УДК 519.8

ПОИСК РАЦИОНАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬОТИННОГО РАСКРОЯ

Э.А.Мухачёва

1. Фундаментальные исследования в области рационального раскроя были выполнены Л.В.Канторовичем и В.А.Залгаллером в 40-х годах [1]. Ими было показано, что для расчета оптимального раскроя могут быть использованы методы линейного программирования. Для преодоления трудностей, связанных с построением допустимых карт раскроя, указанными авторами были предложены приемы динамического программирования. Однако разработанные на этой основе машинные алгоритмы оказываются громоздкими и практически могут использоваться лишь для получения предварительного раскроя на более крупные заготовки. Другой причиной малой применяемости классических методов оказалась их оторванность от конкретных производственных условий. Поэтому наряду с общими методами разрабатываются методы условной оптимизации, в рамках которых легко осуществляется учет технологических и организационных ограничений [2]. Погружение задач раскроя в производственный фон порождает неопределенность цели, которая приводит к многокритериальной постановке задачи. В частности, при разработке автоматизированной системы рационального раскроя задача исследовалась с позиций двухкритериальной оптимизации [3]. С этой целью предложен метод поиска решения на основе паретовского анализа с использованием дополнительных характеристик. Обоснованию этого метода и посвящена настоящая статья.

2. В качестве основной рассматривается задача гильотинного раскроя материала на линейные или прямоугольные заготовки в условиях серийного производства изделий. Заданы: габариты и мера P раскраиваемого материала; размеры и мера $p_i, i=1,m$, заготовок m различных наименований; вектор $\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ спроса на заготовки. Требуется составить экономный (с минимальным расходом материала) план раскроя, характеризуемый совокупностью раскроев (карт) с указанием интенсивности их применения.

Каждый раскрой r характеризуется вектором

$$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_m), \tag{I}$$

где a_i - количество заготовок i -го вида. Составление экономного плана раскроя сводится к решению следующей математической задачи.

Минимизировать величину

$$\mu(x)=\sum_j x_j \tag{2}$$

при ограничениях

$$\sum_j x_j\alpha^j=\beta,\ x_j\geqslant 0. \tag{3}$$

Для решения задачи обычно используется метод последовательного улучшения с алгоритмически наполняемой матрицей ограничений. При этом непосредственная проверка условий оптимальности заменяется решением следующей экстремальной задачи.

Найти вектор (I), удовлетворяющий условиям допустимости раскроя и максимизирующий функцию

$$z=(y,\alpha)-\rho, \tag{4}$$

где y - текущий m-мерный вектор двойственных оценок.

Если максимум окажется больше нуля, рассматриваемый план раскроя не оптимален, найденный вектор α включается в базис.

Разработанная в [4] многовариантная схема позволяет генерировать векторы (I) на множество раскроев заданной сложности. Возможность многовариантной реализации вытекает из рекуррентных соотношений, записанных для одномерного случая в следующем виде:

$$\begin{cases} f(p)=0,\ p<p_0, \\ f(p)=\max\limits_i \max\limits_{a_i}\{y_i a_i+f(p-p_i a_i)\}. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через A_p^s множество допустимых раскроев материала меры p не более чем на s различных заготовок, а искомый максимум на этом множестве через $f^s(p)$. Тогда соотношения (5) перепишутся следующим образом:

$$\begin{cases} f^s(p)=\max\limits_i \max\limits_{a_i}\{y_i a_i+f^{s-1}(p-p_i a_i)\}, \\ f^1(p)=\max\limits_i y_i[P/p_i]. \end{cases} \tag{6}$$

Соотношения (6) позволяют строить идентичные вычислительные процессы при различных заданных s. При этом единая вычислительная схема организована таким образом, что происходит постепенное повышение ее сложности, характеризуемое количеством различных заготовок в генерируемом раскрое.

Ограниченный перебор заготовки в рекуррентных соотношениях (5) и (6) реализуется с помощью ведения приоритетного списка (ПС), заготовки в котором упорядочены по их удельным оценкам [2]. Объем перебора заготовок при этом зависит от степени близости соседних удельных оценок $y_i^0=y_i/p_i$ и существенно возрастает на соседних итерациях. В этой связи заметим, что на каждом шаге решения задачи в целом не обязательно генерировать раскрой с максимальной суммарной оценкой заготовок. Для включения в базис достаточно найти раскрой, для которого

$$(\alpha, y)\geq\Delta, \tag{7}$$

где Δ - величина барьера, непосредственно связанная с текущими значениями оценок. Помимо этой, хорошо известной в линейном программировании функции барьерная политика позволяет реализовать многовариантную схему генерирования раскроев на различных уровнях сложности. Кроме того, с помощью ведения текущего барьера отсекаются и неперспективные ветви. Величина барьера Δ вычисляется на каждом шаге решения задачи в целом. В качестве начального барьера принимается величина, характеризующая оценку раскраиваемого материала в среднем. Например, хорошо оправдал себя при решении ряда задач барьер

$$\Delta(P)=\frac{f^{\circ}(P)+\tilde{f}(P)}{2}, \qquad (8)$$

где $f^{\circ}(P)$ и $\tilde{f}(P)$ - соответственно нижняя и верхняя границы оценки материала меры P. При этом серийном раскрое $f^{\circ}(P)=$ $=P$.

Многовариантная схема, реализующая соотношения (6), является также эффективным методом при решении задачи раскроя в двухкритериальной постановке.

3. Рассматривается задача поиска рационального раскроя по двум критериям, характеризующим соответственно расход материала и сложность реализации раскроя. В качестве первого критерия принят коэффициент раскроя f, представляющий собой отношение суммарного веса заготовок к абсолютным затратам (2) материала. Второй критерий s является дискретной величиной, он указывает максимальное число различных заготовок, вырезаемых из одного куска материала. При этом требуется минимизировать сложность s и максимизировать коэффициент раскроя f. В такой постановке представляет интерес построение множества Парето и отбор на нем рациональных планов раскроя, кандидатов для принятия компромиссного решения. Для построения множества векторов Парето можно воспользоваться приведенной многовариантной схемой.

ЛЕММА. Условно-оптимальные векторы $\bar{x}(s)$, где s - заданная сложность раскроя, и только они образуют множество Парето для рассматриваемой двухкритериальной задачи раскроя.

Пусть $\bar{x}(s)$ - оптимальный вектор, полученный при решении задачи R на множестве раскроев сложности не выше s, и соответствующий коэффициент раскроя равен $f(s)$. Тогда не существует пары $(\hat{s};\hat{f})$ такой, чтобы одновременно выполнялись оба неравенства:

$$\hat{s}\leq s;\ \hat{f}>f,$$

следовательно, $\bar{x}(s)$ - вектор Парето.

Пусть теперь $x(s)$ - допустимый, но не оптимальный вектор сложности s. Тогда существует вектор $\hat{x}(s)$ такой, что

$$f(\hat{x}(s)) > f(x(s)),$$

т.е. допустимый вектор $x(s)$ не является вектором Парето.

Таким образом, только условно-оптимальные векторы $\tilde{x}(s)$ образуют множество Парето.

Для принятия компромиссного решения на этапе проектирования раскроя достаточно иметь несколько кандидатов из числа векторов Парето. Вектор Парето, отобранный тем или иным способом и включенный в список кандидатов для принятия решения, будем именовать р а ц и о н а л ь н ы м вектором. Приведем эвристический прием отбора рациональных векторов.

Пусть заданы контрольные показатели s^* и f^* рассматриваемых критериев s и f. Значения $s \leq s^*$ и $f \geq f^*$ будем называть д о с т и ж и м ы м и соответственно для критериев сложности и коэффициента раскроя. Пара $(s; f(s))$ достижимая, если оба критерия являются достижимыми. Вектор Парето достижимый, если отвечающая ему пара $(s, f(s))$ достижимая. При решении двухкритериальной задачи возможны следующие два случая. В первом случае имеется несколько достижимых векторов, они и объявляются рациональными векторами Парето. Во втором случае достижимых векторов нет. Рациональными объявляются векторы Парето из интервала $[(s; f(s^*)); (s; f^*(s))]$. Для граничных векторов этого интервала достижимым является один из критериев, а для внутренних векторов ни один из критериев не является достижимым.

Трудоемкий процесс расчета даже небольшого числа рациональных планов оказывается излишним. Как правило, для принятия "точного" решения достаточно построить не более трех различных векторов Парето. Это связано с тем, что при дискретном увеличении сложности s коэффициент раскроя изменяется "почти" непрерывно, испытывая скачок только при переходе с $s=1$ на $s=2$. Диалог человек - ЭВМ помогает найти искомый рациональный план раскроя, не прибегая к построению всего множества рациональных планов. С этой целью анализируется текущий план Парето. При этом ЭВМ используется в качестве а н а л и з а т о р а , а за человеком остается право окончательного выбора. Для облегчения принятия решения рассчитываются следующие дополнительные характеристики:

$P_{ост}$ - суммарная площадь (мера) всех остатков;

$P_{мал}$ - суммарная площадь всех малых заготовок;

$N(s)$ - число раскроев максимальной сложности s ;

$z(s)$ - трудоемкость реализации плана раскроя (в рублях);

$z(f)$ - цена израсходованного материала;

$\Delta z(s)=z(s)-z(s-1)$ - прирост трудоемкости;

$\Delta z(f)=z(f(s-1))-z(f(s))$ - экономия материала.

После получения текущего плана Парето выдаются его главные характеристики: достигнутые значения s и f и контрольные показатели s^* и f^*. На основе только этой информации выбирается альтернатива:

I. Перейти к построению конечного плана.

2. Перейти к построению рационального плана сложности $s+1$.

3. Выдать следующую группу характеристик.

Предположим, что пользователь выбирает альтернативу 3. После этого он имеет параметры $P_{ост}$ и $P_{мал}$. На основании сравнения значений этих параметров вновь принимается одна из указанных альтернатив. Если $P_{мал}$ значительно больше $P_{ост}$, то это означает, что практически все остатки можно использовать для получения мелких заготовок. Следовательно, имеет место случай I. Если же $P_{мал} \leq P_{ост}$, то целесообразно улучшить раскрой на крупные заготовки, т.е. имеет место случай 2. В случае 3 выводятся остальные числовые характеристики: $N(s), \Delta z(s)$ и $\Delta z(f)$. Ясно, что если $\Delta z(s)$ больше, равно или чуть меньше $\Delta z(f)$, то переход к построению следующего рационального плана не целесообразен (случай I).

Описанный процесс формализован при решении задачи в автоматизированном режиме. Однако качественные характеристики типа " значительно более ", "чуть менее " не поддаются формализации. Это и побудило разработку диалога на этапе расчетной части работы системы. Приведенная организация диалога гарантирует получение рационального плана раскроя за считанные минуты. В таковом виде многовариантная схема реализована в ОС ЕС ЭВМ и представляет собой ППП "Рациональный раскрой". Пакет передан для сопровождения в ЦЕНТРОПРОГРАММСИСТЕМ и используется в нескольких организациях страны.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. - Новосибирск: Наука, 1971.
2. МУХАЧЁВА Э.А. Методы условной оптимизации в задаче рационального раскроя листового проката. - Оптимизация, 1978, вып. 22(39), с.83-93.
3. МУХАЧЁВА Э.А. Расчет рациональных раскроев в системе автоматизированного проектирования технологической подготовки гильотинного ракроя. - Кузнечно-штамповочное производство, 1982, №7, с.31-37.
4. МУХАЧЁВА Э.А. Методы генерации столбцов (раскроев) в пакете "Прямоугольный раскрой". - В кн.: Использование методов оптимизации в текущем планировании и управлении производством. М.: изд. ВНИИ системных исследований, 1980, с.234-239.

Поступила в ред.-изд. отдел
7.06.1983 г.