_n(v^k)=\{v\in R^n: v_i=\psi_i \ \ \forall i\in I_\varepsilon(v^k), v_i=\mu_i \ \ \forall i\in I_r\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) В направлении $v^k+\lambda r^k$ имеем:

для $i\in I_r: v_i^k+\lambda r_i^k=v_i^k+\lambda(\mu_i-\mu_i)=v_i^k$;

для $i\in I_\varepsilon(v^k): v_i^k+\lambda r_i^k=v_i^k+\lambda(\psi_i-v_i^k)\geq\psi_i$ при $\lambda\leq 1$;

для $i\notin I_\varepsilon(v^k): v_i^k+\lambda r_i^k=v_i^k+\lambda(\bar{v}_i^k-v_i^k)\geq\psi_i$ при

$\lambda\leq(v_i^k-\psi_i)/(-r_i^k), r_i^k<0.$

Следовательно, $v^k+\lambda r^k\in K_n$ для

$$\lambda\leq\min_{i\notin I_\varepsilon(v^k)}\left\{\frac{\psi_i-v_i^k}{r_i^k}:r_i^k<0\right\}:=\lambda_0.$$

Это значит, что r^k - допустимое направление в точке v^k для всех $\lambda\in(0,\lambda_0)$.

б) Из $\dfrac{\partial J}{\partial v_i}=Av|_i-f_i$ следует, что

$$\frac{\partial J(\bar{v}^k)}{\partial v_i}=A\bar{v}^k|_i-f_i=0 \quad \forall i\notin I_\varepsilon(v^k).$$

Таким образом,

$$J(\bar{v}^k)=\min\{J(v):v\in\bar{K}_n(v^k)\},$$

и $r^k=\bar{v}^k-v^k$ - глобально-наилучшее направление спуска на множестве $\bar{K}_n(v^k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Направление r^k представляет собой локально-наилучшее направление спуска регулярного функционала

$$J_{A^{-1}}(v)=\frac{1}{2}\langle v,Av\rangle_{A^{-1}}-\langle f,v\rangle_{A^{-1}}=\frac{1}{2}\langle v,v\rangle-\langle A^{-1}f,v\rangle$$

в подпространстве $\bar{K}_n(v^k)$. Из положительной определенности матрицы A следует, что скалярные произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ определяют спектрально-эквивалентные нормы. Для вычисления итерационной точки $v^{k+1}:=v^k+\lambda^k r^k$ используем наименьшее положительное значение λ, удовлетворяющее условию

$$J(v^{k+1})=\min\{J(v^k+\lambda r^k):\lambda\geq0, v^k+\lambda r^k\in K_n\}.$$

ТЕОРЕМА 2.2. Имеет место равенство $\lambda^k=\min\{1,\lambda_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы $v^k+\lambda r^k\in K_n$, должно быть

$$\lambda \le \lambda_0 = \min_{i \notin I_\varepsilon(v^k)} \left\{ \frac{v_i - v_i^k}{r_i^k} : r_i^k < 0 \right\}.$$

С другой стороны, $J(\bar v^k) = \min\{J(v^k + \lambda r^k) : \lambda \ge 0\}$, где $\bar v^k = v^k + r^k$. С учетом выпуклости J отсюда следует, что $\lambda^k = \min\{\lambda_0, 1\}$.

Итерационная последовательность $\{v^k\}$ обладает следующими свойствами.

ЛЕММА 2.1. Для последовательности $\{v^k\}$, построенной приведенным выше алгоритмом, имеем

(i) $J(v^{k+1}) < J(v^k)$ $\forall k$;

(ii) $I_\varepsilon(v^{k+1}) \supset I_\varepsilon(v^k)$ $\forall k$;

(iii) если $I_\varepsilon(v^{k+1}) = I_\varepsilon(v^k)$, то $v^{k+1} = v^{k+\ell}, \ldots$;

(iiii) если $I(v^k) = I(u)$, то $v^{k+1} = u$.

Естественно, нельзя гарантировать сходимость этого алгоритма к искомому решению при любой начальной точке v^0. Однако при выполнении обобщенного принципа максимума (см. замечание I.I) можно доказать некоторые свойства монотонности последовательностей $\{v^k\}$ и $\{\bar v^k\}$, которые обеспечивают сходимость алгоритма к $\arg\min_{v \in K_n} J(v)$ при специальном выборе v^0.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть начальная точка v^0 выбрана так, что

$$A v^0 = 0 \quad \text{и} \quad v^0 \in K_n \tag{2.3}$$

Тогда

(i) $A v^k|_i \ge f_i$ $\forall i \in I \setminus (I_r \cup I(v^{k-1}))$, $\forall k$;

(ii) $v^k \ge u$ $\forall k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по итерационным шагам. Из линейности отображения A и предположения (2.3) вытекает

$$A v^1|_i = A(\lambda^1(\bar v^0 - v^0) + v^0)|_i = \lambda^1 A \bar v^0|_i + (1-\lambda^1) A v^0|_i =$$
$$= \lambda^1 A \bar v^0|_i = \lambda^1 f_i \ge f_i \quad \forall i \in I \setminus (I_r \cup I(v^0)).$$

При $v = u - v^1$ очевидно, что

$$v_i = 0 \ \forall i \in I_r \quad \text{и} \quad v_i \le 0 \ \forall i \in I(u).$$

Из замечания 2.I следует, что для всех $i \in I \setminus (I_r \cup I(v))$:

$$Av|_i=Au|_i-Av^1|_i=f_i-f_i\lambda^1=(1-\lambda^1)f_i\le 0.$$

Отсюда на основании обобщенного принципа максимума имеем

$$v_i\le 0 \quad \forall i\in I\setminus I(u),$$

и тем самым $u\le v^1$.

Пусть теперь утверждение теоремы имеет место для $k=l-1$, т.е.

$$Av^{l-1}|_i\ge f_i \quad \forall i\in I\setminus(I_r\cup I(v^{l-2})) \text{ и } v^{l-1}\ge u.$$

Тогда

$$Av^l|_i=A(\lambda^l(\bar v^{l-1}-v^{l-1}))|_i=\lambda^l A\bar v^{l-1}|_i+(1-\lambda^l)Av^{l-1}|_i=$$
$$=\lambda^l f_i+(1-\lambda^l)Av^{l-1}|_i\ge$$
$$\ge\lambda^l f_i+(1-\lambda^l)f_i=f_i \quad \forall i\in I\setminus(I_r\cup I(v^{l-1})),$$

поскольку $I(v^{l-1})\supset I(v^{l-2})$. При $v=u-v^l$ имеем

$$v_i=0 \quad \forall i\in I_r,\ v_i\le 0 \quad \forall i\in I(u).$$

Если $i\in I\setminus(I_r\cup I(u))$, то

$$Av|_i=Au|_i-Av^l|_i=f_i-Av^l|_i\le f_i-f_i=0.$$

Тем самым обобщенный принцип максимума обеспечивает, что

$$v_i\le 0 \quad \forall i\in I\setminus I(u)$$

и, значит, $v\le 0$, т.е. $u\le v^l$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Имеет место включение

$$I(v^k)\subset I(\bar u) \quad \forall k.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Справедливы следующие неравенства:

$$Av^k|_i\le Av^{k-1}|_i \quad \forall i\in I\setminus(I_r\cup I(v^{k-1})) \quad \forall k.$$

ЛЕММА 2.2. Если v^0 выбрано согласно (2.3), то $v^k\le v^{k-1}$ $\forall k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $v=v^k-v^{k-1}$ имеем $v_i=0$ $\forall i\in I_r\cup$ $\cup I(v^{k-1})$ и на основании следствия 2.2

$$Av|_i\le 0 \quad \forall i\in I\setminus(I_r\cup I(v^{k-1})).$$

Утверждение леммы следует теперь из обобщенного принципа максимума.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Аналогично можно показать, что при указанном выборе начальной точки v^0 справедливы неравенства

$$\bar{v}^{k+1} \geq v^k \ \forall k, \ \bar{v}^k \leq 0 \ \forall k.$$

Ввиду конечности множества I, утверждение (iii) леммы 2.I должно выполняться для некоторого индекса k, при этом $\bar{v}^k = v^{k+1}$.

Теорема 2.3 и замечание 2.4 позволяют доказать следующее утверждение о конечности алгоритма.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть v^0 выбрано согласно (2.3). Тогда существует такой индекс k_0, что $v^{k_0+1} = \bar{v}^{k_0} = u$, т.е. за конечное число шагов получаем решение u задачи (2.I).

Фактически для окончания процесса используется критерий

$$\|r^k\| = \|\bar{v}^k - v^k\| \leq \varepsilon.$$

При этом описанный выше алгоритм приобретает следующую конкретную форму.

АЛГОРИТМ. ШАГ I. Выбрать $v^0 \in K_n, Av^0 = 0$; положить $k := 0$, $\varepsilon > 0$.

ШАГ 2. Вычислить направление $r^k = \bar{v}^k - v^k$, где $\bar{v}^k$ — решение следующей задачи спуска:

$$A\bar{v}^k|_i = f_i \quad \forall i \notin I_\varepsilon(v^k),$$

$$\bar{v}_i^k = \varphi_i \quad \forall i \in I_\varepsilon(v^k),$$

$$\bar{v}_i^k = \mu_i \quad \forall i \in I_r,$$

причем $I_\varepsilon(v^k) = \{i \in I \setminus I_r : v_i^k - \varphi_i \leq \varepsilon\}$.

ШАГ 3. Если $\|r^k\| \leq \varepsilon$, то v^k — искомое приближенное решение задачи; в противном случае перейти к шагу 4.

ШАГ 4. Вычислить величину параметра λ^k:

$$\lambda^k = \min\{1, \min_{i \in I_\varepsilon(v^k)} \{\frac{\varphi_i - v_i^k}{r_i^k} : r_i^k < 0\}\}.$$

Положить $v^{k+1} := v^k + \lambda^k r^k$, $k := k+1$, и перейти к шагу 2.

3. Вычислительный эксперимент

Описанный выше алгоритм метода возможных направлений был запрограммирован на ЭВМ ЕС 1040 и испытан для некоторых примеров с различными параметрами n и ε. Приведем некоторые результаты расчета двух простых, но характерных задач типа (I.5).

ПРИМЕР 3.I. $\Omega=(0,1)\subset R^1$, $Lu=-u''$, $f(x)=-2$, $\psi(x)=0$, $u(0)=0$, $u(1)=1/9$.

Точное решение:

$$u(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,2/3],\\ (x-2/3)^2 & x\in(2/3,1].\end{cases}$$

Начальной точкой v^0 является $v^0(x)=x/9$.

Область Ω была дискретизирована с помощью n равноотстоящих опорных точек, $h=\frac{1}{n+1}$. Решение системы линейных уравнений (2.2) осуществлялось методом быстрого исключения по Гауссу. В следующей таблице приведено число итераций для различных параметров n и ε, при которых были получены приближенные решения задачи (2.I):

n \ ε	0,00I	0,000I	0,0000I
24	9	I8	I8
49	9	30	34
99	8	26	68
499	8	22	72
999	8	22	66

ПРИМЕР 3.2. Часто рассматриваемая в литературе задача упруго-пластического кручения цилиндрического стержня с поперечным сечением Ω, как известно [2], допускает следующую вариационную постановку:

$$\min\{J(v): v\in K_1\},\ K_1=\{v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega): |v(x)|\le\rho(x,\Gamma)\ \forall x\in\Omega\},$$

где $\rho(x,\Gamma)$ - расстояние от точки x до границы $\Gamma=\partial\Omega$.

Если $\Omega=\{x\in R^2: r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}<\frac{1}{2}\}$ и $f=-10$, то точным решением задачи (3.I) является

$$u(x)=\begin{cases}-0{,}5+r & \text{при } 0{,}2\le r\le 0{,}5 \text{ (область пластичности)};\\ -0{,}4+2{,}5r^2 & \text{при } 0\le r\le 0{,}2 \text{ (область упругости)}.\end{cases}$$

В качестве начального приближения при расчетах выбиралось $u^0=0$.

При значении параметра ε =0,00I (см. (2.2)) получены следующие результаты:

число дискретизирующих точек n	число итераций	время вычислений [sec]
I09	9	I3
397	I6	72
I5I9	I4	I97

Приведенные примеры иллюстрируют вывод, полученный при анализе значительного числа экспериментов:

I) число итераций слабо зависит от числа точек дискретизации;

2) чтобы получить число итераций возможно меньшим и одновременно обеспечить точность решения, определяемую с точностью аппроксимации, нужно выбрать ε согласованно с порядком аппроксимации ($\varepsilon\approx\sqrt{h}$ в двумерном случае);

3) в случае $m=3$ при вычислении матрицы A и решении системы линейных равенств (2.2) возникают известные вычислительные эффекты многоразмерного случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. DUVAUT G., LIONS J.L. Inequalities in mechanics and physics.-Berlin-Heidelberg-New York:Springer Verlag,1976.

2. ГЛОВИНСКИ Р.Г., ЛИОНС Ж.Л., ТРЕМОЛЬЕР Р. Численное исследование вариационных неравенств. - М.: Мир, 1979.

3. МИХЛИН С.Г. Курс математической физики.- М.: Наука, 1968.
4. Natterer F., Werner B. Verallgemeinerung des Maximumprinzips für den Laplace-Operator. - Numer. Math., 1974, N22, p. 149-156.
5. WERNER B. Monotonie ind finite Elemente bei elliptischen Differentialgleichungen.- ISNM 27, Basel und Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1975, p. 309-329.
6. ЛИОНС Ж.Л. Некоторые методы в решении краевых задач. - М.: Наука. 1968.
7. LIONS J.L. STAMPACCIA G. Variational inequalities.- Comm. pure appl. math., 1967, N 20, p.493-519.
8. СТРЕНГ Т., ФИКС Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977.
9. KIRSTEN H. Semi-infinite Optimierungsaufgaben und Variationsungleichungen. - Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt, 1981.
10. TICHATSCHKE R., KIRSTEN H. Verfahren der zulässigen Richtungen zur Lösung von Variationsungleichungen.- Proceedings, 27. IWK, Ilmenau, 1982.
11. TICHATSCHKE R., SCHWARTZ B. Eine Methode der zulässigen Richtungen zur Lösung des linearen, kontinuierlichen Tschebyscheff-Problems.- Optimization, 1982, N 4, p.501-511.

Поступила в ред.-изд. отдел
7.06.1983 г.