Численные методы

УДК 517.25/26

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ

Р.В.Намм

1. Рассматривается задача об установившемся движении жидкости в области, ограниченной полупроницаемой мембраной:

$$\begin{cases} \mathcal{J}(u)=\int_\Omega(|\nabla u|^2-2fu)\,d\Omega-\min!\\ u\in K=\{v\in W_2^1(\Omega):\gamma v\geq \psi \text{ п.в.на } \Gamma\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega\subset R^2$ – конечная область с достаточно регулярной границей Γ, $f\in L_2(\Omega)$, $\psi\in L_2(\Gamma)$ – заданные функции, $\gamma v\in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – след функции $v\in W_2^1(\Omega)$ на Γ.

Известно, что K – выпуклое замкнутое множество в $W_2^1(\Omega)$. Строгая коэрцитивность функционала $\tilde{\mathcal{J}}(u)=\int_\Omega|\Delta u|^2d\Omega$ в $W_2^1(\Omega)$ не имеет места, а рассматриваемая задача может не иметь решения. Однако если выполнено условие

$$\int_\Omega f\,d\Omega<0,$$

которое можно интерпретировать как аналог обычного условия разрешимости задачи Неймана, то для функционала $\mathcal{J}$ справедливо соотношение

$$\mathcal{J}(v)\longrightarrow+\infty \quad \text{при } \|v\|_{W_2^1(\Omega)}\longrightarrow\infty,\ v\in K, \tag{2}$$

обеспечивающее разрешимость задачи (1). Кроме того, имеет место единственность решения [I].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $\{u^n\}, u^n \in K, n=1,2,\dots,$ является минимизирующей для задачи (I), если $\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(u^n) = \mathcal{J}(u^*)$, где u^* – решение рассматриваемой задачи.

Известные результаты, связанные с исследованием аппроксимирующих свойств минимизирующей последовательности $\{u^n\}$, сводятся к установлению слабой сходимости $\{u^n\}$ к u^* и легко проверяемого соотношения [I,2]:

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla u^n - \nabla u^*\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Далее предположим, что на Ω для функций $u \in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство Пуанкаре:

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \le A \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + B\Big(\int_\Omega u\, d\Omega\Big)^2,$$

где $A>0$ и $B>0$ – постоянные. Следует заметить, что это неравенство справедливо при весьма общих предположениях относительно множества Ω, например, если Ω есть объединение конечного числа областей, каждая из которых – звездная относительно некоторого шага, своего для каждой области [3].

ТЕОРЕМА I. Для любой минимизирующей последовательности $\{u^n\}$ имеет место

$$\|u^n - u^*\|_{W_2^1(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathcal{J}(u^n) - \mathcal{J}(u^*) = \mathcal{J}(u^* + (u^n - u^*)) - \mathcal{J}(u^*) = 2\int_\Omega [\langle \nabla u^*, \nabla(u^n - u^*)\rangle - f(u^n - u^*)]d\Omega + \int_\Omega |\nabla(u^n - u^*)|^2 d\Omega$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов. Из условия минимума $\mathcal{J}(u)$ на K имеем

$$\int_\Omega [\langle \nabla u^*, \nabla(u^n - u^*)\rangle - f(u^n - u^*)]d\Omega \ge 0,$$

так что

$$\int_\Omega |\nabla(u^n - u^*)|^2 d\Omega \le \mathcal{J}(u^n) - \mathcal{J}(u^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Осталось показать, что $\int_\Omega (u^n - u^*)^2 d\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Для каждого n подберем постоянную C_n таким образом, чтобы

$$\int_{\Omega}(u^n - u^* - C_n)\,d\Omega = 0 \qquad \left(C_n = \frac{\int_{\Omega}(u^n - u^*)\,d\Omega}{\operatorname{mes}\Omega}\right).$$

На основании (2) имеем $|C_n| \le M^*$, $n = 1, 2, \ldots$, где M^* – положительная константа.

Воспользуемся неравенством Пуанкаре для функций $u^n - u^* - C_n$:

$$A\int_{\Omega}|\nabla(u^n - u^* - C_n)|^2 d\Omega = A\int_{\Omega}|\nabla(u^n - u^*)|^2 d\Omega \ge \int_{\Omega}(u^n - u^* - C_n)^2 d\Omega.$$

Следовательно, $\int_{\Omega}(u^n - u^* - C_n)^2 d\Omega \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Докажем, что $C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Пусть $C = \lim\limits_{j\to\infty} C_{n_j}$. Имеем

$$\|u^{n_j} - u^* - C\|_{W_2^1(\Omega)} \le \|u^{n_j} - u^* - C_{n_j}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|C_{n_j} - C\|_{W_2^1(\Omega)},$$

поэтому

$$\lim_{j\to\infty}\|u^{n_j} - (u^* + C)\|_{W_2^1(\Omega)} = 0,$$

т.е. $u^* + C$ – решение задачи (I). В силу единственности решения имеем $C = 0$. Теорема доказана.

Приведенная характеристика минимизирующей последовательности установлена совместно с А.А.Капланом.

Пусть последовательность $\{z^n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z^n - u^n\|_{W_2^1(\Omega)} \le \varepsilon_n,$$

где $u^n = \arg\min\limits_{u\in K}\{\mathcal{T}(u) + \alpha\|u - z^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega)}\}$, $\alpha > 0$ – const, $\varepsilon_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2 < \infty$, z^0 – любая начальная точка.

Как нетрудно заметить, введение регуляризирующей добавки $\|u - z^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega)}$ гарантирует строгую коэрцивность в $W_2^1(\Omega)$ минимизируемых функционалов, что при использовании метода конечных элементов позволяет обеспечить хорошую обусловленность в соответствующих конечномерных задачах. Условие на выбор z^n фактически означает, что последовательность $\{z^n\}$ определяется в результате приближенной минимизации функционалов $\mathcal{T}(u) + \alpha\|u - z^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega)}$ на множествах, осуществляющих аппроксимацию K.

ТЕОРЕМА 2. Для последовательности $\{z^n\}$ имеет место

$$\|z^n - u^*\|_{W_2^1(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы I достаточно показать, что последовательность $\{u^n\}$ является минимизирующей для задачи (I). Из очевидного неравенства

$$\mathcal{T}(u^n) \le \mathcal{T}(u^{n-1}) + \alpha\|u^{n-1} - z^{n-1}\|^2_{L_2(\Omega)}$$

следует

$$\mathcal{T}(u^n) \le \mathcal{T}(u^{n-1}) + \varepsilon^2_{n-1}. \qquad (3)$$

Тем самым,

$$\mathcal{T}(u^n) \le \mathcal{T}(u^1) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon_\nu^2 \le \mathcal{T}(u^1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2,$$

откуда, ввиду (2), имеет место ограниченность $\{u^n\}$ в $W_2^1(\Omega)$. Для любых n, j на основании (3) справедливо

$$\mathcal{T}(u^*) \le \mathcal{T}(u^{n+j}) \le \mathcal{T}(u^n) + \sum_{\nu=n}^{n+j} \varepsilon_\nu^2 \le \mathcal{T}(u^n) + \sum_{\nu=n}^{\infty} \varepsilon_\nu^2. \qquad (4)$$

Покажем, что последовательность $\{\mathcal{T}(u^n)\}$ является сходящейся. Допуская противное, рассмотрим две различные предельные точки $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ последовательности $\{\mathcal{T}(u^n)\}$ и пусть

$$\mathcal{T}_1 = \lim_{k\to\infty} \mathcal{T}(u^{n_k}),\ \mathcal{T}_2 = \lim_{i\to\infty} \mathcal{T}(u^{l_i}).$$

Положим для определенности $G \equiv \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 > 0$. Тогда, начиная с некоторых номеров N и L,

$$\mathcal{T}(u^{l_i}) - \mathcal{T}(u^{n_k}) \ge G/2 \qquad (n_k \ge N,\ l_i \ge L). \qquad (5)$$

Фиксируем номер N_1, для которого $\sum_{\nu=N_1}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 < G/4$, и пусть $N_2 = \max\{N, N_1, L\}$. Возьмем $l_i > n_k > N_2$. Из (4) имеем

$$\mathcal{T}(u^{l_i}) \le \mathcal{T}(u^{n_k}) + \sum_{\nu=n_k}^{\infty} \varepsilon_\nu^2 \le \mathcal{T}(u^{n_k}) + G/4$$

или

$$\mathcal{T}(u^{l_i}) - \mathcal{T}(u^{n_k}) \le G/4,$$

что противоречит (5).

Пусть $\mathcal{T}^* = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{T}(u^n)$. Осталось показать, что $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}(u^*)$. Для этого применим к нашему случаю схему доказательства сходимости, предложенную в [4]. Предположим, $\mathcal{T}^* > \mathcal{T}(u^*)$. Тогда существуют такие $d > 0$ и N_3, что при $n \geq N_3$ справедливо $\mathcal{T}(u^n) > \mathcal{T}(u^*) + d$. Ввиду последнего неравенства при $n \geq N_3$ функция

$$\eta(\tau) = \tau\,\mathcal{T}(u^*) + (1-\tau)\,\mathcal{T}(u^n) + \alpha\tau^2 \|u^* - u^n\|^2_{L_2(\Omega)}$$

достигает своего минимума на отрезке $[0,1]$ в точке

$$\tau_n = \min\left\{1, \frac{\mathcal{T}(u^n) - \mathcal{T}(u^*)}{2\alpha \|u^* - u^n\|^2_{L_2(\Omega)}}\right\} \quad (\tau_n \in [0,1]).$$

Тем самым

$$\eta_n(\tau_n) = \begin{cases} \mathcal{T}(u^*) + \alpha \|u^* - u^n\|^2_{L_2(\Omega)}, & \text{если } \tau_n = 1, \\ \mathcal{T}(u^n) - \dfrac{(\mathcal{T}(u^n) - \mathcal{T}(u^*))^2}{4\alpha \|u^* - u^n\|^2_{L_2(\Omega)}}, & \text{если } \tau_n < 1. \end{cases}$$

В случае $\tau_n = 1$ должно быть $\dfrac{\mathcal{T}(u^n) - \mathcal{T}(u^*)}{2\alpha \|u^* - u^n\|^2_{L_2(\Omega)}} \geq 1$, откуда следует

$$\eta_n(\tau_n) \leq \frac{\mathcal{T}(u^n) + \mathcal{T}(u^*)}{2}.$$

Имеем

$$\mathcal{T}(u^{n+1}) + \alpha \|u^{n+1} - z^n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \mathcal{T}(z^n + \tau_n(u^* - z^n)) + \alpha\tau_n^2 \|u^* - z^n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq \tau_n \mathcal{T}(u^*) + (1-\tau_n)\mathcal{T}(z^n) + \alpha\tau_n^2 \|u^* - z^n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \tau_n \mathcal{T}(u^*) +$$
$$+ (1-\tau_n)\mathcal{T}(u^n) + \alpha\tau_n^2 \|u^* - u^n\|^2_{L_2(\Omega)} + (1-\tau_n)(\mathcal{T}(z^n) - \mathcal{T}(u^n)) +$$
$$+ 2\alpha\tau_n^2 \|u^* - u^n\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|u^n - z^n\|_{L_2(\Omega)} + \alpha\tau_n^2 \|u^n - z^n\|^2_{L_2(\Omega)} \equiv$$
$$\equiv \eta_n(\tau_n) + \mu_n(\tau_n),$$

где $\mu_n(\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ в силу ограниченности $\{u^n\}$ в $W_2^1(\Omega)$ и определения $\{z^n\}$. Таким образом, если $\tau_n = 1$, то

$$\mathcal{T}(u^{n+1}) \leq \frac{\mathcal{T}(u^n) + \mathcal{T}(u^*)}{2} + \mu_n(\tau_n) \quad \text{или}$$

$$\mathcal{J}(u^n)-\mathcal{J}(u^{n+1})\ge \mathcal{J}(u^{n+1})-\mathcal{J}(u^*)-2\mu_n(\tau_n). \quad (6)$$

Если же $\tau_n = \dfrac{\mathcal{J}(u^n)-\mathcal{J}(u^*)}{2\alpha\|u^*-u^n\|^2_{L_2(\Omega)}}$, то

$$\mathcal{J}(u^n)-\mathcal{J}(u^{n+1})\ge \frac{(\mathcal{J}(u^n)-\mathcal{J}(u^*))^2}{4\alpha\|u^*-u^n\|^2_{L_2(\Omega)}}-\mu_n(\tau_n)\ge \frac{(\mathcal{J}(u^n)-\mathcal{J}(u^*))^2}{4\alpha\sup\limits_{k\ge N_0}\|u^*-u^k\|^2_{L_2(\Omega)}}-\mu_n(\tau_n), \quad (7)$$

причем $\sup\limits_{n\ge N_0}\|u^*-u^n\|^2_{L_2(\Omega)}<\infty$, ввиду ограниченности $\{u^n\}$ в $W_2^1(\Omega)$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенствах (6) и (7), получим противоречие. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В рассмотренном методе параметр α можно изменять от итерации к итерации, т.е. можно вместо α рассмотреть последовательность $\{\alpha_n\}, \alpha_n>0, n=1,2,\ldots$. Для справедливости теоремы 2 достаточно потребовать ограниченности $\{\alpha_n\}$.

2. Для решения исходной задачи применим метод конечных элементов на последовательности сеток. На n-й итерации аппроксимируем задачу

$$\begin{cases} \min\limits_{K}\int_\Omega(|\nabla u|^2-2fu+\alpha|u-u^*_{h_{n-1}}|^2)\,d\Omega, \\ u\in K=\{v\in W_2^1(\Omega):\gamma v\ge\psi \text{ п.в. на } \Gamma\}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $u^*_{h_{n-1}}$ - приближенное решение, полученное на предыдущей $(n-1)$-й итерации, h_{n-1} - шаг сетки на $(n-1)$-й итерации (см. [5], с.97), $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. На вопросе о том, как стремить h_n к нулю, остановимся позднее.

Предполагается, что Ω - выпуклая область, $\psi\in W_2^2(\Omega)$ и Γ есть кусочно-гладкая кривая в R^2 класса C^2. Для данного h_n вводим регулярным способом (см. [5,6]) многоугольную триангулированную область $\Omega_{h_n}\subset\Omega$, вершины которой лежат на Γ .

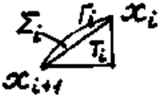
Обозначим через $I_0=\{1,\ldots,N_0\}$ множество индексов i, соответствующих внутренним узлам триангуляции $(x_i\in\Omega)$, а через $I_1=\{N_0+1,\ldots,N\}$ - множество индексов, соответствующих граничным узлам триангуляции $(x_i\in\Gamma)$; $I=I_0\cup I_1$. Будем считать, что граничные узлы $x_{N_0+1},\ldots,x_N$ занумерованы в порядке, соответствующем движению по границе Γ против часовой стрелки. Предполагается, что $x_{N+1}=x_{N_0+1}$.

Введем следующие необходимые в дальнейшем обозначения:

Γ_i - часть Γ, ограниченная точками $x_i, x_{i+1} (i, i+1 \in I_1)$;

Σ_i - зона, расположенная между Γ_i и отрезком, соединяющим x_i, x_{i+1};

T_i - треугольник, соответствующий отрезку $[x_i, x_{i+1}]$;



$(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$;

$a(u,v)=\int_\Omega(\langle\nabla u,\nabla v\rangle+\alpha uv)d\Omega$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - скалярное произведение векторов;

$$Lu=-\Delta u+\alpha u; \quad f_n=f+\alpha u^*_{h_{n-1}}.$$

Область $T_i \cup \Sigma_i, i\in I_1$, называется криволинейным элементом. Для любого $i\in I$ мы рассмотрим непрерывную функцию $\varphi_i^{h_n}(x), x\in\bar\Omega$, которая является аффинной на каждом треугольном или криволинейном элементе, равна I в точке x_i и равна 0 во всех $x_j\neq x_i, j\in I$. Введем функцию v_{h_n} по формуле

$$v_{h_n}=\sum_{i\in I} v_i^{h_n}\varphi_i^{h_n}(x), \quad \{v_i^{h_n}\}_{i\in I}\in R^N,$$

и пространство

$$W^1_{2,h_n}(\bar\Omega)=\{v_{h_n}: v_{h_n}=\sum_{i\in I} v_i^{h_n}\varphi_i^{h_n}(x)\}.$$

(Очевидно, $W^1_{2,h_n}(\bar\Omega)\subset W^1_2(\Omega)$)

Для каждой функции $u\in W^2_2(\Omega)$ через u_I обозначим её кусочно-линейное восполнение, т.е. $u_I(x)=\sum_{i\in I} u(x_i)\varphi_i^{h_n}(x)$. Имеет место неравенство [7]:

$$\|u-u_I\|_{W^1_2(\Omega)}\leq Ch_n\|u\|_{W^2_2(\Omega)}.$$

В дальнейшем, там, где это не вызывает недоразумений, все постоянные будут обозначены одним C.

В качестве приближенной к (8) рассматривается задача:

$$\begin{cases} \min \int_\Omega (|\nabla u_{h_n}|^2 - 2 f u_{h_n} + \alpha |u_{h_n} - u^*_{h_{n-1}}|^2) d\Omega, \\ u_{h_n} \in K_{h_n} = \{ v_{h_n}(x) \in W^1_{2,h_n}(\bar\Omega) : v_{h_n}(x_i) \geq \psi(x_i) \ \forall i \in I_1 \}. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначим через u^*_n решение задачи (8). Известно [7], что $u^*_n \in W^2_2(\Omega)$.

Справедливо следующее утверждение, касающееся оценки ошибки аппроксимации.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место

$$\| u^*_n - u^*_{h_n} \|_{W^1_2(\Omega)} \leq C_n h_n^{3/4},$$

где C_n не зависит от выбранной на n-м шаге триангуляции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - 2fu + \alpha |u - u^*_{h_{n-1}}|^2) d\Omega = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \alpha u^2 - 2(f + \alpha u^*_{h_{n-1}}) u + \alpha (u^*_{h_{n-1}})^2) d\Omega,$$

$$\int_\Omega (|\nabla u_{h_n}|^2 - 2f u_{h_n} + \alpha |u_{h_n} - u^*_{h_{n-1}}|^2) d\Omega = \int_\Omega (|\nabla u_{h_n}|^2 + \alpha u_{h_n}^2 - 2(f + \alpha u^*_{h_{n-1}}) u_{h_n} + \alpha (u^*_{h_{n-1}})^2) d\Omega,$$

то (8) и (9) эквивалентны соответственно следующим задачам [I]:

$$u^*_n \in K : a(u^*_n, u - u^*_n) \geq (f_n, u - u^*_n) \quad \forall u \in K;$$

$$u^*_{h_n} \in K : a(u^*_{h_n}, u_{h_n} - u^*_{h_n}) \geq (f_n, u_{h_n} - u^*_{h_n}) \quad \forall u_{h_n} \in K_{h_n}.$$

Нетрудно показать, что $L u^*_n = f_n$ на Ω [7]. Дальнейшие рассуждения в основном повторяют доказательство теоремы I в [7].

Пусть теперь Ω – выпуклый многоугольник и ψ является выпуклой на каждой стороне Ω. Предполагается, что узлы сетки $(n-1)$-й итерации входят в множество узлов n-й итерации. Тогда очевидно

$$K_{h_{n-1}} \subseteq K_{h_n} \subseteq \dots \subseteq K, \quad n = 2, 3, \dots$$

Согласно нашему итерационному процессу:

$$\mathcal{J}(u^*_{h_n})+\alpha\|u^*_{h_n}-u^*_{h_{n-1}}\|^2_{L_2(\Omega)}\le\mathcal{J}(u^*_{h_{n-1}}),\ n=1,2,\dots$$

Поэтому последовательность $\{\mathcal{J}(u^*_{h_n})\}$ является ограниченной сверху и, следовательно, $\|u^*_{h_n}\|_{W^1_2(\Omega)}\le C$, $n=1,2,\dots$ Так как решение u^*_n задачи (8) является одновременно решением задачи

$$\begin{cases}\min\int_\Omega[|\nabla u|^2+\alpha u^2-2(f+\alpha u^*_{h_{n-1}})u]\,d\Omega,\\ u\in K,\end{cases}$$

то справедлива следующая оценка [8]:

$$\|u^*_n\|_{W^2_2(\Omega)}\le C\|f+\alpha u^*_{h_{n-1}}\|_{L_2(\Omega)}.$$

С учетом вышесказанного это означает ограниченность последовательности $\{\|u^*_n\|_{W^2_2(\Omega)}\}$, т.е. $\|u^*_n\|_{W^2_2(\Omega)}\le C$, $n=1,2,\dots$ Отсюда следует [7, теорема I], что в теореме 3 можно подобрать не зависящую от n постоянную C такую, что

$$\|u^*_n-u^*_{h_n}\|_{W^1_2(\Omega)}\le Ch_n^{3/4},\ n=1,2,\dots$$

Следовательно, для сходимости процесса ($\|u^*_{h_n}-u^*\|_{W^1_2(\Omega)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$; см. теорему 2) достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty}h_n^{3/4}<\infty$. Например, можно изменять h_n по такому правилу: $h_n=h_0/2^n$, где $h_0>0$ - некоторая начальная величина.

При реализации на ЭВМ на очередном шаге вместо задачи $\min\limits_{u_{h_n}\in K_{h_n}}\{\mathcal{J}(u_{h_n})+\alpha\|u_{h_n}-u^*_{h_{n-1}}\|^2_{L_2(\Omega)}\}$ в действительности будет решаться задача $\min\limits_{u_{h_n}\in K_{h_n}}\{\mathcal{J}(u_{h_n})+\alpha\|u_{h_n}-\hat u_{h_{n-1}}\|^2_{L_2(\Omega)}\}$, где $\hat u_{h_{n-1}}$ - приближенное решение на предыдущем шаге. Обозначим $u^*_{h_n}=\arg\min\limits_{u_{h_n}\in K_{h_n}}\{\mathcal{J}(u_{h_n})+\alpha\|u_{h_n}-\hat u_{h_{n-1}}\|^2_{L_2(\Omega)}\}$.

ЛЕММА I. Пусть $\|\hat u_{h_n}-u^*_{h_n}\|_{W^1_2(\Omega)}\le\varepsilon_n$, где $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$. Тогда имеет место $\|u^*_{h_n}-u^*_n\|_{W^1_2(\Omega)}\le Ch_n^{3/4}$, $n=1,2,\dots$, где C зависит от $\{\varepsilon_n\}$, $u^*_n=\arg\min\limits_{u\in K}\{\mathcal{J}(u)+\alpha\|u-\hat u_{h_{n-1}}\|^2_{L_2(\Omega)}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого C введем $Y_C=\{u\in K: \mathcal{J}(u)\leq \leq \mathcal{J}(u^*)+C\}$. Пусть $C_0>0$ и $a_0\geq \sup_{u\in Y_{C_0}} \|u-u^*\|_{W_2^1(\Omega)}$.
Не ограничивая общности, полагаем, что $\hat{u}_{h_0}=Y_{C_0}\cap K_{h_1}$.
Так как $u^*_{h_1}=\arg\min_{u\in K_{h_1}}\{\mathcal{J}(u)+\alpha\|u-\hat{u}_{h_0}\|^2_{L_2(\Omega)}\}$, то $\mathcal{J}(u^*_{h_1})\leq \mathcal{J}(\hat{u}_{h_0})$, и поэтому $u^*_{h_1}\in Y_{C_0}$. Из $\|\hat{u}_{h_1}-u^*_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}\leq \varepsilon_1$ следует

$$|\mathcal{J}(\hat{u}_{h_1})-\mathcal{J}(u^*_{h_1})|=\left|\int_\Omega\langle\nabla\hat{u}_{h_1}-\nabla u^*_{h_1},\nabla\hat{u}_{h_1}+\nabla u^*_{h_1}\rangle d\Omega\right|+$$

$$+2\left|\int_\Omega f(\hat{u}_{h_1}-u^*_{h_1})d\Omega\right|\leq\|\hat{u}_{h_1}-u^*_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}\cdot\|\hat{u}_{h_1}+u^*_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}+$$

$$+2\|f\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\hat{u}_{h_1}-u^*_{h_1}\|_{L_2(\Omega)}\leq\varepsilon_1\|\hat{u}_{h_1}+u^*_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}+2\|f\|_{L_2(\Omega)}\cdot\varepsilon_1.$$

Но $\|\hat{u}_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}\leq\|u^*_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}+\varepsilon_1\leq a_0+\|u^*\|_{W_2^1(\Omega)}+\varepsilon_1$, поэтому $\|\hat{u}_{h_1}+u^*_{h_1}\|_{W_2^1(\Omega)}\leq 2a_0+2\|u^*\|_{W_2^1(\Omega)}+\varepsilon_1$. Следовательно,

$$\mathcal{J}(\hat{u}_{h_1})\leq\mathcal{J}(u^*_{h_1})+\varepsilon_1(2a_0+2\|u^*\|_{W_2^1(\Omega)}+\varepsilon_1+2\|f\|_{L_2(\Omega)}).$$

Можно считать, что $a_0>\max\{\sum_{n=1}^\infty\varepsilon_n, 2\|f\|_{L_2(\Omega)}+2\|u^*\|_{W_2^1(\Omega)}\}$.
Тогда $\mathcal{J}(\hat{u}_{h_1})\leq\mathcal{J}(u^*_{h_1})+4a_0\varepsilon_1\leq\mathcal{J}(u^*)+C_0+4a_0\varepsilon_1\equiv\mathcal{J}(u^*)+C_1$.
В силу выпуклости $\mathcal{J}$ имеем

$$\sup_{u\in Y_{C_1}}\|u-u^*\|_{W_2^1(\Omega)}\leq {}^{C_1}/_{C_0}\,a_0=\left(1+{}^{4a_0\varepsilon_1}/_{C_0}\right)a_0=a_1.$$

Но $C_1=C_0\left({}^{4a_0}/_{C_0}\,\varepsilon+1\right)$, поэтому ${}^{a_1}/_{C_1}={}^{a_0}/_{C_0}$. Так как $K_{h_1}\subseteq K_{h_2}\subseteq\ldots\subseteq K$, то, продолжая подобным образом, имеем (при ${}^{4a_0}/_{C_0}=\beta$)

$$\|\hat{u}_{h_n}-u^*\|_{W_2^1(\Omega)}=a_0(1+\beta\varepsilon_1)(1+\beta\varepsilon_2)\ldots(1+\beta\varepsilon_n).$$

Из условия $\sum_{n=1}^\infty\varepsilon_n<\infty$ следует, что последовательность $\{\hat{u}_{h_n}\}$ (следовательно, и $\{u^*_{h_n}\}$) является ограниченной. Отсюда и из теоремы 3 [7, теорема I] нетрудно получить утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как уже отмечено, параметр α можно изменять от итерации к итерации. При этом предполагалось, что

$d_n \le C,\ n=1,2,\ldots$ Нетрудно заметить, что для получения оценки

$$\|u^*_{h_n} - u^*_n\|_{W_2^1(\Omega)} \le C h_n^{3/4},\ n=1,2,\ldots,$$

потребуется условие $0<\beta \le d_n,\ n=1,2,\ldots$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае, когда Ω - многоугольник, предположение о выпуклости не является обязательным для получения оценки $\|u^*_n - u^*_{h_n}\|_{W_2^1(\Omega)} \le C h_n^{3/4},\ n=1,2\ldots$ Соответствующее доказательство аналогично приведенному выше.

3. Рассмотрим теперь вопрос о численном решении приближенной задачи

$$\begin{cases} \min \int_\Omega (|\nabla u_{h_n}|^2 - 2 f u_{h_n} + \alpha |u_{h_n} - u^*_{h_{n-1}}|^2)\, d\Omega, \\ u_{h_n} \in K_{h_n} = \{v_{h_n}(x) : v_{h_n}(x_i) \ge \psi(x_i)\ \ \forall i \in I_1\}. \end{cases}$$

Путем обычных преобразований задача приводится к виду:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_1(y) = \langle Ay, y\rangle + \langle p, y\rangle - \min!\ (A=A^*); \\ y_i \ge \Psi_i,\ i \in I_1, \end{cases} \tag{10}$$

где $\Psi_i = \psi(x_i)$, а $y = \{u_i^{h_n}\}_{i\in I} \in R^N$ $(N=|I|)$. Матрицу A можно рассматривать как сумму двух матриц A_1 и A_2, где A_1 соответствует квадратичной форме, порождаемой $\int_\Omega |\nabla u_{h_n}|^2 d\Omega$, а A_2 - квадратичной форме, порождаемой $\alpha \int_\Omega (u_{h_n})^2 d\Omega$.

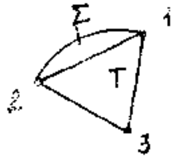
Для произвольной матрицы B через $\theta(B)$ и $\beta(B)$ обозначим соответственно ее наименьшее и наибольшее собственные числа и пусть $\mu(B)$ - ее число обусловленности, т.е. $\mu(B) = \beta(B)/\theta(B)$.

ЛЕММА 2. Для функций u_{h_n} из пространства $W^1_{2,h_n}(\bar\Omega)$ справедливы неравенства

$$C_1 h_n^2 \|\{u_i^{h_n}\}_{i\in I}\|^2_{R^N} \le \|u_{h_n}\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_2 h_n^2 \|\{u_i^{h_n}\}_{i\in I}\|^2_{R^N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [5] показано, что для произвольного треугольного элемента T нашей триангуляции справедливы неравенства

$$C_3 h_n^2 ((u^1_{h_n})^2 + (u^2_{h_n})^2 + (u^3_{h_n})^2) \le \int_T u^2_{h_n} d\Omega \le C_4 h_n^2 ((u^1_{h_n})^2 + (u^2_{h_n})^2 + (u^3_{h_n})^2);$$



Эти неравенства справедливы и для произвольного криволинейного элемента, так как $mes(\Sigma) \le C h_n^3$. Для доказательства леммы осталось просуммировать по всем элементам триангуляции и учесть, что число элементов, имеющих данный узел своей вершиной, конечно и не зависит от h_n.

Из леммы 2 следует, что $\theta(A_2) \ge \alpha C_1 h_n^2$, а $\beta(A_2) \le \alpha C_2 h_n^2$. Тем самым $A>0$, $\langle Ay, y\rangle \ge \alpha C_1 h_n^2 \|y\|^2_{R^N}$. Нетрудно показать, что $\theta(A) \ge \theta(A_1) + \theta(A_2) = \theta(A_2)$, $\beta(A) \le \beta(A_1) + \beta(A_2)$. Поэтому $\mu(A) \le \dfrac{\beta(A_1)+\beta(A_2)}{\theta(A_2)} \le \dfrac{\beta(A_1)+\alpha C_2 h_n^2}{\alpha C_1 h_n^2}$. Следовательно, изменяя параметр α, мы можем получать различную обусловленность соответствующей матрицы A. Например, если на какой-то итерации взять $\alpha = O(h_n^{-2})$, то $\mu(A) < C$. Но выбор больших α означает замедление внешних шагов процесса, т.е. медленную сходимость к решению исходной задачи.

Перепишем (10) в виде

$$\begin{cases} J_1(y) = \langle Ay, y\rangle + \langle p, y\rangle - \min! \\ y \in \hat{K}, \text{ где } \hat{K} = \prod_{i=1}^{N} K_i, \end{cases} \qquad (11)$$

$$K_i = \begin{cases} [\psi_i, +\infty[, \text{ если } i \in I_1, \\ ]-\infty, +\infty[, \text{ если } i \in I_0. \end{cases}$$

Для решения (11) предлагается использовать метод поточечной релаксации [1].

Алгоритм поточечной релаксации выглядит следующим образом:

1) задаем начальный вектор y^0;

2) определяем $y_i^{n+1/2}$ как решение неравенства

$$J_1(y_1^{n+1}, \dots, y_{i-1}^{n+1}, y_i^{n+1/2}, y_{i+1}^n, \dots, y_N^n) \le J_1(y_1^{n+1}, \dots, y_{i-1}^{n+1}, y_i, y_{i+1}^n, \dots, y_N^n),$$
$$\forall y_i \in]-\infty, +\infty[\ ;$$

3) $y_i^{n+1} = P_{K_i}((1-\omega) y_i^n + \omega y_i^{n+1/2})$, где P_{K_i} – оператор проектирования на K_i, а ω – параметр релаксации

($0<\omega<2$). Можно показать [9], что компоненты $(u_i^{h_n})^*$ решения $y^*=u^*_{h_n}$, соответствующие активным ограничениям $((u_i^{h_n})^*=\psi_i)$, находятся за конечное L_1 число шагов, после чего, начиная с некоторого $L_2\geq L_1$, справедлива линейная скорость сходимости:

$$\|y^k-y^*\|_{R^N}\leq C q^{n-L_2}\quad (k\geq L_2),$$

где

$$C\leq\sqrt{\frac{2(\mathcal{J}_1(y^k)-\mathcal{J}_1(y^*))}{\theta(A)}},\quad q=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2-\omega}{\omega}\cdot\frac{\delta^*\cdot\theta(A)}{\|(1-1/\omega)\mathcal{D}+T\|^2}}},$$

$A=T^*+\mathcal{D}+T$, T – верхнетреугольная матрица, $\mathcal{D}$ – диагональная, $\delta^*=\min\limits_{1\leq i\leq N}a_{ii}$.

4. Исследуем теперь вопрос об устойчивости задачи (8):

$$\begin{cases}\mathcal{J}_n(u)=\int\limits_{\Omega}(|\nabla u|^2-2fu+\alpha|u-u^*_{h_{n-1}}|^2)d\Omega-\min!\\ u\in K=\{v\in W_2^1(\Omega):\gamma v\geq\psi\ \text{п.в. на}\ \Gamma\}.\end{cases}$$

Считаем выполненными предположения п.I, касающиеся Ω, f, ψ. Пусть f_1 и ψ_1 такие, что $f_1\in L_2(\Omega)$, $\|f-f_1\|_{L_2(\Omega)}\leq\delta$, $\psi_1\in L_2(\Gamma)$, $|\psi-\psi_1|\leq\delta$ п.в. на Γ. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\mathcal{J}_n^1(u)=\int\limits_{\Omega}(|\nabla u|^2-2f_1u+\alpha|u-u^*_{h_{n-1}}|^2d\Omega-\min!\\ u\in K_1=\{v\in W_2^1(\Omega):\gamma v\geq\psi_1\ \text{п.в. на}\ \Gamma\}.\end{cases}$$

Решение этой задачи обозначим через $u_n^*(\delta)$.

ТЕОРЕМА 4. Имеет место

$$\lim_{\delta\to 0}\|u_n^*(\delta)-u_n^*\|_{W_2^1(\Omega)}=0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\rho>0$ обозначим

$$K_\rho=\{v\in W_2^1(\Omega):\gamma v\geq\psi+\rho\ \text{п.в. на}\ \Gamma\}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_n(\rho)=\min\{\mathcal{J}_n(u):u\in K\}. \tag{12}$$

Пусть $\tilde{u}_n(\rho)$ - решение (12). Очевидно, что $K_{\rho_1} \supseteq K_{\rho_2}$, если $\rho_1 \le \rho_2$, поэтому $\tilde{\mathcal{T}}_n(\rho_1) \le \mathcal{T}_n(\rho_2)$. Это означает, что для всех ρ, меньших некоторого ρ_0, существует постоянная C и что $\|\tilde{u}_n(\rho)\|_{W_2^1(\Omega)} \le C$, а значит, и $\|\tilde{u}_n(\rho)\|_{L_2(\Omega)} \le$ $\le C$.

Если $\gamma u \ge \psi + \delta$ п.в. на Γ, то $\gamma u - \psi_1 = (\gamma u - \psi) + (\psi - \psi_1) \ge$ $\ge \delta - \delta = 0$ п.в. на Γ, т.е. $\gamma u - \psi_1 \ge 0$ п.в. на Γ. Далее,

$$|\mathcal{T}_n^1(\tilde{u}_n(\delta)) - \mathcal{T}_n(\tilde{u}_n(\delta))| = \left|\int_\Omega (f - f_1)\tilde{u}_n(\delta)\, d\Omega\right| \le$$

$$\le \left(\int_\Omega (f - f_1)^2 d\Omega\right)^{1/2} \cdot \|\tilde{u}_n(\delta)\|_{L_2(\Omega)} \le \delta (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2} C.$$

(Считаем, что $\delta < \rho_0$.) Таким образом, имеем, что система

$$\begin{cases} \mathcal{T}_n^1(u) \le \tilde{\mathcal{T}}_n(\delta) + \delta C (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}, \\ \gamma u - \psi_1 \ge 0 \quad \text{п.в. на } \Gamma \end{cases}$$

совместна.

Нетрудно вывести и тот факт, что решения системы равномерно ограничены в $W_2^1(\Omega)$ относительно δ, меньших некоторого фиксированного числа, например ρ_0 : $\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \le C_1$ при $\delta < \rho_0$. Пусть $C_2 = \max(C, C_1)$.

Объединяя вышесказанное, получаем, что при $\delta < \rho_0$ множество решений системы содержится в множестве

$$X_\delta = \{u \in W_2^1(\Omega) : \mathcal{T}_n(u) \le \tilde{\mathcal{T}}_n(\delta) + 2\delta C_2 (\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}, \ \gamma u \ge \psi - \delta \ \text{ п.в. на } \Gamma\}.$$

Тем самым $u_n^*(\delta) \in X_\delta$. Согласно определению, $\tilde{\mathcal{T}}_n(\delta) \ge \mathcal{T}_n(u_n^*)$. Так как $\gamma u_n^* + \delta \ge \psi + \delta$ п.в. на Γ, то

$$\mathcal{T}_n(u_n^*) \le \tilde{\mathcal{T}}_n(\delta) \le \mathcal{T}_n(u_n^* + \delta),$$

откуда

$$\lim_{\delta \to \infty} \tilde{\mathcal{T}}_n(\delta) = \mathcal{T}_n(u_n^*). \qquad (13)$$

Рассмотрим некоторую последовательность $\{u_n^*(\delta_k)\}$, где $\delta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{k \to \infty} \|u_n^*(\delta_k) - u_n^*\|_{W_2^1(\Omega)} = 0.$$

Из вида множества X_Γ и (13) следует, что все предельные точки последовательности $\{J_n(u_n^*(\delta_k))\}$ не превосходят по величине $J_n(u_n^*)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{J_n(u_n^*(\delta_k))\}$ сходится. Так как $\gamma u_n^*(\delta_k) \geq \psi - \delta_k$ п.в. на Γ, то $u_n^*(\delta_k)+\delta_k \in K$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} J_n(u_n^*(\delta_k)) \leq J_n(u_n^*) \leq \lim_{k\to\infty} J_n(u_n^*(\delta_k)+ + \delta_k) = \lim_{k\to\infty} J_n(u_n^*(\delta_k)),$$

т.е.

$$\lim_{k\to\infty} J_n(u_n^*(\delta_k)) = \lim_{k\to\infty} J_n(u_n^*(\delta_k)+\delta_k) = J_n(u_n^*).$$

Нетрудно доказать в силу строгой коэрцитивности функционала J_n, что $(u_n^*(\delta_k)+\delta_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} u_n^*$ в $W_2^1(\Omega)$, следовательно, и $u_n^*(\delta_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} u_n^*$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. GLOVINSKI R., LIONS J.L., TREMOLIER R. Numerical analysis of variational inequalities.- North-Holland, 1981.
2. HLAVÁČEK I. Convergence of dual finite element approximations for unilateral boundary value problems.- Aplikace mat., 1980, v.25, N5, p.375-386.
3. МИХЛИН С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977.
4. КАПЛАН А.А. Алгоритмы выпуклого программирования, использующие сглаживание точных функций штрафа. - Сиб. мат. журн., 1982, т.23, №4, с.1322-1350.
5. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ч.I,II. - Дифференциальные уравнения и их применение, 1974, вып.5,8. Вильнюс.
6. МАРЧУК Г.И., АГОШКОВ В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981.
7. SCARPINI F., VIVALDI M.A. Error estimates for the approximation of some unilateral problems.-RAIRO, 1977, v.11, N2, p.197-208.
8. BREZIS H. Problemes unilateraux.- J. math. pures et appl., 1972, v.51, p.3-168.

9. НАММ Р.В. Метод поточечной релаксации в задаче упругопластического кручения цилиндрического стержня. - Оптимизация, 1983, вып. 32(49), с.140-152.

Поступила в ред.-изд. отдел
14.07.1983 г.