Выпуск 33(50) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Модели динамики и равновесия

УДК 517.91

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ КВАЗИОДНОРОДНЫМИ МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Г.А.Ларичева

В данной работе рассматриваются траектории, порожденные квазиоднородными многозначными отображениями и изучается их асимптотическое поведение.

Результаты, относящиеся к квазиоднородным отображениям, могут быть применены при исследовании моделей экономической динамики типа Неймана - Гейла, а также моделей экологической динамики, например динамики численности биологической популяции, динамики ее возрастно-генетического состава. Для однозначных аналогов указанных отображений это можно проследить, например, в [1,2].

1. Пусть K - конус в арифметическом n-мерном пространстве R^n и $\Pi_c(K)$ - совокупность всех непустых компактных подмножеств этого конуса. Конус векторов с неотрицательными компонентами пространства R^n обозначим через R^n_+, i-ю координату вектора $x \in R^n$ - через x^i. Пусть $K \subset R^n_+$.

Отображение $a: K \to \Pi_c(K)$ называется квазиоднородным, если $a(\alpha x) \supset \alpha a(x)$ $(0 \le \alpha \le 1, x \in K)$; возрастающим, если из $x' \ge x''$ (отношение порядка введено конусом R^n_+) следует $a(x') \supset a(x'')$; нормальным, если $a(x) = (a(x) - R^n_+) \cap K$ для всех $x \in K$; регулярным, если множество $a(x)$ $(x \in K, x \ne 0)$ регулярно, т.е. совпадает с замыканием своей внутренности; гейловским, если $a(0) = \{0\}$.

Под динамической системой здесь понимается непрерывное отображение $a: R^n_+ \to \Pi_c(R^n_+)$. Последовательность x_t элементов R^n_+, обладающая тем свойством, что $x_{t+1} \in a(x_t)$

$(t=0,1,\dots)$, называется траекторией системы a.

Ниже рассматриваются лишь траектории, "не подходящие близко" к границе конуса R_+^n. В связи с этим отображение будет рассматриваться лишь на замкнутом подконусе K конуса R_+^n $(K\setminus\{0\}\subset \mathrm{int}\, R_+^n)$. Точнее говоря, будет рассматриваться отображение, имеющее график $Z\cap(K\times K)$, где $Z=\{(x,y):y\in a(x)\}$ - график a. Будем обозначать это отображение той же буквой a, что и исходное.

Важнейшими примерами квазиоднородных отображений являются вогнутые и однородные степени $\delta\leq 1$ отображения, т.е. обладающие соответственно свойствами $a(\alpha x_1+\beta x_2)\supset\alpha a(x_1)+\beta a(x_2)$ $(\alpha,\beta\geq 0,\ \alpha+\beta=1,\ x_1,x_2\in R_+^n)$ и $a(\lambda x)=\lambda^\delta a(x)$ $(\lambda\geq 0,\ x\in R_+^n)$.

2. Приведем некоторые определения. Непустое подмножество Ω конуса K называется полуинвариантным множеством динамической системы a, если $a(\Omega)\subset\Omega$. Наименьшее замкнутое подмножество полуинвариантного множества Ω, содержащее все предельные точки всех траекторий системы, лежащих в Ω, называется [3] магистралью системы a на множестве Ω и обозначается через M_a^Ω.

Точка $x\in K$ называется устойчивой по Пуассону точкой системы a, если $x\in\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} a^t(x)}$, где черта означает замыкание. Совокупность всех устойчивых по Пуассону точек системы a, лежащих в полуинвариантном множестве Ω, обозначим через $\varkappa_a^\Omega$.

Множество непрерывных функций h, определенных на полуинвариантном компакте Ω, для которых выполняется $h(x)\geq h(y)$, если $y\in a(x)$, обозначим через H_a. Следуя [3], введем в рассмотрение множество $W_a^\Omega=\{x\in\Omega:\max\{h(y):y\in a(x)\}=h(x)$ для всех $h\in H_a\}$.

ТЕОРЕМА I (о магистрали). Пусть a - нормальное, квазиоднородное, непрерывное, регулярное отображение и существует полуинвариантный компакт Ω_a, тогда имеет место равенство $W_a^\Omega=M_a^\Omega=\varkappa_a^\Omega$.

Эта теорема обобщает аналогичный результат для однородных степени I отображений, полученный А.М.Рубиновым [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В указанной работе [3] доказана магистральность множества W_a^{Ω}, т.е. справедливость включения $W_a^{\Omega} \supset M_a^{\Omega}$. При доказательстве включения $\mathscr{H}_a^{\Omega} \supset W_a^{\Omega}$ условие положительной однородности отображения a не используется и доказательство переносится без всяких изменений на случай квазиоднородного отображения. Следует проверить только включение $M_a^{\Omega} \supset \mathscr{H}_a^{\Omega}$.

Пусть $x \in \mathscr{H}_a^{\Omega}$, т.е. $x \in \overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} a^t(x)}$. Покажем, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется номер t такой, что

$$(1-\varepsilon)x \in a^t(x).$$

Так как $x \in K$, то $x \gg 0$. Введем с помощью u норму в R^n, другими словами, примем за единичный шар B множество $\langle -u, u \rangle$. Так как $x \in \overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} a^t(x)}$, то для данного ε существует номер t такой, что $(x+\varepsilon B) \cap a^t(x) \neq \emptyset$. Для элемента $z \in x+\varepsilon B$ выполняется неравенство $z \geq (1-\varepsilon)x$. Из нормальности множества $a^t(x)$ следует, что $(1-\varepsilon)x \in a^t(x)$.

Рассмотрим последовательность чисел $\varepsilon_k > 0$, обладающую тем свойством, что бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon_k)$ сходится к некоторому числу $y \in (0,1)$. Обозначим последовательность показателей, соответствующих элементам последовательности (ε_k), через (t_k), т.е.

$$x \in \frac{1}{1-\varepsilon_1} a^{t_1}(x), \tag{1}$$

$$x \in \frac{1}{1-\varepsilon_2} a^{t_2}(x), \tag{2}$$

$$x \in \frac{1}{1-\varepsilon_3} a^{t_3}(x),$$

— — — — — — — —

Из условия (2) и квазиоднородности отображения a следует, что $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)x \in (1-\varepsilon_1)a^{t_2}(x) \subset a^{t_2}((1-\varepsilon_1)x)$. Рассуждая далее аналогично, получим $(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)x \subset \subset a^{t_3}((1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)x)$ и т.д. Таким образом можно построить траекторию $\chi = (x_t)_t$, исходящую из x и имеющую подпоследовательность $x_{t_j} = \prod_{k=1}^{j}(1-\varepsilon_k)x$. При этом y_x - предельная точка траектории χ, т.е. $y_x \in M_a^{\Omega}$. Из произвольности y следует, что $x \in M_a^{\Omega}$. Теорема доказана.

Итак, для применения теоремы I следует убедиться в существовании полуинвариантного компакта. Укажем способ построения такого компакта.

3. Сначала для квазиоднородного непрерывного нормального отображения $a : K \longrightarrow \Pi_C(K)$, обладающего свойством $a(0)=\{0\}$, введем функцию роста этого отображения:

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha : \alpha x \in a(x)\}.$$

Легко видеть, что функция α : I) не возрастает на лучах, а значит, квазиоднородна (в случае однородности степени $\delta = 1$ она постоянна на лучах; в случае однородности степени $\delta < 1$ она однородна степени $\delta - 1$); 2) непрерывна на конусе $K \setminus \{0\}$.

Положим $\gamma(r) = \sup\{\alpha(x) : \|x\| = r\}$ и обозначим через x_r элемент конуса K , для которого $\|x_r\| = r$ и $\alpha(x_r) = \gamma(r)$. Легко видеть, что функция γ : I) есть убывающая функция радиуса r; 2) непрерывна на $(0, \infty)$.

В однородном степени I случае γ - постоянная функция: $\gamma(r) = \gamma(1) = \sup\{\alpha(x) : x \in K, x \neq 0\} = const$. Эта постоянная называется в данном случае темпом роста отображения a.

4. Отметим некоторые спектральные свойства квазиоднородных отображений. Обозначим $\gamma(r) = \alpha(x_r)$ через α_r, тогда для любого $r > 0$ множество $\bar{\mathfrak{F}}_r = \overline{\bigcup_{t=1} (\alpha_r^{-1} a)^t (x_r)}$ является собственным для отображения a, соответствующим собственному числу α_r, т.е. $a(\bar{\mathfrak{F}}_r) = \alpha_r \bar{\mathfrak{F}}_r$.

Отдельно остановимся на одном из примеров квазиоднородного отображения.

В случае однородного отображения степени $\delta < 1$ из существования одного полусобственного компакта $\eta : a(\eta) \subset \gamma(1)\eta$ следует существование полусобственного компакта $(\mu^{-1}\gamma(1))^{1/(1-\delta)}\eta$ и для любого положительного числа μ.

Если $\alpha_r \leq 1$, то любая траектория (x_t) при $x_0 \in \bar{\mathfrak{F}}_r$ будет содержаться в $\bar{\mathfrak{F}}_r$. Если же $\alpha_r > 1$, то условие $a(\beta x) \subset \beta^\delta a(x)$ для всех $\beta > 1$, всех $x \in K$ и фиксированном $\delta \in (0, 1)$ является достаточным, чтобы любая траектория, исходящая из точки $x_0 \in \bar{\mathfrak{F}}_r$, содержалась в нормальном множестве $\alpha_r^{1/(1-\delta)} \bar{\mathfrak{F}}_r$.

5. Рассмотрим два отображения, тесно связанные с квазиоднородным отображением a. Обозначим через $\mathcal{Z}$ график отображения a. Пусть $\mathcal{Z}_* = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \varepsilon\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}_{**} = \overline{\bigcup\limits_{\varepsilon>0} \varepsilon\mathcal{Z}}$; отображения, графиками которых являются множества $\mathcal{Z}_*$ и $\mathcal{Z}_{**}$, обозначим соответственно через a_* и a_{**}.

Легко видеть, что отображения a_* и a_{**} являются: 1) однородными степени 1; 2) нормальными, в случае нормальности отображения a; 3) монотонными (возрастают), если a - возрастающее отображение; 4) замкнутыми, если a - замкнутое отображение (a_{**} замкнуто по определению); 5) полунепрерывными снизу, если a возрастает.

Положим $\alpha_* = \sup\{\alpha_*(x) : x \in K, x \neq 0\}$ и $\alpha_{**} = \sup\{\alpha_{**}(x) : x \in K, x \neq 0\}$, где $\alpha_*(x)$ и $\alpha_{**}(x)$ - функции роста отображений a_* и a_{**}.

ТЕОРЕМА 2. Если квазиоднородное отображение $a : K \longrightarrow \Pi_c(K)$, обладающее свойством $a(0) = \{0\}$, непрерывно, нормально и возрастает, то имеют место равенства: а) $\bar{\alpha} = \alpha_*$ и б) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha_{**}$, где $\bar{\alpha} = \lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t)$ и $\bar{\bar{\alpha}} = \lim\limits_{t \to +0} \gamma(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Понятно, что функция γ зависит от выбираемой нормы, но если интересоваться только ее пределами, то норму можно выбирать любую, поскольку в конечномерном пространстве они все эквивалентны.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие четыре леммы.

ЛЕММА 1. При фиксированном $x \in K$ верны равенства:

$$\{\alpha : \alpha x \in \bigcap_{\varepsilon>0} a_\varepsilon(x)\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{\alpha : \alpha x \in a_\varepsilon(x)\}, \tag{3}$$

$$\{\alpha : \alpha x \in \bigcup_{\varepsilon>0} a_\varepsilon(x)\} = \bigcup_{\varepsilon>0} \{\alpha : \alpha x \in a_\varepsilon(x)\}, \tag{4}$$

где отображение a_ε определяется формулой $a_\varepsilon(x) = \varepsilon a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

ЛЕММА 2. При фиксированном $x \in K$ функция $\beta_x(\varepsilon) = \sup\{\alpha : \alpha x \in a_\varepsilon(x)\}$ является возрастающей.

ЛЕММА 3. Справедливо следующее равенство:

$$\gamma_\varepsilon(1) = \gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Здесь, как и выше, γ есть функция роста отображения a. Через γ_ε обозначена функция роста отображения a_ε.

ЛЕММА 4. Всякое нормальное, замкнутое, возрастающее, квазиоднородное отображение $b: K \to 2^K$, где $\operatorname{dom} b \neq \emptyset$, либо ограничено, либо $b(x) = K$ для $x \neq 0$.

Доказательство лемм достаточно просто и потому опускается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. В силу леммы 4 отображения a и a_* ограничены. Относительно отображения a_{**} рассмотрим отдельно два случая:

a_{**} ограничено и $a_{**}(x) = K$ для некоторого $x \neq 0$.

I) Пусть a_{**} - ограниченное отображение.

Известно, что (см.[3]) если ограниченное отображение непрерывно по Какутани (т.е. замкнуто и полунепрерывно снизу), то оно непрерывно и по Хаусдорфу. Поэтому непрерывны по Хаусдорфу отображения a, a_* a_{**}.

Из непрерывности нормальных отображений a, a_ε (при фиксированном ε), a_* и a_{**} следует непрерывность на конусе $K \setminus \{0\}$ их функций роста $\alpha, \alpha_\varepsilon, \alpha_*$ и α_{**}.

Докажем сначала равенство а). Возьмем любую точку $x \in K$ и, воспользовавшись леммой 2 и равенством (3), получим: $\alpha_*(x) = \inf\limits_{\varepsilon > 0} \beta_x(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \beta_x(\varepsilon)$. Мы установили, что на пересечении сферы радиуса I с конусом K функции $\alpha_\varepsilon (\varepsilon > 0)$ и α_* непрерывны, а также, что при фиксированном x функция $\beta_x(\varepsilon) = \alpha_\varepsilon(x)$ монотонна по ε, значит, по теореме Дини $\alpha_\varepsilon(x) \to \alpha_*(x)$ равномерно по x при $\varepsilon \to +0$. Из последнего легко следует, что $\gamma_\varepsilon(1) \to \gamma_*(1)$ при $\varepsilon \to +0$ или верно равенство

$$\gamma_*(1) = \inf_{\varepsilon > 0} \gamma_\varepsilon(1) = \lim_{\varepsilon \to +0} \gamma_\varepsilon(1). \tag{6}$$

Воспользуемся теперь леммой 3 и окончательно получим:

$$\bar{\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = \inf_{t > 0} \gamma(t) = \inf_{t > 0} \gamma_{1/t}(1) = \gamma_*(1) = \gamma_*(t) = \alpha_*.$$

Равенство б) доказывается аналогично. Отметим только, что для получения результата $\alpha_{**}(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \alpha_\varepsilon(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to +\infty} \alpha_\varepsilon(x)$, где $x \in K$, нужно воспользоваться леммой 2 и равенством (4) леммы I. Точно так же, как и при доказательстве равенства а), с помощью теоремы Дини получаем равенство (7), аналогичное (6):

$$\gamma_{**}(1)=\sup_{\varepsilon>0}\gamma_\varepsilon(1)=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\gamma_\varepsilon(1), \qquad (7)$$

что вместе с равенством (5) из леммы 3 дает искомый результат:

$$\bar{\bar{\alpha}}=\lim_{r\to+0}\gamma(r)=\sup_{r>0}\gamma(r)=\sup_{r>0}\gamma_{1/r}(1)=\gamma_{**}(1)=\gamma_{**}(r)=\alpha_{**}.$$

2)Пусть теперь существует такой x, что $a_{**}(x)=K$, но тогда $a_{**}(x)=K$ и для всех $x\neq 0$.

Равенство а) доказывается аналогично. Равенство б), поскольку в этом случае $\alpha_{**}=+\infty$, примет вид $\bar{\bar{\alpha}}=+\infty$. Докажем его.

Итак, $a_{**}(x)=K$ для некоторого $x\in \operatorname{int}K$ и поскольку $a_{**}(x)=\overline{\bigcup_{\varepsilon>0}\varepsilon a(x/\varepsilon)}$, то $\bigcup_{\varepsilon>0}\varepsilon a(x/\varepsilon)\supset \operatorname{int}K$. Отсюда для любого $\lambda>0$ найдется $\varepsilon>0$ такой, что $\lambda x\in\varepsilon a(x/\varepsilon)$ или $\lambda\frac{x}{\varepsilon}\in a(\frac{x}{\varepsilon})$, т.е. $\alpha(x/\varepsilon)\geq\lambda$, или найдется такой радиус $r>0$, что $\gamma(r)\geq\lambda$. Таким образом, $\sup\gamma(r)=+\infty$, а поскольку функция $\gamma(r)$ непрерывна и монотонна, то $\lim_{r\to+0}\gamma(r)=+\infty$.

6. Возьмем точку $x\in K(x\neq 0)$ и обозначим через χ траекторию $x_0=x,x_1,\ldots,x_t,\ldots$, исходящую из точки x, а через $P(x)$ – пучок всех траекторий χ рассматриваемого нами квазиоднородного отображения a, исходящих из x. Разобьем все положительные числа на три класса:

$B_1(x)=\{\beta>0$: при $t\to\infty$ $\beta^{-t}x_t\to 0$ для всех $\chi\in P(x)\}$.

$B_2(x)=\{\beta>0$: найдется траектория $\chi\in P(x)$, что последовательность $(\beta^{-t}x_t)$ не ограничена$\}$.

Все остальные числа отнесем к классу $B_3(x)$.

Введем в рассмотрение функции $b_1(x)$ и $b_2(x)$: $b_1(x)=\inf\{\beta:\beta\in B_1(x)\}$, а $b_2(x)=\sup\{\beta:\beta\in B_2(x)\}$ для всех $x\in K$.

ТЕОРЕМА 3. Если отображение $a:K\to\Pi_c(K)$ квазиоднородное и возрастающее, то $\exists\beta>0$ такое, что для всех $x\in K$ $(x\neq 0)$ имеет место равенство $b_1(x)=b_2(x)=\beta$, т.е. функции $b_1(x)$ и $b_2(x)$ постоянны и равны.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

ЛЕММА. Если отображение $a: K \to \Pi_c(K)$ возрастает, то возрастающими на K окажутся и функции $b_1(x), b_2(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. I) Убедимся сначала в том, что функция $b_1(x)$ на конусе $K \setminus \{0\}$ постоянна. Пусть элемент $x \in K \setminus \{0\}$. Возьмем произвольно число $\gamma > 1$ и траекторию χ, исходящую из точки γx, т.е. $\chi \in P(\gamma x)$: $\chi = (\gamma x, x_1, x_2, \dots, x_t \dots)$. Отображение a и его степень квазиоднородны, т.е. для $t = 1, 2, \dots$ имеет место включение $a^t(\gamma x) \subset \gamma a^t(x)$, что позволяет сделать вывод о принадлежности траектории $\chi/\gamma = (x, x_1/\gamma, x_2/\gamma, \dots, x_t/\gamma, \dots)$ множеству $P(x)$, т.е. x/γ есть траектория отображения a, исходящая из точки x. Возьмем число $\beta \in B_1(x)$, тогда $x_t/\gamma\beta^t \to 0$ при $t \to \infty$, а значит, сходится к нулю и последовательность (x_t/β^t), т.е. $\beta \in B_1(\gamma x)$.

Мы показали, что имеет место включение $B_1(\gamma x) \supset B_1(x)$ для $\gamma > 1$, а с учетом следующего из леммы включения $B_1(x'') \subset B_1(x')$ для $x' \leq x''$ получим равенство $B_1(\gamma x) = B_1(x)$, где $\gamma \geq 1$. Отсюда следует равенство

$$b_1(\gamma x) = b_1(x) \quad (\gamma \geq 1). \quad (8)$$

Пусть точка $z \in K$ такова, что $x \leq z \leq \gamma x$, тогда в силу монотонности функции $b_1(x)$ (см. лемму) имеем $b_1(x) \leq b_1(z) \leq b_1(\gamma x)$, а с учетом равенства (8) устанавливаем что $b_1(z) = b_1(x) = b_1(\gamma x)$. Поскольку γ - любое действительное число, большее единицы, то, устремляя γ к $+\infty$, мы получим, что и для всех $z \geq x$ верно $b_1(z) = b_1(x)$. Покажем, что функция b_1 всюду на множестве $K \setminus \{0\}$ принимает это же значение $b_1(x)$.

Возьмем другую произвольную точку x_1 из конуса $K \setminus \{0\}$. Точно также можно показать, что $b_1(z) = b_1(x_1)$ для всех $z \geq x_1$, но поскольку множества $\{z : z \geq x\}$ и $\{z : z \geq x_1\}$ для выбранных произвольно x и x_1 имеют непустое пересечение, то $b_1(x_1) = b_1(x)$. Итак, функция b_1 постоянна.

2) Осталось убедиться в тождественном равенстве функций $b_2(x)$ и $b_1(x)$ на конусе $K \setminus \{0\}$.

Из определения функций $b_1(x)$ и $b_2(x)$ ясно, что всюду на $K\setminus\{0\}$ верно неравенство $b_2(x)\le b_1(x)$. Предположим, что нашелся такой элемент $x\in K\setminus\{0\}$, для которого верно строгое неравенство, т.е. $b_2(x)<b_1(x)$. Тогда существует два неравных числа γ_1 и γ_2, например $\gamma_2<\gamma_1$, лежащих между $b_1(x)$ и $b_2(x)$:

$$b_2(x)<\gamma_2<\gamma_1<b_1(x).$$

Из того, что $\gamma_2>b_2(x)$, следует, что для любой траектории $\chi=(x_t)$ отображения a, исходящей из точки x, последовательность $\left(x_t/\gamma_2^t\right)$ окажется ограниченной. Представим $\left(x_t/\gamma_1^t\right)$ в виде: $x_1/\gamma_1^t=\left(\gamma_2/\gamma_1\right)^t\cdot x_t/\gamma_2^t$. Так как $\gamma_1>\gamma_2$, то последовательность $\left(x_t/\gamma_1^t\right)$ будет стремиться к нулю. В силу же произвольности выбора траектории $\chi\in P(x)$ получим, что $\gamma_1\in B_1(x)$ и, значит, $\gamma_1\ge b_1(x)$, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, на множестве $K\setminus\{0\}$ функция $b_2(x)$ тождественно равна постоянной функции $b_1(x)$. Обозначим их общее значение через β: $b_2(x)=b_1(x)=\beta$ для всех $x\in K\setminus\{0\}$. Непосредственно из данной теоремы получаем очевидное

СЛЕДСТВИЕ. Класс $B_3(x)$ отображения a для всех $x\in K\setminus\{0\}$ либо пуст, либо состоит из единственного элемента $\beta>0$ и тогда все последовательности $\beta^{-t}x_t$, где $(x_t)\in P(x)$, а $t=0,1,\ldots$, ограничены, но не все стремятся к нулю.

Определенное таким образом число $\beta>0$ называется нормирующим числом отображения a.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для однородных степени 1 отображений нормирующим числом является темп роста (для отображений a_* и a_{**} это числа α_* и α_{**}, если $\alpha_{**}\ne+\infty$).

Легко видеть, что для нормирующих чисел β,β_*,β_{**} монотонных отображений a,a_*,a_{**} имеет место неравенство $\beta_*\le\beta\le\beta_{**}$.

Объединим результаты теоремы 2, последнего замечания и предложения.

ТЕОРЕМА 4. Пусть квазиоднородное

отображение $\alpha: K \to \Pi_c(K)$., обладающее свойством $\alpha(0)=\{0\}$, непрерывно, нормально и возрастает, тогда нормирующее число β для α заключено в пределах между величинами $\underline{\alpha}=\lim_{r\to+\infty}\gamma(r)$ и $\bar{\alpha}=\lim_{r\to+0}\gamma(r)$, т.е. $\underline{\alpha}\le \beta\le\bar{\alpha}$.

7. ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha: K\to\Pi_c(K)$ – квазиоднородное, возрастающее, нормальное, непрерывное отображение, обладающее свойством $\alpha(0)=\{0\}$, и пусть нормирующее число этого отображения $\beta=1$ и принадлежит классу $B_3(x)$ при $x\neq 0$. Если найдется точка $\bar{x}\neq 0$ такая, что $\alpha(\bar{x})=1$, то множество $\bar{\mathfrak{F}}=\bigcup_{t=1}^{\infty}\alpha^t(\bar{x})$ является инвариантным компактом этого отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Выше было показано, что

$$\lim_{r\to+\infty}\gamma(r)=\alpha_*=\beta_*\le\beta\le\beta_{**}=\alpha_{**}=\lim_{r\to+0}\gamma(r).$$

Существование вектора $\bar{x}$ со свойством $\alpha(\bar{x})=1$ равносильно тому, что $\lim_{r\to+\infty}\gamma(r)<\beta<\lim_{r\to+0}\gamma(r)$ (здесь $\beta=1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что множества $\alpha(x)$ выпуклы и замкнутое отображение α имеет инвариантный компакт $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме Какутани о неподвижной точке существует точка $\bar{x}$, для которой $\bar{x}\in\alpha(\bar{x})$. Теорема 5 показывает, что из соотношения $\bar{x}\in\alpha(\bar{x})$ при сделанных в этой теореме предположениях вытекает существование инвариантного компакта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 5. Пусть $\bar{x}\in\alpha(\bar{x})$. Поскольку $\alpha^t(\bar{x})\subset\alpha^{t+1}(\bar{x})$, где $t=1,2,\ldots$, то верна следующая цепочка включений: $\bar{x}\in\alpha(\bar{x})\subset\alpha^2(\bar{x})\subset\ldots\subset\alpha^t(\bar{x})\subset\ldots$
Введем следующее обозначение: $\mathfrak{F}=\bigcup_{t=1}^{\infty}\alpha^t(\bar{x})$, тогда $\bar{x}\in\mathfrak{F}$.
Рассмотрим $\alpha(\mathfrak{F})=\alpha\left(\bigcup_{t=1}^{\infty}\alpha^t(\bar{x})\right)=\bigcup_{t=1}^{\infty}\alpha^{t+1}(\bar{x})=\mathfrak{F}$, значит, $\alpha(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$ и множество $\mathfrak{F}$ является инвариантным для отображения α.

Покажем, что для того, чтобы множество $\bar{\mathfrak{F}}$ являлось инвариантным компактом отображения α, необходимо и достаточно, чтобы это множество $\bar{\xi}$ было ограниченным.

Пусть $y \in a(\bar{\xi})$ и элемент $x \in \bar{\xi}$ таков, что $y \in a(x)$. Выберем последовательность (x_n) элементов множества ξ, стремящуюся к x, и, используя полунепрерывность снизу отображения a, найдем последовательность (y_n), обладающую тем свойством, что $y_n \to y$ и $y_n \in a(x_n)$. Так как $x_n \in \xi$, то $y_n \in a(\xi)$, стало быть, $y \in \bar{\xi}$. Таким образом, включение $a(\bar{\xi}) \subset \bar{\xi}$ доказано.

Из включения $\bar{\xi} \supset \xi$ вытекает соотношение $a(\bar{\xi}) \supset a(\xi) = \xi$. Если множество $\bar{\xi}$ ограничено, тогда $a(\bar{\xi})$ замкнуто (поскольку отображение a замкнуто, а $\bar{\xi}$ компактно) и $a(\bar{\xi})$ будет ограничено в силу ограниченности отображения a. Таким образом, множество $a(\bar{\xi})$ будет компактом, а значит, $a(\bar{\xi}) \supset \bar{\xi}$ и равенство $a(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$ верно.

Покажем теперь ограниченность множества $\bar{\xi}$.

Установим, что возрастающая числовая последовательность $(\lambda_t): \lambda_t = \sup\{\lambda : \lambda\bar{x} \in a^t(\bar{x})\}$, где $t = 1, 2, \ldots$, ограничена сверху.

Итак, предположим, что последовательность (λ_t) не ограничена, тогда не будет ограниченной и последовательность точек $\lambda_t \bar{x}$, лежащих на положительных границах множеств $a^t(\bar{x})$.

Для каждой из точек $\lambda_t \bar{x}$ найдется конечная, исходящая из $\bar{x}$, t-шаговая траектория, которая будет заканчиваться этой точкой $\lambda_t \bar{x}$. Понятно, что $\lambda_1 = 1$, а для $t > 2$ выполняется $\lambda_t \geq 1$. Запишем эти траектории:

1-шаговая траектория: $\bar{x}, \lambda_1 \bar{x} = \bar{x}$;

2-шаговая траектория: $\bar{x}, x_{2a}, \lambda_2 \bar{x}$;

3-шаговая траектория: $\bar{x}, x_{3a}, x_{3a^2}, \lambda_3 \bar{x}$;

4-шаговая траектория: $\bar{x}, x_{4a}, x_{4a^2}, x_{4a^3}, \lambda_4 \bar{x}$;

- -

t-шаговая траектория: $\bar{x}, x_{ta}, x_{ta^2}, \ldots, x_{ta^{t-1}}, \lambda_t x$;

- -

где $x_{ta^{t-1}} \in a^{t-1}(\bar{x})$ при $t \geq 2$. "Склеим" теперь последовательно эти траектории, отбросив у всех, кроме первой, начальную точку $\bar{x}$.

Таким образом, получим бесконечную траекторию $\bar{x}, \bar{x}, x_{2a}, \lambda_2 \bar{x}, x_{3a}, x_{3a^2}, \lambda_3 \bar{x}, \ldots, \lambda_4 \bar{x}, \ldots, \ldots, \lambda_t \bar{x}, \ldots$, исходящую из точки $\bar{x}$ и проходящую через точки $\lambda_t \bar{x}$ не ограниченной по предположению последовательности.

Итак, построенная бесконечная траектория с начальной точкой $\bar{x}$ не является ограниченной, что противоречит ранее установленному утверждению об ограниченности всех бесконечных траекторий, исходящих из $\bar{x}$. Получили, что предположение о неограниченности последовательности (λ_t) неверно. Обозначим $\sup_t \lambda_t^t$ через $\bar{\lambda}$.

Убедимся в том, что это число $\bar{\lambda}$ связано с инвариантным множеством $\bar{F} = \bigcup_{t=1}^{\infty} a^t(\bar{x})$ следующим образом:

$$\bar{\lambda} = \sup \{\lambda : \lambda \bar{x} \in \overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} a^t(\bar{x})}\}. \qquad (9)$$

Для этого нужно проверить два условия. Во-первых, что для всех λ таких, что $\lambda \bar{x} \in \overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} a^t(\bar{x})}$, имеет место неравенство $\lambda \leq \bar{\lambda}$. Пусть $\lambda \bar{x} \in \overline{\bigcup_t a^t(\bar{x})}$, тогда найдется числовая последовательность (μ_k) такая, что $\lambda \bar{x} = \lim_{k \to \infty} \mu_k \bar{x}$ и $\mu_k \bar{x} \in \bigcup_t a^t(\bar{x})$. Последнее означает, что для любого натурального k найдется такой номер t, что будет выполняться условие $\mu_k \bar{x} \in a^t(\bar{x})$, а значит, $\mu_k \leq \lambda_t$. Поэтому $\lambda \leq \bar{\lambda}$.

Так как $\bar{\lambda} = \sup_t \lambda_t$, то для любого $\varepsilon > 0$ при некотором номере t' будем иметь $\lambda_{t'} > \bar{\lambda} - \varepsilon$. Из условия $\lambda_{t'} \bar{x} \in a^{t'}(\bar{x})$ следует, что $\lambda_{t'} \bar{x} \in \overline{\bigcup_t a^t(\bar{x})}$. Итак, равенство (9) доказано.

Полуинвариантное множество $\bar{F}$ нормально, значит, $\bar{F} \cap \{x \in K : x \gg \bar{\lambda} \bar{x}\} = \emptyset$ и справедливо включение $\bar{F} \subset K \setminus \{x \in K : x \gg \bar{\lambda} \bar{x}\}$, которое позволяет легко проверить ограниченность множества $\bar{F}$.

Таким образом, установлено, что на инвариантном компакте $\bar{F}$ указанного отображения a все траектории будут сходиться к множеству $W_a^{\bar{F}}$.

Автор выражает глубокую благодарность А.М.Рубинову за постановку проблемы и ее обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. ОПОЙЦЕВ В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. - М.:Наука, 1977.

2. СМИРНОВ А.И. Анализ развития популяции в условиях нестационарной среды. – В кн.: Методы для нестационарных задач математического программирования. Свердловск, 1979, с.94–103.
3. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. – Л.:Наука, 1980.

Поступила в ред.изд. отдел
18.04.1983 г.