УДК 519.852.64:67

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ В СИСТЕМЕ С КЛЕТОЧНЫМ РАЗБИЕНИЕМ МАТРИЦЫ

Р.А.Звягина

Невырожденная матрица $A[M,N]$, связанная с системой

$$A[M,N]\cdot x[N] = b[M], \qquad (I)$$

преобразуется в блочно-треугольную матрицу $\tilde{C}[M,N]$ на основе некоторого ее разбиения на полосы - по горизонтали или по вертикали. Если при этом используются ортогональные преобразования типа отражений, то клетки, пересекаемые в каждой полосе главной диагональю, можно сделать двухдиагональными. Тогда возмущения, вносимые из-за ошибок округления в полосы матрицы $\tilde{C}[M,N]$ и в вектор $\tilde{g}[M]$ преобразованной системы (I), т.е. системы

$$\tilde{C}[M,N]\cdot\tilde{z}[N] = \tilde{g}[M], \qquad (2)$$

оцениваются по аналогии с известной схемой [I], применяемой в условиях преобразования всей матрицы $A[M,N]$ в двухдиагональную.

На этой основе в случае разбиения матрицы $A[M,N]$, например на горизонтальные полосы, получаются два различных способа оценки вектора $\tau[N] = \tilde{z}[N] - z[N]$ - отклонения $\tilde{z}[N]$ от решения невозмущенной системы

$$C[M,N]\cdot z[N] = g[N].$$

Первый из них опирается на блочно-мультипликативное представление матрицы $\tilde{C}[M,N]$, а второй - на рекуррентные соотношения погрешностей в подсистемах, к которым сводится система (2). С другой стороны, если вместо системы (I) рассматривается транспонированная система

$$x'[M]\cdot A[M,N] = b'[N] \qquad (3)$$

и соответствующая ей преобразованная система

$$\tilde{y}[M]\cdot \tilde{C}[M,N] = \tilde{d}[N] \qquad (4)$$

при том же самом разбиении матрицы $A[M,N]$, то блочно-мультипликативный способ оценки применим как к системе (2), так и к системе (4). Отличие состоит лишь в оценке векторов $h[M]$ и $h'[N]$ – возмущений, вносимых в векторы $\tilde{g}[M]$ и $\tilde{d}[N]$ соответственно. Для рекуррентного же способа оценки вектора $z'[M]=\tilde{y}[M]-y[M]$ – отклонения $\tilde{y}[M]$ от решения невозмущенной системы

$$y[M]\cdot C[M,N] = d[N]$$

– потребовалось бы разбить матрицу $A[M,N]$ на вертикальные полосы и привести ее к блочно-треугольному виду симметричным образом. Это значит, что в вычислительных процессах при заданном разбиении матрицы $A[M,N]$ для одного из векторов $z[N]$ или $z'[M]$ можно получить две, вообще говоря, различных оценки и выбрать лучшую. Ввиду симметричности того и другого метода относительно характера разбиения матрицы на полосы здесь рассматривается в основном разбиение по горизонтали (рис. I).

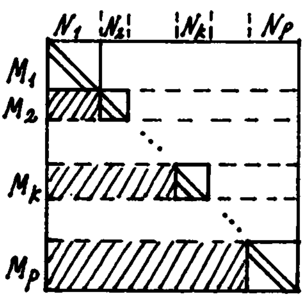

Рис. I

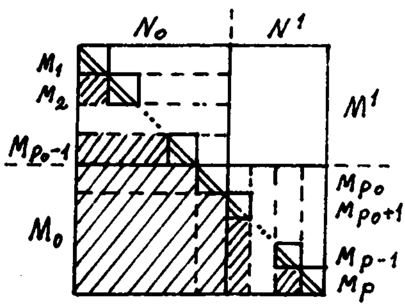

Рис. 2

Поскольку описываемые методы вычисления оценок предназначаются для специальных (блочных) задач линейного программирования [2,3], то следует предполагать, во-первых, что характер разбиения отдельных частей в матрице $A[M,N]$ не произвольный, а диктуется ее блочной структурой таким образом, чтобы отражения, в частности, не нарушали блочной диагональности некоторых подматриц и, во-вторых, что наряду с системой (2) всегда решается система (4). В п.4 приводится пример комбинированного разбиения (рис.2).

I. Оценка возмущений в триангуляризованной системе. Пусть матрица $A[M,N]$ порядка m разбита на полосы $A[M_k,N]$, $k=1,2,\dots,p$, в соответствии с разбиением

$$M_k=\{\bar{m}_{k-1}+1,\bar{m}_{k-1}+2,\dots,\bar{m}_k\},\ \bar{m}_k=\bar{m}_{k-1}+m_k,\ 1\le k\le p, \qquad (5)$$

множества M номеров строк при $\bar{m}_0=0$. Полагая $C^0[M,N]=$ $=A[M,N]$, предположим, что для некоторого $k\geq 1$ определена блочно-треугольная матрица

$$C^{(k-1)}[M,N]=P^{(k-1)}[M,M]\cdot A[M,N]\cdot Q^{(k-1)}[N,N] \qquad (6)$$

с двухдиагональными подматрицами

$$C^{(k-1)}[M_i,N_i],\quad i=1,2,\dots,k-1,$$

и подматрицей

$$C^{(k-1)}[\tilde{M}_k,\tilde{N}_k],\quad \tilde{M}_k=M\setminus\Big(\bigcup_{i<k}M_i\Big),\ \tilde{N}_k=N\setminus\Big(\bigcup_{i<k}N_i\Big),$$

на главной диагонали. Для замены $k-1$ на k достаточно умножить равенство (6) слева и справа соответственно на матрицы $P_k[M,M]$ и $Q_k[N,N]$, которые отличаются от единичных разве лишь подматрицами $P_k[M_k,M_k]$ и $Q_k[\tilde{N}_k,\tilde{N}_k]$ - ортогональными преобразованиями, приводящими прямоугольную вырезку $C^{(k-1)}[M_k,\tilde{N}_k]$ к двухдиагональному виду [4]:

$$C^{(k)}[M_k,\tilde{N}_k]=[\,C[M_k,N_k]\ \vdots\ 0\,],\ N_k\subset\tilde{N}_k.$$

Другими словами, полоса

$$C[M_k,N]=C^{(k)}[M_k,N]=P_k[M_k,M_k]\cdot A[M_k,N]\cdot Q^{(k)}[N,N]$$

при любом $k=1,2,\dots,p$ получается из полосы $A[M_k,N]$ с помощью $\ell_k=\bar{m}_k+m_k-2$ элементарных отражений: $\bar{m}_k$ правосторонних и m_k-2 левосторонних.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Для приведения матрицы $A[M,N]$ к блочно-треугольному виду на основе заданного разбиения N_k, $k=1,2,\dots,p$, множества N достаточно применить описанный выше процесс к матрице $A^T[N,M]$, поменяв ролями множества M и N, а затем транспонировать полученную блочно-треугольную матрицу

$$C'[N,M]=P'[N,N]\cdot A^T[N,M]\cdot Q'[M,M]$$

с двухдиагональными клетками $C'[N_k, M_k]$, $k=1,2,\ldots,p$, на главной диагонали.

Из-за неизбежных ошибок округления на ЭВМ элементарные отражения совершаются неточно, и вместо матрицы $C[M_k, N]$ получается некоторая матрица

$$\tilde{C}[M_k, N] = C[M_k, N] + H[M_k, N]$$

с возмущением $H[M_k, N]$. По аналогии с упомянутой выше схемой [1] предположим, что в последовательности

$$\tilde{C}_0[M_k,N],\ \tilde{C}_1[M_k,N],\ \ldots,\ \tilde{C}_{\ell_k}[M_k,N] = \tilde{C}[M_k,N]$$

при $\tilde{C}_0[M_k,N] = A[M_k,N]$ погрешность $H_i[M_k,N]$ перехода от $(i-1)$ -й матрицы к i -й ($1 \le i \le \ell_k$) оценивается неравенством

$$\| H_i[M_k,N] \|_E \le \delta \cdot \| \tilde{C}_i[M_k,N] \|_E ,$$

где $\delta \le 20\,\varepsilon_1$, а ε_1 - параметр ЭВМ, при котором $1+\varepsilon_1$ является наименьшим (в машине) числом, большим I. Здесь и в дальнейшем нормы прямоугольных матриц, включая векторы, - евклидовы, а квадратных матриц (если не указано особо) - спектральные. Тогда

$$\| H[M_k,N] \|_E \le \xi_k(\delta) \cdot \| \tilde{C}[M_k,N] \|_E ,\ \xi_k(\delta) = \delta \ell_k e^{\delta \ell_k}, \qquad (7)$$

$$\| h[M_k] \| \le \beta_k \cdot \| \tilde{g}[M_k] \| ,\ \beta_k = \delta(m_k-2)e^{\delta(m_k-2)}. \qquad (8)$$

В условиях клеточного разбиения матрицы $A[M,N]$ вместо неравенства (7) удобнее использовать оценку

$$\| H[M_k,N] \|_E \le \gamma_k \cdot \| A[M_k,N] \|_E ,\ \gamma_k = \xi_k\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right), \qquad (9)$$

так как в вычислительных процессах вместо полосы $\tilde{C}[M_k,N]$ известна, как правило, лишь клетка $\tilde{C}[M_k,N_k]$. Кроме того, $A[M_k,N]$ имеет значительно меньше ненулевых элементов по сравнению с полосой $\tilde{C}[M_k,N]$, причем

$$\| \tilde{C}[M_k,N] \|_E \le (1+\gamma_k) \cdot \| A[M_k,N] \|_E .$$

Для двухдиагональной матрицы $\tilde{C}[M_k,N_k]$ можно вычислить [1,4] по методу Штурма $\sigma_{max}^{(k)}$ и $\sigma_{min}^{(k)}$ - соответственно ее наибольшее и наименьшее сингулярные числа. Их отношение равно числу обусловленности μ_k матрицы $\tilde{C}[M_k,N_k]$, число $\sigma_{max}^{(k)}$ равно ее спектральной норме, а число $(\sigma_{min}^{(k)})^{-1}$ -

спектральной норме матрицы $(\tilde{C}[M_k,N_k])^{-1}$. Таким образом, для каждого $k=1,2,\dots,p$ будем предполагать известными лишь числа

$$\sigma^{(k)}_{max},\ \sigma^{(k)}_{min},\ \|A[M_k,N]\|_E,\ \gamma_k,\ \beta_k$$

и через них вычислять или оценивать все другие необходимые параметры, в частности

$$\|H[M,N]\|_E \le \gamma\cdot\|A[M,N]\|_E,\quad \gamma=\max_{1\le k\le p}\gamma_k, \tag{10}$$

$$\|h[M]\|\le\beta\cdot\|\tilde{C}[M,N]\|\cdot\|\tilde{z}[N]\|,\ \beta=\max_{1\le k\le p}\beta_k. \tag{11}$$

В условиях разбиения (5) множества M вместо чисел обусловленности μ_k используются мажорирующие их числа

$$\mu'_k=\frac{\|A[M_k,N]\|_E}{\sigma^{(k)}_{min}}=\frac{\|A[M_k,N]\|_E}{\sigma^{(k)}_{max}}\cdot\mu_k,\ k=1,2,\dots,p.$$

Это связано с оценками

$$\|H[M_k,N_k]\|\le\|H[M_k,N_k]\|_E\le\|H[M_k,N]\|_E$$

спектральной нормы возмущения в матрице

$$\tilde{C}[M_k,N_k]=P_k[M_k,M_k]\cdot A[M_k,N]\cdot Q^{(k)}[N,N_k]+H[M_k,N_k],$$

которую приходится "погружать" в полосу $\tilde{C}[M_k,N]$, так как подматрица $Q^{(k)}[N,N_k]$ в матрице $Q^{(k)}[N,N]$ не является ортогональным преобразованием. Отсюда и из определения евклидовой нормы следует, что используемые в дальнейшем отношения

$$\lambda_k=\frac{\|C[M_k,N\setminus\tilde{N}_k]\|_E}{\sigma^{(k)}_{min}},\quad \tilde{\lambda}_k=\frac{\|\tilde{C}[M_k,N\setminus\tilde{N}_k]\|_E}{\sigma^{(k)}_{min}}$$

можно оценить сверху числом

$$\bar{\lambda}_k=\sqrt{(1+\gamma_k)^2(\mu'_k)^2-\mu_k^2-(m_k-1)},$$

причем неравенства $\lambda_k\le\bar{\lambda}_k$ легко доказываются в предположении $\mu'_k\gamma_k<1$ для всех $k=2,3,\dots,p$.

2. Оценка погрешности решения на основе блочно-мультипликативного представления матриц с клеточным разбиением. Спектральную норму матрицы $\tilde{C}[M,N]$ в неравенстве (11) можно оценить, исходя из представления

$$\tilde{C}[M,N]=D[M,N]\cdot R_2[N,N]\cdot R_3[N,N]\cdot\ldots\cdot R_p[N,N] \tag{12}$$

при разбиении (5) множества M . Здесь $D[M,N]$ – блочно-диагональная матрица, составленная из блоков $\tilde{C}[M_k, N_k]$, $k=1,2,\dots,p$, а каждая из матриц

$$R_k[N,N]= E[N,N]+E[N,N_k]\cdot R_k[N_k,N\setminus\tilde{N}_k]\cdot E[N\setminus\tilde{N}_k,N]$$

отличается от единичной матрицы $E[N,N]$ разве лишь блоком

$$R_k[N_k,N\setminus\tilde{N}_k]=(\tilde{C}[M_k,N_k])^{-1}\cdot\tilde{C}[M_k,N\setminus\tilde{N}_k] \tag{13}$$

при всех $k=2,3,\dots,p$. Более того, нетрудно проверить, что

$$\tilde{C}[M,N]=D[M,N]\cdot\{E[N,N]+\sum_{2\le k\le p}E[N,N_k]\cdot R_k[N_k,N\setminus\tilde{N}_k]\cdot E[N\setminus\tilde{N}_k,N]\},$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{C}[M,N]\|\le \sigma_{max}\left(1+\sqrt{\sum_{2\le k\le p}\bar{\lambda}_k^2}\right),$$

где σ_{max} – спектральная норма двухдиагональной матрицы $D[M,N]$, равная наибольшему из чисел $\sigma^{(k)}_{max}, k=1,2,\dots,p$, а число $\bar{\lambda}_k\geqslant\tilde{\lambda}_k$ при каждом $k=2,3,\dots,p$ мажорирует евклидову норму блока (13) и тем самым евклидову норму матрицы $R_k[N,N]-E[N,N]$. Полагая с учетом оценки (10)

$$\lambda=\min\left\{1+\gamma,\ \frac{\sigma_{max}}{\|A[M,N]\|_E}\cdot\left(1+\sqrt{\sum_{2\le k\le p}\bar{\lambda}_k^2}\right)\right\},$$

неравенство (11) заменим на

$$\|h[M]\|\le\beta\lambda\cdot\|A[M,N]\|_E\cdot\|\tilde{z}[N]\|. \tag{14}$$

Для оценки нормы вектора $z[N]$ приравняем погрешности левой и правой частей системы (2):

$$\tilde{C}[M,N]\cdot z[N]=h[M]-H[M,N]\cdot(\tilde{z}[N]-z[N]).$$

Отсюда и из неравенств (10), (14) следует соотношение

$$\|z[N]\|\le\mu'\cdot\{(\beta\lambda+\gamma)\cdot\|\tilde{z}[N]\|+\gamma\cdot\|z[N]\|\}$$

при некотором

$$\mu'\geqslant\|\tilde{C}^{-1}[N,M]\|\cdot\|A[M,N]\|_E.$$

Спектральную норму матрицы $\tilde{C}^{-1}[N,M]$ также можно оценить, исходя из представления (12), обратного к

$$\tilde{C}^{-1}[N,M]=R_p^{-1}[N,N]\cdot\ldots\cdot R_3^{-1}[N,N]\cdot R_2^{-1}[N,N]\cdot D^{-1}[N,M].$$

Поскольку матрица $R_k[N,N]$ отличается от $R_k^{-1}[N,N]$ лишь знаком блока (13) для всех $k=2,3,\dots,p$, то положим

$$\mu' = \sigma_{min}^{-1} \cdot \left\{ \prod_{2 \le k \le p} (1+\bar{\lambda}_k) \right\} \cdot \| A[M,N] \|_E ,$$

где σ_{min}^{-1} – спектральная норма матрицы $D^{-1}[N,M]$, равная наибольшему из чисел $(\sigma_{min}^{(k)})^{-1}$, $k=1,2,\dots,p$. Если, как обычно, предположить $\mu'\gamma < 1$, то получим оценку погрешности в решении системы (2):

$$\| z[N] \| \le \alpha \cdot \| \tilde{z}[N] \|, \; \alpha = \frac{\mu'}{1-\mu'\gamma} \cdot (\beta\lambda + \gamma). \quad (15)$$

Оценка нормы вектора $z'[M]$ получается заменой параметра β на

$$\beta' = (m-1)\delta e^{(m-1)\delta} \quad (\| h'[N] \| \le \beta' \cdot \| \tilde{d}[N] \|)$$

в выражении (15) для α, откуда следует неравенство

$$\| z'[M] \| \le \alpha' \cdot \| \tilde{y}[M] \|, \; \alpha' = \frac{\mu'}{1-\mu'\gamma} \cdot (\beta'\lambda + \gamma).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если матрицу $A[M,N]$ привести к блочно-треугольному виду, исходя из разбиения N_k, $k=1,2,\dots,p$, множества N, то согласно замечанию I матрицы $A[M,N]$ и $A^T[N,M]$, а тем самым системы (2) и (4) при замене каждой из них на транспонированную, поменяются ролями.

3. Рекуррентный способ оценки. Рассмотрим систему (2), матрица которой получается на основе разбиения (5) множества M. Для оценки погрешности в решении каждой из подсистем

$$\tilde{C}[M_k,N_k] \cdot \tilde{z}[N_k] = \tilde{g}[M_k] - \tilde{C}[M_k, N \setminus \tilde{N}_k] \cdot \tilde{z}[N \setminus \tilde{N}_k],$$
$$k = 1,2,\dots,p,$$

приравняем возмущения их левой и правой частей. При $k=1$ имеем

$$\tilde{C}[M_1,N_1] \cdot z[N_1] = h[M_1] - H[M_1,N_1] \cdot \{ \tilde{z}[N_1] - z[N_1] \},$$

откуда при $\mu_1'\gamma_1 < 1$ следует формула

$$\| z[N_1] \| \le \alpha_1 \cdot \| \tilde{z}[N_1] \|, \; \alpha_1 = \frac{\mu_1'}{1-\mu_1'\gamma_1} \cdot [\gamma_1 + (1+\gamma_1)\beta_1]. \quad (16)$$

По аналогии с $\alpha_1' = \alpha_1$ введем числа

$$\alpha_k' = \frac{\mu_k'}{1-\mu_k'\gamma_k} \cdot [\gamma_k + (1+\gamma_k)\beta_k], \quad k = 1,2,\dots,p,$$

а также обозначения

$$\Lambda_k = \bar{\lambda}_k / (1-\mu_k'\gamma_k), \; k = 2,3,\dots,p.$$

При $k=2$ для вектора $z[N_2]$ получается уравнение

$$\tilde{C}[M_2,N_2]\cdot z[N_2]=h[M_2]-H[M_2,N_1\cup N_2]\cdot\tilde{z}[N_1\cup N_2]+$$
$$+H[M_2,N_2]\cdot z[N_2]-C[M_2,N_1]\cdot z[N_1],$$
откуда и из соотношений (8), (9), (I6) при $\mu_2'\gamma_2<1$ следует неравенство
$$\|z[N_2]\|\le\alpha_2'\cdot\|\tilde{z}[N_1\cup N_2]\|+\alpha_1\Lambda_2\cdot\|\tilde{z}[N_1]\|. \qquad (I7)$$
Тогда из неравенств (I6)-(I7) нетрудно получить цепочку неравенств
$$\|z[N_1\cup N_2]\|^2\le\alpha_1^2\cdot\|\tilde{z}[N_1]\|^2+\{\alpha_1\Lambda_2\cdot\|\tilde{z}[N_1]\|+$$
$$+\alpha_2'\cdot\|\tilde{z}[N_1\cup N_2]\|\}^2\le\alpha_2^2\cdot\|\tilde{z}[N_1\cup N_2]\|^2, \qquad (I8)$$
где параметр α_2 подлежит определению. Заметим, что если матрица $A[M_1\cup M_2,N]$ блочно-диагональная и ее структура согласована с разбиением M_1,M_2 множества $M_1\cup M_2$, то таковой является и матрица $\tilde{C}[M_1\cup M_2,N_1\cup N_2]$, так что можно считать $\lambda_2=\Lambda_2=0$. Однако использовать неравенства (I8) в этом случае нерационально, так как из них следует $\alpha_2=\sqrt{\alpha_1^2+(\alpha_2')^2}$, в то время как из распадения матриц на блоки можно получить аналогичную неравенству (I6) оценку $\|z[N_2]\|\le\alpha_2'\cdot\|\tilde{z}[N_2]\|$, откуда следует
$$\|z[N_1\cup N_2]\|\le max\{\alpha_1,\alpha_2'\}\cdot\|\tilde{z}[N_1\cup N_2]\|.$$

Считая $\Lambda_2>0$, заменим в средней части цепочки неравенств (I8) величину $\|\tilde{z}[N_1]\|$ на $\|\tilde{z}[N_1\cup N_2]\|$ и положим
$$\alpha_2^2=(1+\Lambda_2^2)\alpha_1^2+(\alpha_2')^2+2\Lambda_2\alpha_1\alpha_2'. \qquad (I9)$$
Для выявления л и н е й н о й рекуррентной зависимости α_2 от α_1 увеличим правую часть (I9) до полного квадрата заменой в последнем слагаемом величины Λ_2 на $\sqrt{1+\Lambda_2^2}$ и положим $\tilde{\alpha}_1=\alpha_1$. Тогда, очевидно,
$$\alpha_2\le\tilde{\alpha}_2=\sqrt{1+\Lambda_2^2}\cdot\tilde{\alpha}_1+\alpha_2'.$$

Нетрудно проследить, что при любом $k=2,3,\ldots,p$ верно во всяком случае, т.е. независимо от специфики матрицы $A[M,N]$, линейное рекуррентное соотношение
$$\alpha_k\le\tilde{\alpha}_k=\sqrt{1+\Lambda_k^2}\cdot\tilde{\alpha}_{k-1}+\alpha_k'. \qquad (20)$$
Если же при некотором k в пределах $2\le k\le p$ матрица

$A[(M\setminus\tilde{M}_k)\cup M_k,\ N]$ распадается на независимые блоки $A[M\setminus\tilde{M}_k,\ N\setminus N'_k]$ и $A[M_k, N'_k]$, то $\lambda_k=\Lambda_k=0$ и матрица

$$\tilde{C}[M_1\cup M_2\cup\ldots\cup M_k,\ N_1\cup N_2\cup\ldots\cup N_k]$$

также распадается на независимые блоки $\tilde{C}[M\setminus\tilde{M}_k,\ N\setminus\tilde{N}_k]$ и $\tilde{C}[M_k, N_k]$. Следовательно, можно получить оценку

$$\|z[N_1\cup N_2\cup\ldots\cup N_k]\|\le max\{\alpha_{k-1},\alpha'_k\}\cdot\|\tilde{z}[N_1\cup N_2\cup\ldots\cup N_k]\|.$$

Таким образом, для каждого $k=2,3,\ldots,p$ в худшем случае $(\Lambda_i>0,\ 2\le i\le k)$ верно линейное рекуррентное соотношение (20), из которого следует оценка

$$\alpha_p\le\sqrt{(1+\Lambda_p^2)\cdot\ldots\cdot(1+\Lambda_3^2)\cdot(1+\Lambda_2^2)}\cdot\alpha'_1+$$
$$+\sqrt{(1+\Lambda_p^2)\cdot\ldots\cdot(1+\Lambda_4^2)(1+\Lambda_3^2)}\cdot\alpha'_2+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{1+\Lambda_p^2}\cdot\alpha'_{p-1}+\alpha'_p=\tilde{\alpha}_p. \qquad (21)$$

Для качественной характеристики этого результата, а также для сопоставления его с оценкой (15) достаточно заменить в последней параметр α на величину

$$\tilde{\alpha}=\max_{1\le k\le p}\alpha'_k\cdot\Lambda\cdot\sqrt{(1+\Lambda_p^2)\cdot\ldots\cdot(1+\Lambda_3^2)\cdot(1+\Lambda_2^2)}\ ,$$

очевидно, мажорирующую правую часть неравенства (21) при

$$\Lambda=1+1/\sqrt{1+\Lambda_2^2}+1/\sqrt{(1+\Lambda_2^2)(1+\Lambda_3^2)}+\ldots$$
$$\ldots+1/\sqrt{(1+\Lambda_2^2)(1+\Lambda_3^2)\cdot\ldots\cdot(1+\Lambda_p^2)}<p.$$

Однако при вычислениях на ЭВМ естественно получать α_p на основе более точного нелинейного рекуррентного соотношения

$$\alpha_k=\sqrt{(1+\Lambda_k^2)\alpha_{k-1}^2+(\alpha'_k)^2+2\Lambda_k\alpha_{k-1}\alpha'_k}\ ,\ k=2,3,\ldots,p, \qquad (22)$$

аналогичного соотношению (19), и в случае $\alpha_p<\alpha$ заменять в неравенстве (15) параметр α на α_p.

4. Пример комбинированного разбиения матрицы. Рассмотрим невырожденную блочную матрицу

$$A[M,N]=\left[\begin{array}{c|c} A[M^1,N_0] & 0 \\ \hline A[M_0,N_0] & A[M_0,N^1]\end{array}\right] \qquad (23)$$

порядка m и предположим, что блоки $A[M^1,N_0]$ и $A[M_0,N^1]$

обладают некоторой блочной структурой [2,3], согласованной с их разбиением на горизонтальные и вертикальные полосы:

$$A[M_k,N_0],\ 1\le k<p_0,\qquad A[M_0,N_k],\ p_0<k\le p, \tag{24}$$

где $M_k, 1\le k<p_0$, - разбиение множества M^1, а $N_k, p_0<k\le p$, - разбиение множества N^1.

Используя линейную независимость строк или столбцов в полосах (24), матрицу (23) с учетом замечания I (п.I) можно преобразовать в блочно-треугольную матрицу $\tilde{C}[M,N]$ с двухдиагональными клетками $\tilde{C}[M_k,N_k], 1\le k\le p$, на главной диагонали (рис.2). При этом

$$M_{p_0}=M_0\setminus\Big(\bigcup_{p_0<k\le p}M_k\Big),\qquad N_{p_0}=N_0\setminus\Big(\bigcup_{1\le k<p_0}N_k\Big).$$

Не нарушая общности, будем считать, что в процессе преобразования блока $A[M_0,N^1]$ вертикальные полосы $A[M_0,N_k]$ перебираются в порядке убывания $k=p,p-1,\dots,p_0+1$, так что параметр γ_k в неравенстве

$$\|H[M,N_k]\|_E\le\gamma_k\cdot\|A[M_0,N_k]\|_E\ (p_0<k\le p)$$

определяется числом $\ell_k=m-\bar{m}_{k-1}+m_k-2$ отражений, применяемых к полосе $A[M_0,N_k]$.

Норму вектора $z[N]$ в случае $M^1\ne\emptyset$ и $N^1\ne\emptyset$ оценим с помощью рекуррентного процесса (п.3), построенного на основе разбиения матрицы $\tilde{C}[M,N]$ на полосы $\tilde{C}[M_k,N]$, полагая $k=1,2,\dots,p_0-1,0$. Поскольку блок $A[M_0,N_0]$ и вектор $b[M_0]$ умножаются соответственно на $\ell_{p_0}=m+m_{p_0}-3$ и m_0-2, где $m_0=m-\bar{m}_{p_0-1}+1$, ортогональных преобразований, то

$$\|H[M_0,N_0]\|_E\le\gamma_{p_0}\cdot\|A[M_0,N_0]\|_E,\quad \|h[M_0]\|\le\beta_0\cdot\|\tilde{g}[M_0]\|,$$

откуда следует неравенство

$$\|H[M_0,N]\|_E\le\gamma_0\cdot\|A[M_0,N]\|_E,\quad \gamma_0=\max_{p_0\le k\le p}\gamma_k .$$

Далее, если определить числа

$$\mu'_{p_0}=\frac{\|A[M_0,N_0]\|_E}{\sigma_{min}^{(p_0)}},\quad \mu'_k=\frac{\|A[M_0,N_k]\|_E}{\sigma_{min}^{(k)}},\quad k=p,p-1,\dots,p_0+1,$$

то с учетом замечаний I,2 можно определить числа $\bar{\lambda}_k, p_0\le k<p$, по той же формуле, что и $\bar{\lambda}_k, 2\le k<p_0$. Теперь основное отличие от процесса, описанного в п.3, состоит лишь в том, что

при $k=0$ в уравнении

$$z[\tilde{N}_{p_0}]=(\tilde{C}[M_0,\tilde{N}_{p_0}])^{-1}\cdot\{h[M_0]-H[M_0,N]\cdot\tilde{z}[N]+$$
$$+H[M_0,\tilde{N}_{p_0}]\cdot z[\tilde{N}_{p_0}]-C[M_0,N\setminus\tilde{N}_{p_0}]\cdot z[N\setminus\tilde{N}_{p_0}]\}$$

относительно вектора $z[\tilde{N}_{p_0}]$ матрица $(\tilde{C}[M_0,\tilde{N}_{p_0}])^{-1}$ не двухдиагональная, а блочно-треугольная, поэтому ее спектральную норму приходится оценивать сверху на основе блочно-мультипликативного представления, полагая

$$\mu'_0=(\sigma^{(0)}_{min})^{-1}\cdot\left\{\prod_{p_0\le k<p}(1+\bar{\lambda}_k)\right\}\cdot\|A[M_0,N]\|_E,$$

где $(\sigma^{(0)}_{min})^{-1}$ – наибольшее из чисел $(\sigma^{(k)}_{min})^{-1}$, $k=p_0,p_0+1,\dots,p$. Если предположить $\mu'_0\gamma_0<1$ и ввести обозначения

$$\Lambda_{p_0}=\frac{\bar{\lambda}_0}{1-\mu'_0\gamma_0},\quad \bar{\lambda}_0=\bar{\lambda}_{p_0}\cdot\frac{\sigma^{(p_0)}_{min}}{\sigma^{(0)}_{min}}\left\{\prod_{p_0\le k<p}(1+\bar{\lambda}_k)\right\},$$

то коэффициент α_0 в неравенстве

$$\|z[N]\|\le\alpha_0\cdot\|\tilde{z}[N]\|$$

можно вычислить по формуле (22) при $k=p_0$, полагая $\alpha_0=\alpha_{p_0}$ и

$$\alpha'_{p_0}=\frac{\mu'_0}{1-\mu'_0\gamma_0}\cdot[\gamma_0+(1+\gamma_0)\beta_0].$$

Специфика оценки $z[N]$ блочно-мультипликативным методом в условиях разбиения M_k, $0\le k<p_0$, множества M состоит в том, что представление (12) матрицы $\tilde{C}[M,N]$ нужно заменить на

$$\tilde{C}[M,N]=\tilde{D}[M,N]\cdot R_2[N,N]\cdot\ldots\cdot R_{p_0-1}[N,N]\cdot R_0[N,N],$$

где $\tilde{D}[M,N]$ – блочно-диагональная матрица, составленная из блоков $\tilde{C}[M_k,N_k]$, $k=1,2,\dots,p_0-1$, и $\tilde{C}[M_0,\tilde{N}_{p_0}]$, а матрица $R_0[N,N]$ отличается от единичной разве лишь блоком

$$R_0[\tilde{N}_{p_0},N\setminus\tilde{N}_{p_0}]=(\tilde{C}[M_0,\tilde{N}_{p_0}])^{-1}\cdot\tilde{C}[M_0,N\setminus\tilde{N}_{p_0}].$$

Поэтому спектральные нормы матриц $\tilde{D}[M,N]$ и $\tilde{D}^{-1}[N,M]$ здесь приходится оценивать сверху, исходя из блочно-мультипликативного представления матриц $\tilde{C}[M_0,\tilde{N}_{p_0}]$ и $(\tilde{C}[M_0,\tilde{N}_{p_0}])^{-1}$ с учетом замечания 2, соответственно числами

$$\tilde{\sigma}_{max} = max\left\{ \sigma_{max}^{(0)} \left(1 + \sqrt{\sum_{p_0 \le k < p_0} \bar{\lambda}_k^2}\right), \max_{1 \le k < p_0} \sigma_{max}^{(k)} \right\},$$

$$\tilde{\sigma}_{min}^{-1} = max\left\{ \left(\sigma_{min}^{(0)}\right)^{-1} \left(\prod_{p_0 \le k < p} (1 + \bar{\lambda}_k) \right), \max_{1 \le k < p_0} \left(\sigma_{min}^{(k)}\right)^{-1} \right\},$$

где $\sigma_{max}^{(0)}$ – наибольшее из чисел $\sigma_{max}^{(k)}, p_0, p_0+1, \dots, p$. При этом $\bar{\lambda}_0$ мажорирует евклидову норму блока $R_0[\tilde{N}_{p_0}, N \setminus \tilde{N}_{p_0}]$. Таким образом, в оценке (I5) параметры λ, μ' следует заменить на

$$\tilde{\lambda} = min\left\{ 1 + \max_{0 \le k < p_0} \gamma_k, \frac{\tilde{\sigma}_{max}}{\|A[M,N]\|_E} \left(1 + \sqrt{\bar{\lambda}_0^2 + \sum_{2 \le k < p_0} \bar{\lambda}_k^2}\right) \right\},$$

$$\tilde{\mu}' = \tilde{\sigma}_{min}^{-1} (1 + \bar{\lambda}_0) \left\{ \prod_{2 \le k < p_0} (1 + \bar{\lambda}_k) \right\} \cdot \|A[M,N]\|_E .$$

Оценка нормы вектора $z'[M]$ получается симметричным образом.

ЛИТЕРАТУРА

I. ГОДУНОВ С.К. Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, I980.
2. БУЛАВСКИЙ В.А., ЗВЯГИНА Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании. – Докл. АН СССР, I977, т.205, №5, с.993–996.
3. ЗВЯГИНА Р.А. Упорядочение блоков при обновлении базиса с блочной структурой. – Оптимизация, I983, вып. 33(50), с. 44–55.
4. ЗВЯГИНА Р.А. Выявление хорошо обусловленного блока в прямоугольной матрице. – Оптимизация, I983, вып.3I(48), с. 48–6I.

Поступила в ред.-изд. отдел
4.06.I984 г.