УДК 513.88

БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОЧИСТКЕ

И.В.Шапкин

1. Пусть T - компактное топологическое пространство, X - локально-выпуклое пространство, $p(t,x)$ - функция на $T \times X$, сублинейная по x при каждом $t \in T$. Положим $p(x) = \sup_{t \in T} p(t,x)$, $p_t(x) = p(t,x)$ $\forall t \in T$, $\forall x \in X$. Пусть при всяком $t \in T$ функция $x \to p(t,x)$ непрерывна в 0. Отметим, что множество $\partial p = \{ l \in X' : l(x) \le p(x)\ \forall x \in X \}$ называется субдифференциалом p.

Справедливо представление [1]:

$$\partial p = \overline{co}^{\,\sigma(X',X)} \bigcup_{t \in T} \partial p_t . \tag{1}$$

Если $X = R^n$, то имеет место конечномерная теорема об очистке [1]: любой элемент y из ∂p может быть представлен в виде

$$y = \sum_{i=1}^{r} z_i y_i , \tag{2}$$

где $r \le n+1$, $\sum_{i=1}^{r} z_i = 1$, $z_i > 0$, $y_i \in \partial p_{t_i}$, $t_i \in T$, $i = 1, \dots, r$.

Наша цель - получить бесконечномерный аналог бесконечномерной теоремы об очистке, который бы превращался в последнюю в случае, когда локально-выпуклое пространство X конечномерно.

2. Отметим, что в силу мильмановского "обращения" теоремы Крейна - Мильмана [2]: $ex\text{-}\partial p \subseteq \bigcup_{t \in T} \partial p_t$ *). Обозначим через M_l слабо компактное, выпуклое множество всех мер класса $M_1^+(\partial p)$ с барицентром в фиксированной точке $l \in \partial p$ и через Z_l - множество всех граничных мер, входящих в M_l. Элементы не-

*) Знаком ex- обозначены крайние точки соответствующего компакта, а $M_1^+(\partial p)$ - совокупность всех вероятностных мер на ∂p.

пустого множества $ex-M_\ell$ называются симплициальными мерами [3].

По теореме Каратеодори [3], $ex-Z_\ell = Z_\ell \cap ex-M_\ell \neq \phi$ и точка ℓ является барицентром меры $z \in ex-Z_\ell$, т.е. $\ell(x) = \int_{\partial p} x(\cdot)\,dz \quad \forall x \in X$. Тем самым имеет место бесконечномерная теорема об очистке:

$$\partial p = \{x \to \int_{\partial p} x(\cdot)\,dz \quad \forall x \in X : z \in \bigcup_{\ell \in \partial p} ex-Z_\ell\}. \tag{3}$$

Представление (3) содержит эту теорему в следующем смысле: если $X = R^n$, то симплициальные меры класса $M_1^+(\partial p)$ суть в точности меры с аффинно-независимыми носителями [3], т.е. для любого $y \in \partial p$ в силу (3) имеем

$$y(x) = \int_{\partial p} x(\cdot)\,dz,\ supp\, z \subseteq \bigcup_{t \in T} \partial p_t,\ z = \sum_{i=1}^{r} z_i \varepsilon_{y_i},\ r \leq n+1,$$

$$\sum_{i=1}^{r} z_i = 1,\ z_i > 0,\ y_i \in \partial p_{t_i},\ t_i \in T,\ i = 1, \ldots, r.$$

Приятный долг автора выразить благодарность С.С.Кутателадзе за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. ИОФФЕ А.Д., ТИХОМИРОВ В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.
2. ФЕЛПС Р. Лекции о теоремах Шоке. - М.: Мир, 1968.
3. VINCENT-SMITH G. An extension of Caratheodory theorem to infinite dimensions using Choquet boundary theory.- Quart. J. Math., 1971, v.22, N86, p.231-238.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.04. 1984 г.