УДК 519.86

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИКЕ ЧИСТОГО ОБМЕНА

В.А.Васильев

Заметка посвящена установлению условий существования информационного равновесия [1-3] в моделях чистого обмена. Рассматриваемый принцип согласования интересов представляет из себя Парето-оптимальный аналог вальрасовского равновесия для экономических моделей, учитывающих эффект внешнего влияния на предпочтения участников. Необходимость изучения таких аналогов диктуется, главным образом, неэффективностью стандартного равновесия в классе экономик с функциями полезности общего вида [1,4].

Информационное равновесие является вариантом равновесия с трансферабельными стоимостями, определяемыми некоторым механизмом рыночного типа [1]. Поэтому доказательство его существования, как и для стандартных моделей обмена, базируется на известной лемме Гейла - Никайдо - Дебре [5]. Основные трудности на пути реализации этой схемы состоят в известной "вырожденности" рынка информации (информационного расширения) исходной модели. Вспомогательные конструкции (приращенное бюджетное отображение, отображение квазиспроса и т.п.), используемые для преодоления указанных трудностей, аналогичны приведенным в [6,7].

Предлагаемое доказательство существования при надлежащей модификации проходит и для экономики с производством. Соответствующие усложнения носят, в основном, технический характер. Выбор в качестве базовой модели чистого обмена обусловлен удобствами изложения.

I. Приведем необходимые определения и формулировки основных результатов. Обобщенной моделью обмена (о.м.о.) будем называть экономику вида

$$\mathcal{E}=\langle N,\{X_i,w^i,u_i\}_{i\in N}\rangle,$$

где $N=\{1,\dots,n\}$ – множество участников, $X_i\subseteq R^l$ – потребительское множество участника $i\in N$, $w^i\in R^l, u_i:\prod_{k\in N}X_k\to R$ – его начальное состояние и функция полезности соответственно.

Отличие экономики $\mathcal{E}$ от стандартных моделей обмена состоит в том, что значения ее функций полезности определяются состоянием системы в целом. Как уже отмечалось, обычный равновесный механизм регулирования не обеспечивает эффективности получающихся решений для о.м.о. Один из вариантов более гибкого управления, избавленного от указанного недостатка, дает рассмотрение цен на "информацию" о потреблении других участников [I].

Положим $X=\prod_{i\in N}X_i, X(N)=\{x=(x^i)_{i\in N}\in X\,|\,\sum_{i\in N}x^i=\sum_{i\in N}w^i\}$ и через $p\cdot z$ всюду в дальнейшем условимся обозначать скалярное произведение векторов p и z.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I [I,2]. Состояние $\bar{x}=(\bar{x}^i)_{i\in N}\in X(N)$ называется информационным равновесием о.м.о. $\mathcal{E}$, если существуют $\bar{p}_0\in R^l$, $\bar{p}^i=(\bar{p}^i_k)_{k\in N}\in(R^l)^N\,(i\in N)$ такие, что

1) $u_i(\bar{x})=\max\{u_i(x)\,|\,\bar{p}^i\cdot x\le\bar{p}_0\cdot w^i, x\in X\}, i\in N;$

2) $\sum_{i\in N}\bar{p}^i_k=\bar{p}_0,\ k\in N.$

Компоненты $\bar{p}^i_k$ вектора $\bar{p}^i$ интерпретируются как цены за продукты, представляющие собой информацию для участника i о потреблении участника k [I].

Множество информационных равновесий о.м.о. $\mathcal{E}$ обозначим через $IW(\mathcal{E})$.

Отметим сразу же, что если $\mathcal{E}$ – стандартная модель чистого обмена (функции полезности участников зависят только от их собственного потребления), то $W(\mathcal{E})\subseteq IW(\mathcal{E})$, где, как обычно, $W(\mathcal{E})$ – множество вальрасовских равновесий $\mathcal{E}$. Более того, если в рассматриваемом случае функции полезности строго возрастающие, то $W(\mathcal{E})=IW(\mathcal{E})$. Действительно, для $\bar{x}\in W(\mathcal{E})$ цены $\bar{p}_0$, $(\bar{p}^i)_{i\in N}$, определяемые по формулам

$\bar{p}^i_i = \bar{p}_0 = \widetilde{p}$, $\bar{p}^i_k = 0$ для всех $i \neq k$ ($\widetilde{p}$ - равновесные цены, отвечающие $\bar{x}$), удовлетворяют условиям AI, A2. Что касается совпадения для строго возрастающих функций u_i, то оно основано на равенствах $\bar{p}^i \cdot \bar{x} = \bar{p}^i_i \cdot \bar{x}\ (i \in N)$, справедливых в этом случае для любого $\bar{x} \in X(N)$, и системы цен $\bar{p}_0$, $(\bar{p}^i)_{i\in N}$, удовлетворяющих условиям AI, A2. В самом деле, пусть u_i строго возрастают по x^i и не зависят от остальных аргументов. Ясно, что $\bar{p}^i \geqslant 0$ для всех $i \in N$. Отсюда, учитывая строгую монотонность u_i, имеем: $\bar{p}^i_k \cdot x^k = 0$ для всех $i \neq k$. Но тогда, ввиду A2, справедливы соотношения $\sum_{i\in N} \bar{p}^i \cdot \bar{x} = \sum_{i\in N} \bar{p}^i_i \cdot \bar{x}^i = \sum_{i\in N} \bar{p}_0 \cdot w^i$. Поскольку $\bar{p}^i_i \leqslant \bar{p}_0 (i \in N)$, имеем $\bar{p}_0 \cdot \bar{x}^i = \bar{p}_0 \cdot w^i (i \in N)$, откуда и вытекает требуемое включение $\bar{x} \in W(\mathcal{E})$.

Вернемся к общему случаю и, следуя [I,3], опишем рынок информации, представляющий собой расширение исходной о.м.о. $\mathcal{E}$, в котором функции полезности участников зависят лишь от собственного потребления.

Пусть $\mathcal{E}$ - произвольная о.м.о. Положим $\mathcal{D} = \{(i,j) \in N \times N \mid i \neq j\}$, $\mathcal{D}_0 = \{0\} \cup \mathcal{D}$ и введем следующие обозначения:

$$X^0_i = X_i,\ i \in N; \tag{I.I}$$

$$X^{jk}_i = \begin{cases} X_k, & j = i, \\ -X_i, & k = i,\ i \in N,\ (j,k) \in \mathcal{D}, \\ \{0\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{I.2}$$

Для каждого $i \in N$ определим "информационное" расширение его потребительского множества

$$X^\Delta_i = \{(x^i_d)_{d\in\mathcal{D}_0} \in \prod X^d_i \mid x^i_{(j,i)} = -x^i_0 \quad (j \neq i)\} \tag{I.3}$$

и через $w^i_\Delta \in (R^l)^{\mathcal{D}_0}$ обозначим вектор, компоненты которого вычисляются по формуле

$$(w^i_\Delta)_0 = w^i;\ (w^i_\Delta)_{(j,k)} = 0, \qquad (j,k) \in \mathcal{D}. \tag{I.4}$$

Наконец, через $u_i : X^\Delta_i \to R$ обозначим функцию, определяемую по формуле

$$u^\Delta_i((x^i_d)_{d\in\mathcal{D}_0}) = u_i(x^i_{(i,1)}, \ldots, x^i_{(i,n)}), \tag{I.5}$$

где $x^i_{(i,i)} \triangleq x^i_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Экономику

$$\mathcal{E}^\Delta = \langle N, \{X^\Delta_i, w^i_\Delta, u^\Delta_i\}_{i\in N}\rangle,$$

потребительские множества, начальные состояния и функции полезности которой определены в соответствии с формулами (I.3)-(I.5), будем называть информационным расширением (или рынком информации) о.м.о. $\mathcal{E}$.

Векторы $x^i_\Delta \in X^\Delta_i$ характеризуют возможные собственное потребление участника $i \in N$ и желаемый им уровень потребления других участников. При этом компоненты $x^i_{(j,i)} = -x^i_0$ отражают выдачу $i \in N$ информации о собственном потреблении для $j \neq i$. Функция полезности участника i экономики $\mathcal{E}^\Delta$ зависит только от $x^i_\Delta \in X^\Delta_i$.

Вложение исходной о.м.о. в $\mathcal{E}^\Delta$ осуществляется с помощью линейного оператора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $\gamma_i : (\mathbb{R}^\ell)^N \to (\mathbb{R}^\ell)^{\mathcal{D}}$ ($i \in N$) определяются в соответствии с формулой:

$$(\gamma_i(x^1,\ldots,x^n))_d = \begin{cases} x^i, & d = 0, \\ -x^i, & d = (k,i), \\ x^k, & d = (i,k), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (I.6)$$

Действительно, $\gamma_i(X) = X^\Delta_i$, $u^\Delta_i(\gamma_i(x)) = u_i(x)$ для всех $i \in N, x \in X$. При этом, как нетрудно проверить, отображение $\gamma: x \to (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)), x \in X(N)$, осуществляет взаимно-однозначное соответствие между сбалансированными состояниями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^\Delta$.

Обозначим через $W(\mathcal{E}^\Delta)$ множество вальрасовских равновесий модели $\mathcal{E}$. Учитывая вышесказанное, легко убедиться в справедливости равенства

$$\gamma(IW(\mathcal{E})) = W(\mathcal{E}^\Delta), \qquad (I.8)$$

представляющего, по существу, первоначальное определение информационного равновесия из [I].

Для проверки соотношения (I.8) достаточно заметить, что формулы

$$\bar{p}_0 = \tilde{p}_0,$$
$$\bar{p}^i_k = \begin{cases} \tilde{p}_{ik}, & i \neq k, \\ \tilde{p}_0 - \sum_{j \neq i} \tilde{p}_{ji}, & i = k, \quad i,k \in N, \end{cases} \qquad (1.9)$$

устанавливают линейный изоморфизм между ценами $\tilde{p}_0, (\tilde{p}_{ik})_{(i,k)\in \mathcal{D}}$ в модели $\mathcal{E}^{\Delta}$ и ценами $\bar{p}_0, (\bar{p}^i)_{i\in N}$, удовлетворяющими условию А2. Что касается А1, то его эквивалентность соответствующему требованию для $W(\mathcal{E}^{\Delta})$ вытекает непосредственно из определения вальрасовского равновесия.

Равенство (1.8) позволяет редуцировать вопрос об условиях непустоты $IW(\mathcal{E})$ к соответствующей задаче для стандартного вальрасовского равновесия. Этот подход и используется в настоящей работе. Трудности его реализации состоят в том, что модель $\mathcal{E}^{\Delta}$ не удовлетворяет практически ни одному из типичных условий, так или иначе фигурирующих в известных теоремах существования. В частности, какова бы ни была исходная о.м.о. $\mathcal{E}$, в модели $\mathcal{E}^{\Delta}$ начальные состояния w^i_{Δ} не принадлежат X^{Δ}_i при $w^i \neq 0$, $\operatorname{int} X^{\Delta}_i = \emptyset$ для всех $i \in N$, бюджетные отображения разрывны в стандартной области определения и т.п. Таким образом, даже исследование относительно простой экономики чистого обмена требует привлечения достаточно тонких методов анализа, основанных на результатах работ [6–8].

Сформулируем предположения, в которых устанавливается непустота $IW(\mathcal{E})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.

(a) $X_i = R^{\ell}_+$ для всех $i \in N$.

(b) $w^i \in R^{\ell}_+$, $\sum_{i\in N} w^i \in \operatorname{int} R^{\ell}_+$, $w^i \neq 0$ $(i \in N)$.

(c) u_i – непрерывные и квазивогнутые для всех $i \in N$.

(d) u_i – неубывающие, строго возрастающие по x^i для всех $i \in N$.

Экономические модели, удовлетворяющие предположению 1, являются прямым обобщением стандартных моделей чистого обмена. Условие, описываемое следующим предположением, специфично именно для о.м.о.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.

(d') Существует $i_0 \in N$ такой, что для всех $i \in N$ функции u_i являются строго возрастающими по x^{i_0}.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. Если о.м.о. $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям предположения I, то $IW(\mathcal{E})\neq\emptyset$.

ТЕОРЕМА 2. Если о.м.о. удовлетворяет предположению 2 и условиям (a) - (c) предположения I, то $IW(\mathcal{E})\neq\emptyset$.

2. В этом пункте приводятся доказательства теорем I,2. Поскольку в обоих случаях используется одна и та же схема, ограничимся изложением доказательства теоремы I. Основные модификации, необходимые для установления теоремы 2, указываются в заключительных замечаниях.

Доказательство теоремы I разобьем на три этапа. На первом выводится существование так называемого полуравновесия для некоторой "усеченной" о.м.о. $\mathcal{E}'$. На втором этапе для этой же модели устанавливается непустота $IW(\mathcal{E}')$. Завершает доказательство проверка включения $IW(\mathcal{E}')\subseteq IW(\mathcal{E})$.

Сконструируем усеченную о.м.о. $\mathcal{E}'$ и необходимые в дальнейшем отображения бюджетного типа и отвечающие им отображения спроса.

Для каждого $i\in N$ положим $X_i'=\{x\in R_+^\ell \mid x\leq 2\cdot\sum_{k\in N} w^k\}$, $u_i'=u_i/X'$ - сужение u_i на $X'=\prod_{k\in N} X_k'$. Через $\mathcal{E}'$ обозначим о.м.о.

$$\langle N, \{X_i', w^i, u_i'\}\, i\in N\rangle.$$

Далее, через U обозначим единичный шар в $(R^\ell)^{\mathcal{D}_0}$ по норме $\|\cdot\|_2$. Как и в п.I, векторы $p=(p_0, p_{ik})_{(i,k)\in\mathcal{D}}\in U$ будем отождествлять с наборами $(p^i)_{i\in N}$, где $p^i\in(R^\ell)^N$ определяются по формулам

$$p_k^i=\begin{cases} p_{ik}, & i\neq k,\\ p_0-\sum_{j\neq i} p_{ji}, & i=k. \end{cases} \tag{2.I}$$

Введем обозначения

$$U_+ = U\cap (R_+^\ell)^{\mathcal{D}_0},$$

$$Q = \{p\in U_+ \mid \|p\|_2=1\}$$

и для каждого $i \in N$ и $p \in U_+$ положим

$$B_{oi}(p)=\{x\in X' \mid p^i\cdot x \le p_o\, w^i + \frac{1-\|p\|_2}{n}\},$$

$$B'_{oi}(p)=\{x\in X' \mid p^i\, x < p_o\cdot w^i + \frac{1-\|p\|_2}{n}\}.$$

Установим некоторые свойства следующего аналога индивидуального спроса:

$$\mathcal{D}'_{oi}(p)=\{x\in B_{oi}(p) \mid B'_{oi}(p)\cap \hat{P}_{oi}(x)=\emptyset\},\ i\in N, p\in U_+,$$

где

$$P_{oi}(x)=\{y\in X' \mid u_i(y)>u_i(x)\},\ x\in X',$$

$$\hat{P}_{oi}(x)=\bigcup_{y\in P_{oi}(x)} 0(x,y]^{*)},\ x\in X'.$$

ЛЕММА I. В условиях предположения I, для каждого $i\in N$ отображение $p\to\mathcal{D}'_{oi}(p)$ $(p\in U_+)$ полунепрерывно сверху и для каждого $p\in U_+$ множество $\mathcal{D}'_{oi}(p)$ непусто, выпукло и компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $i\in N$ и рассмотрим произвольные сходящиеся последовательности $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющие условию: $p_m\in U_+$ и $x_m\in\mathcal{D}'_{oi}(p_m)$, $m=1,\ldots$ Ясно, что для их пределов p и x справедливо соотношение: $x\in B_{oi}(p)$. Если $x\in B'_{oi}(p)$, то, допуская существование $y\in P_{oi}(x)$ для некоторого m_o, имеем $x_{m_o}\in B'_{oi}(p_{m_o})$ и $y\in P_{oi}(x_m)$. Но тогда при достаточно малом $\lambda\in(0,1]$ справедливо включение $x_{m_o}+\lambda(y-x_{m_o})\in B'_{oi}(p_{m_o})$, что противоречит предположению: $B'_{oi}(p_{m_o})\cap\hat{P}_{oi}(x_{m_o})=\emptyset$.

Если же $p^i\cdot x=p_o\cdot w^i+\frac{1-\|p\|_2}{n}$ и существует $z\in B'_{oi}(p)\cap\hat{P}_{oi}(x)$, то, в силу определения $B'_{oi}(p)$ и $\hat{P}_{oi}(x)$, существует $y\in B'_{oi}(p)\cap P_{oi}(x)$. Но тогда для достаточно большого m_o справедливо соотношение $y\in B'_{oi}(p_{m_o})\cap P_{oi}(x_{m_o})$, противоречащее предположению $x_{m_o}\in\mathcal{D}'_{oi}(p_{m_o})$.

Итак, $\mathcal{D}'_{oi}$ – замкнутое отображение, откуда на основании

---

*) $0(x,y]\triangleq\{z=x+\lambda(y-x) \mid \lambda\in(0,1]\}$,

$0[x,y]\triangleq\{z=x+\lambda(y-x) \mid \lambda\in[0,1]\}$.

компактности X^{i} и вытекает его полунепрерывность сверху. Покажем, что $\mathcal{D}'_{0i}(p)$ – непустой выпуклый компакт для каждого $p\in U_+$. Действительно, состояние $w_{i0}=(0,\dots,w^i,\dots,0)$ принадлежит $B_{0i}(p)$ при любом $p\in U_+$, поскольку $p^i\cdot w_{i0}=$ $=p_i^i\cdot w^i=(p_0-\sum_{k\neq i}p_i^k)\cdot w^i$ и, ввиду неотрицательности p_i^k, справедливы неравенства $p^i\cdot w_{i0}\leq p_0\cdot w^i+\frac{1-\|p\|_2}{n}$. Далее, ввиду непрерывности u_i и компактности X', множество $K_i(p)=$ $=\{x\in B_{0i}(p)\,|\,u_i(x)=\max_{y\in B_{0i}(p)}u_i(y)\}$ непусто для всех $p\in U_+$.

Рассмотрим произвольный элемент $x\in K_i(p)$. Если $x\in B'_{0i}(p)$ и $B_{0i}(p)\cap\hat{P}_{0i}(x)\neq\emptyset$ то, очевидно, найдутся $y\in P_{0i}(x)$ и $\lambda\in(0,1]$ такие, что элемент $z=x+\lambda(y-x)$ удовлетворяет равенству $p^i\cdot z=p_0\cdot w^i+\frac{1-\|p\|_2}{n}$. Поскольку $u_i(y)>u_i(x)$ и $u_i(x)\geq u_i(z)$, в силу квазивогнутости u_i имеем: $u_i(x)=u_i(z)$. Но тогда $B'_{0i}(p)\cap\hat{P}_{0i}(z)=\emptyset$, так как $p^i\cdot y'>p_0\cdot w^i+\frac{1-\|p\|_2}{n}$ для всех $y'\in P_{0i}(z)$.

Если же $p^i\cdot x=p_0\cdot w^i+\frac{1-\|p\|_2}{n}$, то $B'_{0i}(p)\cap P_{0i}(x)=\emptyset$, откуда сразу вытекает включение $x\in\mathcal{D}'_{0i}(p)$. Таким образом, в обоих случаях $\mathcal{D}'_{0i}(p)\neq\emptyset$.

Переходя к доказательству выпуклости $\mathcal{D}'_{0i}(p)$ $(p\in U_+)$, отметим, что непосредственно из определения $\mathcal{D}'_{0i}(p)$ вытекает справедливость импликации: $x\in\mathcal{D}'_{0i}(p)\cap B'_{0i}(p)\Rightarrow P_{0i}(x)=\emptyset$. Поэтому, если $x,x'\in\mathcal{D}'_{0i}(p)$, $z\in O[x,x']$ и $x\in\mathcal{D}'_{0i}(p)\cap$ $\cap B'_{0i}(p)$, то $P_{0i}(z)=P_{0i}(x')=P_{0i}(x)=\emptyset$. Действительно, в рассматриваемом случае, ввиду квазивогнутости u_i, справедливы равенства $u_i(x)=u_i(x')=u_i(z)$.

Если же $x,x'\in\mathcal{D}'_{0i}(p)$ и оба элемента лежат в гиперплоскости $H=\{z\,|\,p^i\cdot z=p_0\cdot w^i+\frac{1-\|p\|_2}{n}\}$, то и $O[x,x']$ лежит в H. Поэтому для любого $z\in O[x,x']$ из непустоты множества $\hat{P}_{0i}(z)\cap B'_{0i}(p)$ вытекает, очевидно, непустота множества $P_{0i}(z)\cap B'_{0i}(p)$. Пусть $y\in B'_{0i}(p)\cap P_{0i}(z)$. Тогда $u_i(y)\leq u_i(x)$, $u_i(y)\leq u_i(x')$, что, ввиду включения $z\in O[x,x']$, противоречит квазивогнутости u_i.

Итак, в обоих случаях $O[x,x']\subseteq\mathcal{D}'_{0i}(p)$, что и доказывает выпуклость $\mathcal{D}'_{0i}(p)$ при любом $p\in U_+$.

Что касается компактности множеств $\mathcal{D}'_{0i}(p)$ $(p\in U_+)$, то она вытекает из компактности X' и замкнутости отображения $p\to \mathcal{D}'_{0i}(p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Заключение леммы I остается справедливым и при значительных ослаблениях предположения I. Например, от функций полезности достаточно потребовать полунепрерывности сверху, условия $w^i\neq 0$ можно отбросить, условие квазивогнутости u_i можно заменить требованием $x\in\operatorname{conv}P_i(x)$ и т.д.

Используя линейный оператор $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, осуществляющий вложение $\mathcal{E}$ в его информационное расширение $\mathcal{E}^\Delta$ (см. п.I), введем в рассмотрение аналог агрегированного избыточного спроса

$$E'_0(p)=\sum_{i\in N}\gamma_i(\mathcal{D}'_{0i}(p))-\sum_{i\in N}w^i_\Delta,\ p\in U_+.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Отображение $p\to E'_0(p)$ $(p\in U_+)$ полунепрерывно сверху, $E'_0(p)$ непусто, выпукло и компактно для всех $p\in U_+$ и при этом справедливы неравенства:

$$p\cdot z\leq 0,\quad p\in Q,\ z\in E'_0(p). \tag{2.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $i\in N$ отображение γ_i – линейная биекция. Отсюда, ввиду компактности X' и из включений $\gamma_i(\mathcal{D}'_{0i}(p))\subseteq\gamma_i(X')(i\in N)$, получаем требуемые полунепрерывность сверху отображения E'_0, непустоту, выпуклость и компактность его значений.

Что касается неравенств (2.2), то они вытекают из очевидных соотношений $p\cdot\gamma_i(x)=p^i\cdot x$, $p\cdot w^i_\Delta=p_0\cdot w^i(i\in N)$ и непосредственно из построения отображения E'_0.

Таким образом, отображение E'_0 удовлетворяет всем условиям известной леммы Гейла – Никайдо – Дебре [5]. Следовательно, найдется $\bar p\in U_+$, для которого $E'_0(\bar p)\cap -(R^\ell_+)^{\mathcal{D}_0}\neq\emptyset$. Другими словами, существуют $\bar x_i\in\mathcal{D}'_{0i}(\bar p)$ $(i\in N)$, $\bar y\in -(R^\ell_+)^{\mathcal{D}_0}$ такие, что

$$\sum_{i\in N}\gamma_i(\bar x_i)-\sum_{i\in N}w^i_\Delta=\bar y. \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что элемент $\bar y=\sum_{i\in N}\gamma_i(\bar x_i)-\sum_{i\in N}w^i_\Delta$ принадлежит множеству $-(R^\ell_+)^{\mathcal{D}_0}$ в том и только в том случае, когда состояния $\bar{x}_i = (\bar{x}_i^k)_{k\in N}$ $(i\in N)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{i\in N} \bar{x}_i^i \leq \sum_{i\in N} w^i, \tag{2.4}$$

$$\bar{x}_i^k \leq \bar{x}_k^k, \quad i\in N. \tag{2.5}$$

Учитывая строгую монотонность u_i по x^i и определение $\mathcal{B}'_{0i}(\bar{p})$, имеем: $\bar{p}^i \cdot \bar{x}_i = \bar{p}_0 \cdot w^i + \frac{1-\|p\|_2}{n}$ $(i\in N)$. Отсюда $\bar{p}\cdot\bar{y} = \sum_{i\in N} \bar{p}_i \cdot \bar{x}_i - \sum_{i\in N} \bar{p}_0 \cdot w^i = 1 - \|p\|_2$.
Но $\bar{p}\cdot\bar{y} \leq 0$ (ввиду $\bar{p}\in U_+$, $y\in -(\mathbb{R}_+^\ell)^{\mathcal{D}_0}$), следовательно, $\|p\|_2 = 1$, $\bar{p}\cdot\bar{y} = 0$.

Итак, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В условиях предположения I для о.м.с. $\mathcal{E}'$ существуют цены $\bar{p}\in Q$ и состояния $\bar{x}_i \in X'$ $(i\in N)$, удовлетворяющие, наряду с (2.4) и (2.5), следующим условиям:

$$\bar{p}_i \cdot \bar{x}_i = \bar{p}_0 \cdot w^i; \tag{2.6}$$

$$B'_{0i}(\bar{p}) \cap \hat{P}_{0i}(\bar{x}_i) = \emptyset. \tag{2.7}$$

При этом, если в соотношениях (2.4), (2.5) по каким-либо компонентам выполняется строгое неравенство, соответствующие компоненты $\bar{p}_0$ $(\bar{p}_{ik})$ обращаются в нуль.

Состояние $(\bar{x}_i)_{i\in N}$, удовлетворяющее условиям (2.6), (2.7), по аналогии со стандартными моделями обмена естественно назвать полуравновесием $\mathcal{E}'$.

Переходя к установлению основного результата, приведем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 2. $\sum_{i\in N} w_\Delta^i \in \operatorname{int} \sum_{i\in N} \gamma_i(X')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $w_\Delta(N) = \sum_{i\in N} w_\Delta^i$ удовлетворяет условию

$$\forall d\in\mathcal{D}_0\ \forall j\ \exists \delta_{dj} > 0\ (w_\Delta(N) \pm \delta_{dj}\cdot e^{dj} \in \sum_{i\in N} \gamma_i(X')),$$

где e^{dj} – орты в $(\mathbb{R}^\ell)^{\mathcal{D}_0}$.

Рассмотрим случай $d=0$. Поскольку, по условию, $w(N)=\sum_{i\in N} w^i \in \operatorname{int} R^l_+$, при достаточно малом δ_{0j} имеет место включение $w(N)+\delta_{0j}\cdot e^j \in X'_1$. А поэтому $w_\Delta(N)\pm\delta_{0j}\cdot e^j=\sum_{i\in N}\gamma_i((w(N)\pm\delta_{0j}\cdot e^j, 0,\ldots,0))\in\sum_{i\in N}\gamma_i(X')$.

В случае $d=(i,k)$, полагая $x^j_\Delta=\gamma_j((0,\ldots,w(N),\ldots,0))$ $(j\neq i)$ и $x^i_\Delta=\gamma_i((0,\ldots,w(N),\ldots,0))\pm\delta_{dj}\cdot e^{dj}$, получаем при достаточно малом δ_{dj}: $x^m_\Delta\in\gamma_m(X')$ и $\sum_{m\in N} x^m_\Delta=w_\Delta(N)\pm\delta_{dj}\cdot e^{dj}$.

Ясно, что внутренность $T=\operatorname{conv}\{w_\Delta(N)\pm\delta_{dj}\cdot e^{dj}\}$ непуста и при этом $w_\Delta(N)\in\operatorname{int}T\subseteq\sum_{i\in N}\gamma_i(X')$.

ЛЕММА 3. Пусть $x_i\in X'$ $(i\in N)$ – произвольный набор состояний, удовлетворяющий условиям (2.4)-(2.5). Для любой коалиции S $(S\neq\emptyset, N)$ найдутся состояния $\omega_i=(\omega^1_i,\ldots,\omega^n_i)\in X'$ $(i\in N)$, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i\in N}\omega^i_i=\sum_{j\in N\setminus S} w^j,\quad \omega^k_i\leq\omega^k_k\quad(i,k\in N),$$

$$u_i(x_i+\omega_i)>u_i(x_i)\quad(i\in S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку, в силу предположения I, $w(N\setminus S)=\sum_{j\in N\setminus S} w^j\neq 0$, в качестве искомых ω_i можно взять любое (одно и то же для всех $i\in N$) состояние $\omega\in X'$, компоненты которого удовлетворяют условиям: $\omega^i\neq 0$ $(i\in S)$, $\omega^j=0$ $(j\in N\setminus S)$, $\sum_{m\in N}\omega^m=\sum_{j\in N\setminus S} w^j$.

Действительно, учитывая строгую монотонность u_i по x^i, имеем

$$u_i(x_i+\omega_i)>u_i(x_i),\quad i\in S,$$

что и требовалось доказать.

Установим теперь существование информационного равновесия для о.м.о. $\mathcal{E}'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $IW(\mathcal{E}')\neq\emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цены $\bar p\in Q$ и состояния $\bar x_i\in X'$ $(i\in N)$, фигурирующие в предложении 2.

Покажем, что множество $N'=\{i\in N \mid B'_{0i}(\bar p)\neq\emptyset\}$ непусто. Поскольку $\bar p\neq 0$ и, в силу леммы 2, $\operatorname{int}\sum_{i\in N}\gamma_i(X')\neq\emptyset$, гиперплоскость $H=\{z\in(\mathbb{R}^{\ell})^{\mathcal{D}_0} / \bar{p}\cdot z=\bar{p}_0\cdot\sum_{i\in N} w^{i}\}$ не содержит целиком множество $\sum_{i\in N}\gamma_i(X')$. Следовательно, найдется $z'\in\sum_{i\in N}\gamma_i(X')$ такой, что либо $\bar{p}\cdot z'<\bar{p}_0\cdot\sum_{i\in N} w^{i}$, либо $z''=\sum_{i\in N} w_{\Delta}^{i}-\lambda(z-\sum_{i\in N} w_{\Delta}^{i})\in\sum_{i\in N}\gamma_i(X')$ при достаточно малом $\lambda>0$, причем $\bar{p}\cdot z''<\bar{p}_0\cdot\sum_{i\in N} w_i$. Ясно, что в том и другом случае имеем требуемое: $N'\neq\emptyset$.

Пусть $N'=N$. Учитывая непрерывность u_i и тот факт, что $B'_{0i}(\bar{p})\neq\emptyset$ $(i\in N)$, нетрудно проверить, что $\mathcal{D}'_{0i}(\bar{p})=$ $=\mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$ $(i\in N)$, где

$$\mathcal{D}_{0i}(\bar{p})=\{x\in B_{0i}(\bar{p}) / B_{0i}(\bar{p})\cap\hat{P}_{0i}(x)=\emptyset\}.$$

Поэтому, в силу предложения 2, имеем: $\sum_{i\in N}\bar{x}^{i}_{i}=\sum_{i\in N} w^{i}$. Действительно, так как $\bar{p}^{i}_{i}\gg 0$ *) для всех $i\in N$ (что вытекает из строгой монотонности u_i по x^i и из включений $\bar{x}_i\in\mathcal{D}_{0i}(p)$), то, допуская, что $(\sum_{i\in N}\bar{x}^{i}_{i})_j<(\sum_{i\in N} w^{i})$ для некоторого $j\in\{1,\dots,\ell\}$, получаем $\bar{p}_{0j}=0$. Ввиду равенств $\sum_{i\in N}\bar{p}^{i}_{k}=$ $=\bar{p}_0(k\in N)$ имеем в этом случае: $\bar{p}^{i}_{kj}=0$ для всех $i,k\in N$. Поэтому увеличение j-й компоненты вектора $\bar{x}^{k}_{k}$ для некоторого $k\in N$ не выведет новое состояние $\bar{x}'_{k}$ из $B_{0k}(\bar{p})$. Но это противоречит строгой монотонности u_k по x^k и включению $\bar{x}_k\in\mathcal{D}_{0k}(\bar{p})$.

Итак, в рассматриваемой ситуации $\sum_{i\in N}\bar{x}^{i}_{i}=\sum_{i\in N} w^{i}$ и $\bar{p}_i\gg 0$.

Убедимся в том, что все строгие неравенства в (2.5) можно трансформировать в равенства подходящим выбором $\bar{x}'_i\in\mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$ с сохранением баланса $\sum_{i\in N}\bar{x}'^{i}_{i}=\sum_{i\in N} w^{i}$. С этой целью заметим, что при $\bar{x}^{k}_{ij}<\bar{x}^{k}_{kj}$ имеем, ввиду предложения 2: $\bar{p}^{i}_{kj}=0$. Но это дает возможность увеличить компоненту $\bar{x}^{k}_{ij}$ состояния $\bar{x}_i$ до значения x^{k}_{kj}, не нарушая бюджетного ограничения для $i\in N$. Ясно, что полученное таким образом новое состояние $\bar{x}'_i$ ввиду монотонности u_i будет принадлежать $\mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$. Проделав аналогичные процедуры во всех случаях, когда в (2.5) имеют место строгие неравенства, получим новые состояния $\bar{x}'_i\in$ $\in\mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$ $(i\in N)$, удовлетворяющие равенству: $\sum_{i\in N}\gamma_i(\bar{x}'_i)=$ $=\sum_{i\in N} w_{\Delta}^{i}$. Но это, по определению операторов γ_i, возможно

---

*) $q=(q_1,\dots,q_\ell)\gg 0\iff\forall i\,(q_i>0)$.

тогда и только тогда, когда найдется $\bar{x} \in X'$ такой, что

$$\sum_{i\in N} \bar{x}^i = \sum_{i\in N} w^i,$$

$$\bar{x}'_i = \bar{x} \quad \text{для всех } i \in N.$$

Последние соотношения вместе с условиями $\bar{x} \in \mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$ и дают требуемое включение: $\bar{x} \in IW(\varepsilon')$.

Для завершения доказательсва предложения 3 остается показать, что случай $N' \neq N$ реализоваться не может. Допустим противное и выберем $\omega_i \in X'$ $(i \in N)$,удовлетворяющие вместе с $S = N'$ и $\bar{x}_i$ $(i \in N)$ заключению леммы 3. Поскольку, как уже отмечалось, $\bar{x}_i \in \mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$ $(i \in N)$, справедливы соотношения: $\bar{x}_i + \omega_i \notin \mathcal{D}_{0i}(\bar{p})$ $(i \in N')$. Следовательно,

$$\bar{p}^i \cdot (\bar{x}_i + \omega_i) > \bar{p}_0 \cdot w^i, \quad i \in N'.$$

Положим

$$x_i^\Delta = \begin{cases} \gamma_i(\bar{x}_i + \omega_i), & i \in N'; \\ 1/2\, \gamma_j(\bar{x}_j + \omega_j), & j \in N \setminus N'. \end{cases}$$

Учитывая, что $\sum_{i\in N} \gamma_i(\omega_i) \in -(R^l_+)^{\mathcal{D}_0}$, имеем:

$$v = \sum_{i\in N'} (x_i^\Delta - w_\Delta^i) + 2 \cdot \sum_{j\in N\setminus N'} (x_j^\Delta - w_\Delta^j) =$$

$$= \left[\sum_{i\in N} \gamma_i(\bar{x}_i + w_i) - \sum_{i\in N} w_\Delta^i\right] - \sum_{j\in N\setminus N'} w_\Delta^j = \sum_{i\in N} (\gamma_i(\bar{x}_i) - w_\Delta^i) + y',$$

где $y' \in -(R^l_+)^{\mathcal{D}_0}$. Отсюда $\bar{p} \cdot v \leq 0$. Но поскольку $\bar{p} \cdot \sum_{i\in N} (\bar{x}_i^\Delta - w_\Delta^i) > 0$, получаем существование $j_0 \in N \setminus N'$ такого, что $\bar{p}^{j_0} \cdot (\bar{x}_{j_0} + \omega_{j_0}) < \bar{p}_0 \cdot w^{j_0}$ и $\bar{x}_{j_0} + \omega_{j_0} \in X'$. А это противоречит предположению $B'_{0j_0}(p) = \emptyset$.

Итак, случай $N' \neq N$ исключается.

Приступим теперь к заключительному этапу доказательства теоремы I.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. В условиях теоремы I справедливо равенство

$$IW(\varepsilon') = IW(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь включение $IW(\varepsilon')\subseteq IW(\varepsilon)$. С этой целью покажем, что для каждого $\bar{x}\in IW(\varepsilon')$ выполняется соотношение

$$B_i(\bar{p})\cap\hat{P}_i(\bar{x})=\emptyset \qquad (i\in N),$$

где, как и ранее,

$$B_i(\bar{p})=\{z\in(R^\ell_+)^N / \bar{p}\cdot x\leq\bar{p}_0\cdot w^i\},$$

$$\hat{P}_i(\bar{x})=\{z\in(R^\ell_+)^N / \exists y\in(R^\ell_+)^N(u_i(y)>u_i(\bar{x}), z\in co(\bar{x},y))\}.$$

Допустим, что существует $z\in B_i(\bar{p})\cap\hat{P}_i(\bar{x}), z=\bar{x}+\lambda(y-\bar{x})$, $\lambda\in(0,1]$ и $u_i(y)>u_i(\bar{x})$. Ясно, что $y\in B_i(\bar{p})$. Учитывая непрерывность u_i и то, что $\bar{p}^i\geq 0$, найдется $y'\in(R^\ell_+)^N$, удовлетворяющий условиям: $u_i(y')>u_i(\bar{x})$ и $\bar{p}^i\cdot y'<\bar{p}_0\cdot w^i$. Действительно, поскольку $\bar{p}^i\cdot y\leq\bar{p}_0\cdot w_i$, то, допуская, что $\bar{p}^i\cdot y=\bar{p}_0\cdot w^i$, получаем (ввиду $\bar{p}_0\cdot w^i>0$): y имеет по крайней мере одну ненулевую компоненту, отвечающую соответствующей ненулевой компоненте $\bar{p}^i$. Малая вариация этой компоненты y и дает искомый y'. Далее, рассматривая $y'_\lambda\in\lambda y'+(1-\lambda)\bar{x}$ при достаточно малом $\lambda\in(0,1]$, получаем: $y'_\lambda\in B'_{0i}(\bar{p})$ и $u_i(y'_\lambda)\geq u_i(\bar{x})$. Отсюда, учитывая строгое возрастание u_i по x^i, получаем противоречие с условием $\bar{x}\in IW(\varepsilon')$, что и завершает доказательство включения $IW(\varepsilon')\subseteq IW(\varepsilon)$.

Аргументация, использованная для доказательства теоремы I, проходит и при доказательстве теоремы 2 с заменой U_+ на $U_{(i_0)}=U\cap K_{(i_0)}$, где

$$K_{(i_0)}=\{p\in(R^\ell)^{\mathfrak{N}_0} / p_0\geq 0, p_{i_0k}\geq 0 \quad (k\neq i_0)\}.$$

Для установления аналогов леммы I и предложений I.2 следует воспользоваться тем фактом, что отображение $E'_0(p)=\sum_{i\in N}Y_i(\mathfrak{D}'_{0i}(p))-\sum_{i\in N}w^i_0$ и конус $K_{(i_0)}$ удовлетворяет следующему обобщению леммы Гейла – Никайдо – Дебре.

ТЕОРЕМА [9]. Пусть $K\subseteq R^m$ – выпуклый замкнутый конус с вершиной в 0, $B\subseteq R^m$ – единичный шар с центром в 0, S – отвечающая ему единичная сфера. Если $E: B\cap K\to 2^{R^m}$ – полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными значениями, такое, что

$$\forall p \in S \cap K \ \exists z \in E(p) \qquad (p \cdot z \leq 0),$$

то найдется $\bar{p} \in B \cap K$, для которого

$$E(\bar{p}) \cap K^0 \neq \emptyset,$$

где $K^0 = \{p \in R^m / p \cdot z \leq 0 \ \forall z \in K\}$ - поляра конуса K.

Отметим, что полуравновесность состояний $\bar{x}_i$ в рассматриваемой ситуации будет означать выполнение условий (2.6),(2.7) и принадлежность вектора $\sum_{i \in N} r_i(\bar{x}_i) - \sum_{i \in N} w_\Delta^i$ поляре $K^0_{(i_0)} = \{z \in (R^\ell)^{\mathcal{D}_0} / z_0 \leq 0, z_{(i_0,k)} \leq 0 \ (k \neq i_0), z_{(i,k)} = 0 \ ((i,k) \in \mathcal{D}, i \neq i_0)\}$ конуса $K_{(i_0)}$. В частности, аналог условий (2.4), (2.5) имеет вид

$$\sum_{i \in N} \bar{x}_i^i \leq \sum_{i \in N} w^i,$$

$$\bar{x}_i^{i_0} \leq \bar{x}_{i_0}^{i_0}, \ i \in N,$$

$$\bar{x}_i^k = \bar{x}_k^k, \ k \neq i_0, \ i \in N.$$

Далее, при установлении эквивалента леммы 3 в качестве искомых векторов ω_i можно взять, например, $\omega_i = \omega$, где

$$\omega^k = \begin{cases} 0, & k \neq i_0, \\ 1/n \cdot \sum_{j \in N \setminus S} w^j, & k = i_0. \end{cases}$$

Как и при доказательстве теоремы I, нетрудно проверить, что вектор $\bar{p}_0$, являющийся компонентой полуравновесной системы цен $\bar{p} \in V_{(i_0)}$, строго положителен. Поэтому все рассуждения, используемые при проверке предложений 3,4, проходят фактически без изменений и при замене V_+ на $V_{(i_0)}$. Отметим лишь, что вместо строгой монотонности u_i по x^i в соответствующих местах доказательства нужно использовать условие (d').

ЛИТЕРАТУРА

1. МАКАРОВ В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства. - В кн.: Современные проблемы математики/ Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1982, т.19, с.23-58.
2. МАКАРОВ В.Л., ВАСИЛЬЕВ В.А., КОЗЫРЕВ А.Н., МАРАКУЛИН В.М. О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики. - Оптимизация, 1982, вып. 30(47), с.5-86.
3. МАКАРОВ В.Л. Модели согласования экономических интересов/ Учебное пособие. - Новосибирск: изд. НГУ, 1981.
4. МАРАКУЛИН В.М. Неэффективность равновесия в гладких экономиках с функциями полезности общего вида. - Оптимизация, 1981, вып. 27(44), с.44-64.
5. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.
6. BERGSTROM T.C. How to discard "free disposability" - at no cost. - J. Math. Econ., 1976, 3, N2, p.131-134.
7. SHAFER W. Equilibrium in economies without ordered preferences or free disposal. - J. Math. Econ., 1976,3, N2, p.135-138.
8. MAKAROV V.L. Some results on general assumptions about the existence of economic equilibrium. - J. Math. Econ., 1981, 8, N1, p.87-99.
9. FLORENZANO M. L'equilibre économique général transitif et intransitif: problèmes d'existence. - Paris: CNRS - CEPREMAP, 1981.

Поступила в ред.-изд. отдел
05.12.1983 г.