УДК.517.432

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РЕФЛЕКСИВНЫХ $\mathcal{K}$-ПРОСТРАНСТВ

В.З.Стрижевский

В заметке строится тензорное произведение рефлексивных [1] $\mathcal{K}$-пространств.

Для произвольных $\mathcal{K}$-пространств X, Y и Z с достаточным числом порядково-непрерывных функционалов будем пользоваться следующими обозначениями:

X° - $\mathcal{K}$-пространство всех порядково-непрерывных функционалов над X;

$\mathcal{L}_0(X,Y)$ - $\mathcal{K}$- пространство всех порядково-непрерывных операторов $X \to Y$;

$B(X,Y;Z)$- $\mathcal{K}$ - пространство всех порядково-непрерывных билинейных операторов $X \times Y \longrightarrow Z$;

R - $\mathcal{K}$ - пространство вещественных чисел.

Нетрудно показать, что пространства $\mathcal{L}_0(X,Y)$ и $\mathcal{L}_0(X^{\circ\circ}, Y^{\circ\circ})$ алгебраически и структурно изоморфны. Поэтому при изучении порядково-непрерывных операторов можно ограничиться случаем рефлексивных $\mathcal{K}$-пространств X и Y. В дальнейшем все встречающиеся в работе $\mathcal{K}$-пространства считаются рефлексивными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тензорным произведением $\mathcal{K}$-пространств X и Y называется $\mathcal{K}$-пространство $X \bar{\otimes} Y = B(X,Y;R)^\circ$.

Для каждой пары $(x,y) \in X \times Y$ символом $x \bar{\otimes} y$ мы будем обозначать следующий функционал над $B(X,Y;R)$:

$$x \bar{\otimes} y : b(\cdot,\cdot) \mapsto b(x,y), \ (b(\cdot,\cdot) \in B(X,Y;R)).$$

Очевидно, $x \bar{\otimes} y \in B(X,Y;R)^\circ = X \bar{\otimes} Y$. Введем также отображение $\chi : (x,y) \mapsto x \bar{\otimes} y, \ (\chi : X \times Y \to X \bar{\otimes} Y)$, называемое каноническим вложением $X \times Y$ в $X \bar{\otimes} Y$. Нетрудно понять, что

χ является порядково-непрерывным билинейным оператором.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольных рефлексивных $\mathcal{K}$-пространств X, Y, Z отображение $T \mapsto T \circ \chi$ является алгебраическим и структурным изоморфизмом $\mathcal{L}_0(X \bar{\otimes} Y, Z)$ на $\mathcal{B}(X, Y; Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $T \mapsto T \circ \chi$ является линейным отображением $\mathcal{L}_0(X \bar{\otimes} Y, Z)$ в $\mathcal{B}(X, Y; Z)$. Оно инъективно. Действительно, предположим $T \neq \mathbb{O}$. Тогда существуют $u \in X \bar{\otimes} Y$ и $f \in Z^\circ$ такие, что $f(T(u)) \neq 0$. $f \circ T$ является элементом пространства $(X \bar{\otimes} Y)^\circ$, при этом $f \circ T \neq \mathbb{O}$. Нетрудно показать, что $\mathcal{K}$-пространство $\mathcal{B}(X, Y; \mathbb{R})$ рефлексивно. Если Γ - канонический изоморфизм $\mathcal{B}(X, Y; \mathbb{R})$ на $\mathcal{B}(X, Y; \mathbb{R})^{\circ\circ} = (X \bar{\otimes} Y)^\circ$, то $\Gamma^{-1}(f \circ T) \neq \mathbb{O}$. Таким образом, $\Gamma^{-1}(f \circ T)$ является ненулевым билинейным функционалом над $X \times Y$. Значит, существуют $x \in X$ и $y \in Y$, для которых $[\Gamma^{-1}(f \circ T)](x, y) \neq 0$. Тогда $[f \circ T](x \bar{\otimes} y) \neq 0$ и, следовательно, $T \circ \chi \neq \mathbb{O}$. Инъективность отображения $T \mapsto T \circ \chi$ доказана.

Покажем сюръективность этого отображения. Если $Z = \mathbb{R}$, то для произвольного билинейного функционала $b \in \mathcal{B}(X, Y; \mathbb{R})$ в качестве T возьмем функционал $\Gamma(b) \in (X \bar{\otimes} Y)^\circ$. Ясно, что $b = \Gamma(b) \circ \chi$.

Пусть Z - произвольное рефлексивное $\mathcal{K}$-пространство и $b \in \mathcal{B}(X, Y; Z)$. Билинейный оператор b порождает порядково-непрерывный оператор $b' : z' \mapsto z'(b(\cdot, \cdot))$, $(b' : Z^\circ \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y; \mathbb{R}))$. Тогда $b'(z') = \Gamma(b'(z')) \circ \chi$ для всех $z' \in Z^\circ$. Оператор $T : z' \mapsto \Gamma(b'(z'))$ является порядково-непрерывным и, следовательно, элементом пространства $\mathcal{L}_0(Z^\circ, (X \bar{\otimes} Y)^\circ)$. Сопряженный оператор $T^* \in \mathcal{L}_0(X \bar{\otimes} Y, Z)$ является искомым: $b = T^* \circ \chi$. Таким образом, отображение $T \mapsto T \circ \chi$ - биекция. Ясно также, что оно является и структурным изоморфизмом. Теорема доказана.

Следующее утверждение показывает "плотность" вложения алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ в $X \bar{\otimes} Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для произвольных рефлексивных $\mathcal{K}$-пространств X и Y

$$\{\chi[X \times Y]\}^{dd} = X \bar{\otimes} Y^{*)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению тензорного произведения

*) d означает дизъюнктность в $\mathcal{K}$-пространстве $X \bar{\otimes} Y$.

$\chi[X\times Y]\subset X\bar{\otimes} Y$. Предположим, что существует строго положительный элемент $u\in\{\chi[X\times Y]\}^d=U$. Тогда для некоторого положительного функционала $\varphi\in(X\bar{\otimes} Y)^\circ$ будет $\varphi(u)>0$. Функционал $\psi=\varphi\circ P_{\tau_U}$ *) отличен от $\mathbb{O}$. Значит, $\Gamma^{-1}(\psi)\neq\mathbb{O}$ (Γ - канонический изоморфизм $\mathcal{B}(X,Y;\mathbb{R})$ на $(X\bar{\otimes} Y)^\circ=$ $=\mathcal{B}(X,Y;\mathbb{R})^{\circ\circ}$). Следовательно, существуют $x\in X$ и $y\in Y$ такие, что $[\Gamma^{-1}(\psi)](x,y)\neq 0$. Тогда $\psi(x\bar{\otimes} y)\neq 0$, что противоречит включению $supp\,\psi\subset\{\chi[X\times Y]\}^d$ и, значит, $\{\chi[X\times Y]\}^{dd}=X\bar{\otimes} Y$.

Простое доказательство следующего утверждения мы опускаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (ассоциативность тензорного произведения). *K-пространства $(X\bar{\otimes} Y)\bar{\otimes}\mathcal{Z}$ и $X\bar{\otimes}(Y\bar{\otimes}\mathcal{Z})$ изоморфны.*

Пусть отображение γ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{L}_0(X,Y)$ и $\mathcal{B}(X,Y^\circ;\mathbb{R})$ $\gamma: T\mapsto\langle\cdot,T\cdot\rangle, T\in\mathcal{L}_0(X,Y)$, билинейный функционал $\langle\cdot,T\cdot\rangle$ задается по правилу

$$\langle\cdot,T\cdot\rangle:(x,y')\to y'(T(x)),\ (x,y')\in X\times Y^\circ.$$

Отображение $\Gamma\circ\gamma$ является изоморфизмом $\mathcal{L}_0(X,Y)$ на $(X\bar{\otimes} Y)^\circ$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Положительный оператор $T\in\mathcal{L}_0(X,Y)$ будем называть строго существенно положительным (с.с.п.), если $T(x)\in\mathcal{E}(Y)$ **) для всех $x>0$ $(x\in X)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы оператор T был единицей пространства $\mathcal{L}_0(X,Y)$, необходимо, чтобы он являлся с.с.п. оператором.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если T - единица в $\mathcal{L}_0(X,Y)$, то функционал $\Gamma(\gamma(T))$ - единица в $(X\bar{\otimes} Y^\circ)^\circ$. Компонента существенной положительности функционала $\Gamma(\gamma(T))$ исчерпывает все $X\bar{\otimes} Y^\circ$: $\Gamma(\gamma(T))(u)>0$ для всех $u>\mathbb{O}$ ($u\in$ $\in X\bar{\otimes} Y^\circ$). Для произвольных $x>\mathbb{O}$ и $y'>\mathbb{O}$ ($x\in X$, $y'\in Y^\circ$) в качестве u возьмем $x\bar{\otimes} y'$. Имеем $\Gamma(\gamma(T))(x\bar{\otimes}$

---

*) P_{τ_U} - оператор проектирования в $X\bar{\otimes} Y$ на компоненту U.

**) Единичным фильтром $\mathcal{E}(Y)$ называется фильтр слабых единиц в Y.

$y')>0$. Значит, $\gamma(T)(x,y')>0$. Справедливость последнего неравенства при всех $x>0$, $y'>0$ эквивалентна тому, что T является с.с.п. оператором.

Автор глубоко признателен Г.П.Акилову за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в ред.-изд. отдел
02.12.1983 г.