Модели динамики и равновесия

УДК 51.330.115

ТЕОРЕМЫ ЭРГОДИЧНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

А.Ж.Жафяров

В работе исследована асимптотика траекторий*), исходящих из граней неотрицательного ортанта для моделей, порождаемых неотрицательными и квазинеотрицательными матрицами. Полученные результаты позволяют доказать теорему о необходимых и достаточных условиях сходимости всех траекторий к лучу, не предполагая в отличие от работ [2,3] регулярности и неотрицательности, а в отличие от работ [4,5] примитивности матрицы, определяющей данную модель. Кроме того, дается описание магистрали в смысле, принятом в [6]. Теоремы эрготичности в слабой и сильной формах получены как следствие приведенных выше результатов.

1. В этом пункте дается описание модели и вводятся необходимые определения.

Пусть имеется 1,2..., s подразделений (районов, регионов); неразложимая (неотрицательная или квазинеотрицательная) матрица A_i, $1\le i\le S$, описывает производство продуктов (воспроизводство населения) подразделения i. Переход продуктов (движение населения) из района j в район i будем характеризовать неотрицательной матрицей A_{ij}, $1\le i; j\le S, i\ne j$. В дальнейшем интерпретацию модели для краткости будем проводить применительно к движению населения. Аналогичную интерпретацию можно проводить относительно производства продуктов.

Матрица A, описывающая весь процесс миграции населения, имеет сложный блочный вид:

*) Используется терминология, принятая в [1].

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_2 & \dots & A_{2s} \\ - & - & - & - \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_s \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где матрицы $A_1,\dots,A_s$ – неразложимые, A_{ij} – неотрицательные, причем некоторые из подматриц A_{ij} могут быть нулевыми.

Матрица A может быть как неразложимой, так и разложимой. В первом случае, как уже отмечено, модель не адекватна реальной жизни [7, с.94]. Во втором случае одновременной перестановкой строчек и столбцов матрицы A приведем ее к нормальному виду [8, с.373].

Матрицу, полученную из A указанной перестановкой, обозначим через B. Пусть матрица B имеет следующий нормальный вид:

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & B_g & 0 & \dots & 0 \\ B_{g+1,1} & \dots & B_{g+1,g} & B_{g+1} & \dots & & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ B_{k1} & \dots & B_{kg} & & \dots & & B_k \end{pmatrix} \qquad (2)$$

где $B_1,\dots,B_k$ – неразложимые (неотрицательные или квазинеотрицательные) подматрицы, каждая из которых состоит либо из одной диагональной подматрицы матрицы A, либо имеет более сложную структуру с диагональными подматрицами матрицы A, расположенными вдоль главной диагонали. Для дальнейшего изложения нам будет полезно договориться, что по главной диагонали матрицы B_i, $1\le i\le k$, расположены подматрицы $A_{m_1}, A_{m_2},\dots,A_{m_i}$, $1\le m_j\le s$, $1\le j\le i$. Приведение матрицы A к нормальному виду равносильно перенумерации подгрупп базисных векторов пространства размерности $n_1+n_2+\dots+n_s$, где n_i – размерность матрицы A_i, $1\le i\le s$, причем в подгруппах никаких относительных изменений не происходит.

С содержательной точки зрения представление матрицы A в виде (2) означает следующее: можно перенумеровать районы $1,\dots,s$ и компоновать новые, возможно, более крупные районы, так, что 1) иммиграция населения в район i, $1\le i\le k$, возможна только из предшествующих районов; 2) из любого района с номером $j\in\{1,2,\dots,g\}$ возможна только эмиграция населения, хотя и не обязательна; 3) в районы $g+1,\dots,k$ заведомо существует приток населения.

Указанные требования 1)–3) имеют вполне реальную основу. Если, например, население разбить на подгруппы по обученности, то учащиеся, например, 6-х классов будут переходить в подгруппу учащихся 7-х классов, а наоборот – нет.

Объектом дальнейшего изучения будет модель, описываемая конечно-разностным уравнением вида

$$x_{t+1} = Bx_t , \tag{3}$$

где x_τ – вектор структуры населения в момент времени τ, $\tau=0,1,\dots$, матрица B имеет вид (2).

Отметим, что модели вида (3), описываемые неразложимой матрицей, представляют частный случай модели, когда $k=1$.

2. Здесь доказана теорема об асимптотике траекторий, исходящих из граничных точек неотрицательного ортанта R^+_n. Из этих результатов следует справедливость теорем эргодичности, изучающих вопросы сходимости населения района (региона) к стабильному состоянию. Предварительно введем необходимые для дальнейшего изложения понятия темпа роста, неотрицательной связи между районами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что район с номером i, $1\le i\le k$, имеет m-шаговую неотрицательную связь с районом j, $1\le j< i$, если найдется строго возрастающая последовательность $(l_0,l_1,\dots,l_m)$ такая, что $l_0=j,\dots,l_m=i, b_{l_{f+1},l_f}\neq 0, 0\le f\le m-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Число $\alpha>0$ назовем темпом роста модели (3), если найдется ненулевой неотрицательный вектор $\bar{x}$ такой, что $\alpha\bar{x}=B\bar{x}$.

Приведенное определение является существенным обобщением понятия темпа роста, широко принятого в литературе по демографии, когда предполагается строгая положительность вектора структуры $\bar{x}$. Мы также будем считать, что в микроподразделениях $1,2,\dots,k$ вектор структуры $\bar{x}^i$, $1\le i\le k$, строго положительный. Из этого соглашения следует, что если модель состоит из одного подразделения (т.е. когда матрица A неразложима), то наше определение совпадает с общепринятым в емографии.

Резюмируя сказанное выше, получим следующее определение темпа роста населения района с номером $i \in \{1, \dots, k\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I$'$. Число $\alpha > 0$ называется темпом роста населения района i, $1 \le i \le k$, модели (3), если вектор $\bar{x}^i$ в представлении правого собственного вектора $x = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k)$ матрицы B, соответствующего числу α, является строго положительным в R_{n_i}, где n_i – размерность диагонального блока B_i в нормальном виде (3) матрицы B.

Из этого определения следует, что темп роста населения района с номером i (короче, района i) заведомо является темпом роста всей модели. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Заметим также, что если α – темп роста модели (3), то это число, вообще говоря, не является темпом роста всего населения, определяемого моделью (3). Теоремы о темпах роста в приведенных выше формах указаны в работе [9], поэтому на них останавливаться не будем.

Вопрос об асимптотике населения имеет исключительно важное значение в исследованиях по демографии и изучался многими авторами [5]. В большинстве работ, посвященных данному вопросу, на матрицу B в уравнении (3) накладывается очень сильное ограничение, требующее ее примитивности. В нашей модели матрица B может быть разложимой (неотрицательной или квазинеотрицательной). Такой подход существенно расширяет классы населений, которые могут быть адекватно описаны моделью (3).

Исследование асимптотики траектории населения будем проводить следующим образом. Выберем произвольный район i, $1 \le i \le k$. Изучим сходимость населения этого района к стационарному состоянию в зависимости от того, равен его собственный темп роста r_i или нет α – наибольшему темпу роста модели и имеет или нет район i неотрицательную связь с районом наибольшего темпа роста.

Для дальнейшего изложения необходимо накладывать на матрицы $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{ij}$, $1 \le j, i \le k$, $i \ne j$, некоторые ограничения.

Будем считать для определенности, что наибольший темп роста модели α достигается в районе с номером j, $1 \le j \le k$. Для простоты рассуждений сначала будем предполагать, что лишь для единственного номера j выполняется равенство $\alpha = r_j$, где

r_j – положительное перроново число матрицы B_j.

Введенные ограничения не являются существенными. Более существенное ограничение состоит в следующем:

– матрица B_j является примитивной.

В имеющихся работах, посвященных асимптотике траекторий, ограничения на модель носят существенно более жесткий характер. В этих работах предполагается примитивность самой матрицы B, что снижает возможность применения таких моделей для изучения реальной жизни.

Обозначим через x^j и p^j соответственно правый и левый собственные векторы матрицы B_j, соответствующие ее перронову числу $\alpha = r_j > 0$. Не нарушая общности, можно считать, что скалярное произведение $p^j \cdot x^j = 1$.

Начальное состояние населения, описываемого моделью (3), обозначим через x_0 и представим его в виде $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^k)$ в соответствии с представлением матрицы B в виде (2), причем впредь будем считать x_0^j неотрицательным ненулевым вектором. Аналогично представим равновесный вектор структуры $\bar{x}$ в виде: $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k)$, где $\alpha \bar{x} = B\bar{x}$, $\bar{x}^j = x^j$, $\bar{x}^1 = \ldots = \bar{x}^{j-1} = 0$, $\bar{x}^i = (\alpha E - B_i)^{-1} \sum_{\ell=j}^{i-1} B_{i\ell} \bar{x}^\ell$. Заметим, что $\bar{x}^i > 0$ для всех районов i, имеющих неотрицательную связь с районом j, $j < i \leq k$.

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать приводимую ниже теорему об асимптотике траекторий модели (3), исходящих из граничных точек конуса R_n^+. Эта теорема позволяет получить теоремы эргодичности как для всего населения, так и отдельных регионов (районов). Причем из нее следует, что теорема эргодичности в сильной форме для всего населения или региона имеет место только для таких начальных состояний $x_0^j \geq 0, x_0^j \neq 0$ района j, которые принадлежат определенным поверхностям уровня, а именно, гиперплоскостям $p^j \cdot x = \xi$, $\xi > 0$, пространства R_{n_j}. Отметим также, что теоремы эргодичности в слабой и сильной формах не зависят от начальных состояний населений районов, отличных от района с наибольшим темпом роста.

ТЕОРЕМА I. Население района $i, 1 \leq i \leq k$, модели (3) растет с наибольшим темпом роста $\alpha = r_j$ и стремится к стабильному состоянию ξx^i, $\xi = p^j \cdot x_0^j > 0$, тогда и только тогда, когда этот район имеет неотрицательную связь с районом наибольшего темпа роста.

Чтобы подчеркнуть важность этой теоремы, выведем из нее ряд важных следствий, представляющих собой различные формы теорем эргодичности. Доказательство теоремы будет приведено ниже.

I. Для всех районов, имеющих неотрицательную связь с районом наибольшего темпа роста, имеют место теоремы эргодичности в слабой и сильной формах*). Причем сильная форма имеет место лишь для таких начальных состояний x_0^j района j с наибольшим темпом роста, которые принадлежат гиперплоскостям $p^j \cdot x = \xi, \xi > 0$, пространства R_{n_j}.

2. Вектор структуры населения района i, имеющего неотрицательную связь с районом j, определяется строго положительным вектором $\xi \bar{x}^i$, где

$$\bar{x}^i = (\alpha E - B_i)^{-1} \sum_{f=j}^{i-1} B_{if} \bar{x}^f, \tag{4}$$

$\xi = p^j \cdot x_0^j > 0, \bar{x}^j = x^j$ – правый собственный вектор матрицы B_j, соответствующий ее перронову числу $\alpha = r_j$.

3. Отношение численности населения всех районов, которые не имеют неотрицательной связи с районом j, к численности населения районов, имеющих эту неотрицательную связь, стремится к нулю.

4. Население модели (3) растет с наибольшим темпом роста α и стремится к стабильному состоянию, определяемому вектором $\xi\bar{x} = (0, \dots, \xi\bar{x}^j, \xi\bar{x}^{j+1}, \dots, \xi\bar{x}^k)$, где $\xi = p^j \cdot x_0^j$, $\bar{x}^j = x^j$, остальные векторы находятся по рекуррентной формуле (4), причем $\bar{x}^i = 0$ для всех районов i, не имеющих неотрицательной связи с районом j, и $\bar{x}^f > 0$ в R_{n_f} для всех районов, имеющих неотрицательную связь с районом j.

5. Все население растет с наибольшим темпом роста α и стремится к стабильному состоянию $\xi\bar{x}$, где $\xi = p^1 \cdot x_0^1 > 0$, $\alpha\bar{x} = B\bar{x}$, тогда и только тогда, когда $r_1 = \alpha$, $g = 1$. При-

---

*) Под слабой (сильной) формой теоремы эргодичности подразумевается сходимость по угловому расстоянию (к одной и той же точке) различных траекторий.

чем теорема эрготичности в сильной форме выполняется только для таких начальных состояний $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^k)$, для которых неотрицательный ненулевой вектор x_0^1 принадлежит гиперплоскости $p^1\cdot x=\xi$, $\xi>0$, пространства R_{n_1}.

6. Слабая форма теоремы эргодичности имеет место для любых начальных состояний.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Предварительно приведем следующие леммы.

ЛЕММА I. Пусть x^j и p^j - правый и левый собственный векторы примитивной матрицы B_j, соответствующие её перронову числу α, $x_0^j\in R_{n_j}^+$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}(\alpha^{-1}B_j)^t x_0^j=\xi x^j$, где $\xi=p^j\cdot x_0^j>0$ (считаем $p^j\cdot x^j=1$).

Доказательство опускаем ввиду того, что оно приведено многими авторами (см., например, [5, с.I70; 7, с.I48].

ЛЕММА 2. Пусть район i, $1\le i\le k$, имеет одношаговую неотрицательную связь с районом j наибольшего темпа роста, $1\le j<i\le k$. Тогда население района i растет с темпом роста $\alpha=r_j$ и стремится к стабильному состоянию, определяемому вектором $\xi\bar{x}^i$, где $\xi=p^j\cdot x_0^j>0$, $\bar{x}^i=(\alpha E-B_i)^{-1}B_{ij}x^j$, x^j - правый собственный вектор примитивной матрицы B_j, соответствующий ее перронову числу $r_j>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_t^i=Q_t^1 x_0^j$ - вектор структуры населения района i в момент времени t, порожденный потоком эмигрантов из района j с начальным состоянием $u=x_0^j$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$Q_t^1=B_{ij}B_j^{t-1}+B_iB_{ij}B_j^{t-2}+\dots+B_i^{t-f-1}B_{ij}B_j+B_i^{t-1}B_{ij}. \quad (5)$$

Так как по лемме I $\lim\limits_{t\to\infty}(\alpha^{-1}B_j)_u^t=\xi x^j$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется номер q такой, что при $t\ge q$

$$(\alpha^{-1}B_j)^t u\in\xi x^j+\varepsilon S, \quad (6)$$

где S - единичный шар в пространстве R_{n_j}.

Последовательность $(\alpha^{-1}B_j)^t u$ сходится к точке ξx^j, поэтому найдется число $\delta>0$ такое, что для всех t имеет место соотношение

$$(\alpha^{-1}B_j)^t u \in \xi x^j + \delta S. \qquad (7)$$

Матрицу Q_t^1 представим в виде:

$$Q_t^1=(B_{ij}B_j^{t-1}+\ldots+B_i^{t-q-1}B_{ij}B_j^q)+(B_i^{t-q}B_{ij}B_j^{q-1}+\ldots+B_i^{t-1}B_{ij}).$$

Тогда имеет место включение:

$$\alpha^{-1}Q_t^1 u\in(E+B_i+\ldots+\alpha^{1-t-q}B_i^{t-q-1})\frac{1}{\alpha}B_{ij}(\xi x^j+\varepsilon S)+$$

$$+(\alpha^{q-t}B_i^{t-q}+\ldots+\alpha^{1-t}B_i^{t-1})\frac{1}{\alpha}B_{ij}(\xi x^j+\delta S)=(\alpha E-B_i)^{-1}((E-$$

$$-\alpha^{q-t}B_i^{t-q})B_{ij}(\xi x^j+\varepsilon S)+(\alpha^{q-t}B_i^{t-q}-$$

$$-\alpha^{-t}B_i^t)B_{ij}(\xi x^j+\delta S)).$$

Для указанного выше $\varepsilon>0$ выбираем число τ так, чтобы имело место соотношение: $\alpha^{-\tau}B_i^{\tau}B_{ij}(\xi x^j+\delta S)\subset\varepsilon S$. Такое число τ существует в силу ограниченности множества $\xi x^j+\delta S$ и истинности соотношений

$$\|B_i\|=\max_{\|x\|\le 1}\|B_i x\|=r_i<r_j,\ i\ne j,\ 1\le i;\ j\le k,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Выберем натуральное число $t>q+\tau$. Тогда справедливы следующие включения:

$$\alpha^{q-t}B_i^{t-q}B_{ij}(\xi x^j+\delta S)\subset\varepsilon S,\ \alpha^{-t}B_i^tB_{ij}(\xi x^j+\delta S)\subset\varepsilon S.$$

Так как для достаточно малых положительных ε имеет место соотношение $\xi x^j+\varepsilon S\subset\xi x^j+\delta S$, то для $t>q+\tau$ тем более справедливо включение $\alpha^{q-t}B_i^{t-q}B_{ij}(\xi x^j+\varepsilon S)\subset\varepsilon S$. Поэтому для указанных значений t имеем

$$\alpha^{-t}Q_t^1u\in(\alpha E-B_i)^{-1}(B_{ij}(\xi x^j+\varepsilon S)+3\varepsilon S).$$

Учитывая произвольность ε, получим

$$x_t^i/\alpha^t=\alpha^{-t}Q_t^1(x_0^j)\xrightarrow[t\to\infty]{}\xi(\alpha E-B_i)^{-1}B_{ij}x^j=\xi\bar{x}^i.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть район i имеет m-шаговую неотрицательную связь с районом j, $1 \le j < i \le k$ $(B_{\ell_{f+1},\ell_f})_{f=0}^{m-1}$ – последовательность матриц, осуществляющая неотрицательную связь районов j и i, т.е. $\ell_0 = j$, $\ell_m = i$, $B_{\ell_{f+1},\ell_f} \ne 0$, $0 \le f \le m-1$; $Q_t^m x_0^j$ – вектор возрастной структуры населения i в момент времени t, порожденный потоком эмигрантов из района j с начальным состоянием $x_0^j \in R_{n_j}^+ \setminus \{0\}$ и указанной неотрицательной связью. Тогда для любого $t \ge m$ имеет место рекуррентное соотношение:

$$Q_t^m = CQ_{t-1}^{m-1} + B_i CQ_{t-2}^{m-1} + \ldots + B_i^{t-m-1} CQ_m^{m-1} + B_i^{t-m} CQ_{m-1}^{m-1}, \tag{8}$$

где $C = B_{i,\ell_{m-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции для $t \ge m$. Пусть $y_t^{\ell_{m-1}}, y_t^i$ – векторы возрастных структур соответственно районов ℓ_{m-1} и $\ell_m = i$ в момент времени t, порожденные вектором $u = x_0^j$ и указанной неотрицательной связью $(B_{\ell_{f+1},\ell_f})_{f=0}^{m-1}$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что $y_t^i = y_t^{\ell_{m-1}} u = 0$ для любого $t = 0, 1, \ldots$, кроме того, $y_{m-1}^i = 0$. По определению множества Q_t^m имеем, что $y_t^{\ell_{m-1}} = Q_t^{m-1} u$, $y_t^i = Q_t^m u$. При $t = m$ получим $y_m^i = Q_m^m u = Cy_{m-1}^{\ell_{m-1}} = CQ_{m-1}^{m-1} u$. Так как u – произвольный вектор, то отсюда получаем $Q_m^m = CQ_{m-1}^{m-1}$, т.е. формула (8) верна для $t = m$. Пусть теперь эта формула верна для $t-1 > m$, т.е. имеет место равенство

$$Q_{t-1}^m = CQ_{t-2}^{m-1} + B_i CQ_{t-3}^{m-1} + \ldots + B_i^{t-m-1} CQ_{m-1}^{m-1}.$$

Нетрудно убедиться, что $Q_t^m = CQ_{t-1}^{m-1} + B_i Q_{t-1}^m$. Тогда

$$Q_t^m = CQ_{t-1}^{m-1} + B_i (CQ_{t-2}^{m-1} + B_i CQ_{t-3}^{m-1} + \ldots + B_i^{t-m-1} CQ_{m-1}^{m-1}).$$

Отсюда следует справедливость равенства (8). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанная лемма позволяет вычислить Q_t^m, если известно Q_{t-1}^{m-1}.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены следующие условия: I) $(B_{\ell_{f+1},\ell_f})_{f=0}^{m-1}$ – последовательность матриц, осуществляющая неотрицательную связь районов j и i; 2) $Q_t^m x_0^j = y_t^i$ – вектор возрастной структуры населения района i в момент времени t, $t=0,1,\ldots$, порожденный потоком эмигрантов района j с начальным состоянием $x_0^j \in R_{n_j}^+ \setminus \{0\}$ и указанной неотрицательной связью; 3) $y^{\ell_{f+1}} = (\alpha E - B_{\ell_{f+1}})^{-1} B_{\ell_{f+1},\ell_f} y^{\ell_f}$, где $f=0,1,\ldots,m-1$; $y^{\ell_0} = y^j = x^j$. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{t\to\infty}(\alpha^{-t} Q_t^m x_0^j) = \xi y^i, \quad (\xi = p^j \cdot x_0^j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции по параметру m, т.е. по числу шагов неотрицательной связи между районами j и i. Если $m=1$, то справедливость утверждения следует из леммы 2. Пусть теперь лемма справедлива для любой неотрицательной связи между районами j и i с $m-1$ $(m>1)$ числом шагов, т.е. $\lim_{t\to\infty}(\alpha^{-t} Q_t^{m-1} x_0^j) = \xi y^{\ell_{m-1}}$, $1<h\le m-1$. По лемме 3 имеем, что

$$Q_t^m = C Q_{t-1}^{m-1} + B_i C Q_{t-2}^{m-1} + \cdots + B_i^{t-m-1} C Q_m^{m-1} + B_i^{t-m} C Q_{m-1}^{m-1}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Найдутся натуральные числа q и $\delta>0$ такие, что будут иметь место включения:

$$\alpha^{-q} Q_q^{m-1} x_0^j \in \xi y^{\ell_{m-1}} + \varepsilon S, \quad \alpha^{-t} Q_t^{m-1} x_0^j \in \xi y^{\ell_{m-1}} + \delta S,$$

где $t=0,1,\ldots$ Тогда для значений $t>q$ справедливы соотношения:

$$\alpha^{-t} Q_t^m x_0^j \in (E + \alpha^{-1} B_i + \ldots + \alpha^{1+t-q} B_i^{t-q-1}) \frac{1}{\alpha} C(\xi y^{\ell_{m-1}} + \varepsilon S) +$$

$$+ (\alpha^{q-t} B_i^{t-q} + \ldots + \alpha^{m-t} B_i^{t-m}) \frac{1}{\alpha} C(\xi y^{\ell_{m-1}} + \delta S) =$$

$$= (\alpha E - B_i)^{-1} ((E - \alpha^{q-t} B_i^{t-q}) C(\xi y^{\ell_{m-1}} + \varepsilon S) +$$

$$+ (\alpha^{q-t} B_i^{t-q} - \alpha^{m-t-1} B_i^{t-m+1}) C(\xi y^{\ell_{m-1}} + \delta S)).$$

Выберем число τ такое, чтобы для выбранных ε и δ выполнялось включение:

$$\alpha^{-\tau} B_i^{\tau} C(\gamma y^{l_{m-1}} + \delta S) \subset \varepsilon S.$$

Для чисел $t > q + \tau$ имеем

$$\alpha^{-t} Q_t^m x_0^i \in (\alpha E - B_i)^{-1} (C(\gamma y^{l_{m-1}} + \varepsilon S) + 3\varepsilon S).$$

В силу произвольности ε получим

$$\alpha^{-t} Q_t^m x_0^i \xrightarrow[t \to \infty]{} \gamma (\alpha E - B_i)^{-1} C y^{l_{m-1}} = \gamma y^{l_m}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Если район i, $1 \le j < i \le k$, не имеет неотрицательной связи с районом j наибольшего темпа роста, то i-я составляющая $\bar{x}^i$ равновесного вектора $\bar{x}$, $\alpha\bar{x} = B\bar{x}$, является нулевым вектором [9]. Поэтому необходимость условия теоремы очевидна. Для доказательства достаточности убедимся сначала, что население самого района i и поток всех иммигрантов из районов, не растущих с наибольшим темпом роста α, существенного влияния на асимптотику населения этого района не оказывает. Действительно, если x_0^i - начальное состояние населения района i, то в момент времени t собственное население района i без учета потока иммигрантов за весь рассматриваемый промежуток времени определяется вектором $B_i^t x_0^i$. В силу истинности соотношений $\|B_i\| = r_i < r_j \, (i \ne j)$ отношение $\alpha^{-t} B_i^t x_0^i \to 0$. Применяя леммы 2-4, убеждаемся, что $\alpha^{-t} z_t^i \to 0$, где z_t^i - суммарный поток иммигрантов района i, прибывших за рассматриваемый промежуток времени из всех районов, не растущих темпом α.

Рассмотрим теперь поток иммигрантов в район i из района j с наибольшим темпом роста α. Если районы имеют одношаговую неотрицательную связь, то справедливость теоремы следует из леммы 2.

Пусть теперь районы j и i имеют неотрицательные связи с числом шагов, не превосходящих m, где m - любое натуральное число ($1 \le m < k$). Причем возможна широко разветвленная система связей между этими районами, состоящая, например, из нескольких одношаговых, двухшаговых и т.д. m-шаговых связей.

Пусть $y_t^i(f)$ - вектор возрастной структуры района i в момент t, порожденный потоками иммигрантов района i по всем таким каналам неотрицательной связи с районом j, число шагов которых равно f, $1 \le f \le m$. Ясно, что если f-шаговых неотрицательный связей несколько ($f_1, \dots, f_s$), то $y_t^i(f)$ находим как суммарный вектор $y_t^i(f) = \sum_{\ell=1} y_t^i(f_\ell)$, где $y_t^i(f_\ell)$ - вектор возрастной структуры района i, порожденный вектором x_0^j и вполне конкретной f-шаговой связью.

По лемме 4 имеем, что $\alpha^{-t} y_t^i(f_\ell) \to \xi y^i(f_\ell)$. Поэтому x_t^i - вектор возрастной структуры района i, порожденный вектором x_0^j и всевозможными неотрицательными связями с районом j, может быть представлен в виде:

$$x_t^i = \sum_{f=1}^{m} y_t^i(f) = \sum_{f=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{s} y_t^i(f_\ell).$$

Тогда имеем

$$\alpha^{-t} x_t^i = \alpha^{-t} \sum_{f=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{s} y_t^i(f_\ell) \to \xi \cdot \sum_{f=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{s} y^i(f_\ell) = \xi \bar{x}^i.$$

Теорема доказана.

3. В предыдущем пункте рассмотрена асимптотика траекторий населения, когда лишь для одного района выполнялось равенство $\alpha = r_j$. Для обеспечения полноты исследования модели (3) необходимо рассмотреть случай, когда аналогичное равенство выполняется для нескольких диагональных матриц матрицы B. Не нарушая общности, можно считать, что для двух номеров j_1 и j_2 выполняются равенства: $\alpha = r_{j_1} = r_{j_2}, 1 \le j_1, j_2 \le k, j_1 \ne j_2$, причем матрицы B_{j_1} и B_{j_2} по-прежнему считаем примитивными.

Рассмотрим район i, $1 \le i \le k$. Все сказанное в предыдущем пункте имеет место, если район i имеет неотрицательную связь с не более чем одним из районов.

Пусть теперь район i имеет неотрицательную связь с обоими районами. Тогда по теореме 1 под воздействием притока населения из каждого района j_1 и j_2 население района i растет с наибольшим темпом роста α и стремится к стабильному состоянию $\xi_1 \bar{x}^i_{(1)} + \xi_2 \bar{x}^i_{(2)}$, где

$$\xi_f = p^{j_f} \cdot x_0^{j_f}, \quad \bar{x}^i_{(f)} = (\alpha E - B_i)^{-1} \sum_{s=j_f}^{i-1} B_{is} \bar{x}^s,$$

$\bar{x}^{j_f}$ - правый собственный вектор матрицы B_{j_f}, соответствующий ее перронову числу r_{j_f}, $f = 1; 2$.

Итак, получена следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия: 1) $\alpha = r_{j_1} = \ldots = r_{j_s}$, $r_i < \alpha$, $i \neq j_f$, $1 \leq f \leq s$, $1 \leq i \leq k$; 2) матрицы B_{j_f}, $1 \leq f \leq s$, являются примитивными; 3) районы с номерами $j_1, \ldots, j_s$ между собой не имеют неотрицательной связи. Тогда население района i, $1 \leq i \leq k$, растет с наибольшим темпом роста α и стремится к стабильному состоянию $\xi_1 \bar{x}^i_{(1)} + \ldots + \xi_s \bar{x}^i_{(s)}$ (где $\xi_f = p^{j_f} \cdot x_0^{j_f} > 0$, $\bar{x}^i_{(f)} = (\alpha E - B_i)^{-1} \sum\limits_{q=j_f}^{i-1} B_{iq} \bar{x}^q$, $1 \leq f \leq s$, $\bar{x}^{j_f}$ – правый собственный вектор матрицы B_{j_f}, соответствующий ее перронову числу $r_{j_f} = \alpha$) тогда и только тогда, когда район i имеет неотрицательную связь хотя бы с одним из районов наибольшего темпа роста.

Приведем некоторые следствия этой теоремы, представляющие собой различные формы теорем эргодичности.

1. Для всех районов, имеющих неотрицательную связь хотя бы с одним из районов $j_1, \ldots, j_s$ наибольшего темпа роста, имеют место теоремы эргодичности в слабой и сильной формах. Причем обе формы теоремы эргодичности имеют место лишь для таких начальных состояний $x_0^{j_1}, \ldots, x_0^{j_s}$, $x_0^{j_f} \in R_{n_{j_f}}$, $1 \leq f \leq s$, которые принадлежат соответственно гиперплоскостям $p^{j_1} \cdot x = \xi_1, \ldots, p^{j_s} \cdot x = \xi_s$ пространств $R_{n_{j_1}}, \ldots, R_{n_{j_s}}$.

2. Население модели (3) растет с наибольшим темпом роста и стремится к стабильному состоянию, определяемому вектором $\bar{x} = (0, \ldots, \xi_1 x^{j_1}, \ldots, \bar{x}^i, \ldots, \bar{x}^k)$, где $j_1 = \min\{j_1, \ldots, j_s\}$, для любого номера $j_f \in \{j_1, \ldots, j_s\}$ число $\xi_{j_f} = p^{j_f} \cdot x_0^{j_f}$, x^{j_f} – правый собственный вектор матрицы B_{j_f}, соответствующий ее перронову числу α, остальные векторы $\bar{x}^i$ находятся по рекуррентной формуле

$$\bar{x}^i = (\alpha E - B_i)^{-1} \sum_{f=j_1}^{i-1} B_{if} \cdot \xi_f \bar{x}^f, \quad 1 \leq i \leq k, \; i \neq j_q, \; 1 \leq q \leq s.$$

Отметим также, что $\bar{x}^i=0$ для всех районов i, не имеющих неотрицательной связи ни с одним из районов $j_1,\dots,j_s$ наибольшего темпа роста.

3. Все население растет с наибольшим темпом роста α и стремится к стабильному состоянию $\bar{x}=(\xi_1 x^1,\dots,\xi_g x^g,\bar{x}^{g+1},\dots$ $\dots,\bar{x}^k)$, $\xi_f=p^f\cdot x_0^f>0$, x^f – правый собственный вектор матрицы B_f, $1\le f\le g$, а остальные векторы находятся по рекуррентной формуле

$$\bar{x}^i=(\alpha E-B_i)^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{g}B_{ij}\xi_j x^j+\sum_{s=g+1}^{i-1}B_{is}\bar{x}^s\Big),\ g+1\le i\le k,$$

тогда и только тогда, когда $r_1=\dots=r_g=\alpha$ и $r_f<\alpha$ для любого $f\in\{g+1,\dots,k\}$. При этом обе формы теоремы эргодичности выполняются только для таких начальных состояний $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^k)$, для которых векторы $x_0^1,\dots,x_0^g$ принадлежат соответственно гиперплоскостям $p^1\cdot x=\xi_1,\dots,p^g\cdot x=\xi_g$, $\xi_f=p^f\cdot x_0^f>0$, $1\le f\le g$, пространств $R_{n_1},\dots,R_{n_g}$.

Приведенные выше теорема 2 и следствия из нее позволяют описать структуру магистрали в смысле, принятом в работе [6] (магистралью называется наименьшее коническое замкнутое множество, каждая точка которого является предельной точкой для некоторой траектории модели).

Для рассматриваемой модели в случае наличия нескольких примитивных блоков с одинаковыми собственными числами $\alpha=$ $=r_{j_1}=\dots=r_{j_s}$, $s\ge 2$, хотя бы два из которых имеют неотрицательную связь хотя бы с одним блоком, магистраль M представляет собой выпуклый замкнутый конус, натянутый на образующие вида: $(0,\dots,\bar{x}^i_{(1)},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,\bar{x}^i_{(s)},0,\dots,0)$, где вектор $\bar{x}^i_{(f)}\in R_{n_i}$, $1\le f\le s$, вычисляется по формуле

$$\bar{x}^i_{(f)}=(\alpha E-B_i)^{-1}\sum_{q=j_f}^{i-1}B_{iq}\bar{x}^q.$$

Заметим, что если $i=j_f$, $1\le f\le s$, то $\bar{x}^i=x^{j_f}$, где x^{j_f} – правый собственный вектор матрицы B_{j_f}, соответствующий $r_{j_f}=\alpha$. Отметим также, что $\bar{x}^i_{(f)}=0$ тогда и только тогда, когда район i не имеет неотрицательной связи с районом j_f, $1\le f\le s$.

Каждая точка y магистрали M является точкой сходимости некоторых траекторий, причем эти траектории легко указать. Начальное состояние этих траекторий находим следующим образом.

Вектор y представим в виде $y=(y^1,\dots,y^k)$ в соответствии с нормальным видом (2) матрицы B. Из равенств $y^{j_1}=\gamma_{j_1}x^{j_1},\dots$ $\dots,y^{j_s}=\gamma_{j_s}x^{j_s}$ находим числа $\gamma_{j_1},\dots,\gamma_{j_s}$. Все траектории с начальными состояниями $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^k)$ такими, что $p^{j_1}\cdot x_0^{j_1}=\gamma_{j_1},\dots$ $\dots,p^{j_s}\cdot x_0^{j_s}=\gamma_{j_s}$, сходятся к точке y. Доказательство следует из теорем I и 2.

Сказанное выше позволяет описать множество всех начальных состояний, характеризующихся тем, что для всех траекторий, исходящих из них, выполняется теорема эргодичности в сильной форме.

Если ни один или только один из районов $j_1,\dots,j_s$ наибольшего темпа роста имеет неотрицательную связь с некоторыми из оставшихся районов, то не все траектории сходятся к лучу $(\lambda\bar{x})_{\lambda\geq 0}$, где $\bar{x}$ - собственный вектор матрицы B, соответствующий наибольшему темпу роста α.

Последний результат более точно оформим в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Все траектории модели (3) сходятся к лучу $(\lambda\bar{x})_{\lambda\geq 0}$ тогда и только тогда, когда только для одного номера j наибольший темп роста $\alpha=r_j$ и матрица B_j является примитивной, $1\leq j\leq k$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть только один район j растет с наибольшим темпом роста и матрица B_j примитивна, тогда слабая форма теоремы эргодичности справедлива для всех начальных состояний. При этом траектория, исходящая из начального состояния $x_0=$ $=(x_0^1,\dots,x_0^j,\dots,x_0^k)$, сходится к точке $\gamma_j\bar{x}$, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда $p^j x_0^j=\gamma_j>0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Траектория модели (3) сходится к выпуклому замкнутому конусу (магистрали M), отличному от луча, тогда и только тогда, когда не для единственного числа j, $1\leq j\leq k$, выполняется равенство $\alpha=r_j$ и хотя бы для одного номера $i\in\{1,\dots,k\}\setminus\{j\}$ имеет место условие $x_0^i\geq 0, x_0^i\neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сходимость траекторий к лучу тесно связана с результатами А.Н.Колмогорова [2] и В.И.Романовского [3] по теории однородных цепей Маркова. Если цепь Маркова является правильной регулярной [8, с.386], то сходимость траекторий к лучу и сходимость степеней матриц эквивалентны. Однако если рассматривать нерегулярные марковские цепи, то сходимость степеней матрицы , вообще говоря, не влечет сходимость траекторий к лучу. Теорема 3 позволяет доказать сходимость к лучу при более общих предположениях, чем регулярность марковских цепей. В нашем случае матрица β в отличие от требований указанных выше авторов может быть квазинеотрицательной, кроме того, не иметь строго положительного собственного вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
2. КОЛМОГОРОВ А.Н. Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний. - Бюлл. ун-та (А), 1937, №1-3.
3. РОМАНОВСКИЙ В.И. Дискретные цепи Маркова. - М.: Гостехиздат, 1948.
4. Староверов Л.В. Модели движения населения. - М.: Наука, 1979.
5. Демографические модели /Под ред. Е.М.Андреева и А.Г.Волкова.- М.: Статистика, 1977.
6. РУБИНОВ А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. - Л.: Наука, 1980.
7. БРУК С.И. Население мира. - М.: Наука, 1981.
8. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967, с.352-398.
9. ЖАФЯРОВ А.Ж. Темпы роста дискретных моделей движения. - Оптимизация, 1983, вып.32(49), с.89-108.

Поступила в ред.-изд. отдел
05.05.1983 г.