Выпуск 33(50) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Выпуклый анализ

УДК 517.982+510.644+512.58

О ТЕХНИКЕ СПУСКОВ И ПОДЪЕМОВ

С.С.Кутателадзе

В последние годы выпуклый анализ интенсивно обогащается аппаратом соседних разделов математики. В свою очередь, аппарат выпуклого анализа и прежде всего субдифференциальное исчисление интенсивно проникает в теорию и численные методы программирования, в математическую экономику, в теорию принятия решений и т.п.[1]. В самое последнее время в выпуклом анализе нашли существенные применения булевозначные модели теории множеств [2-7]. С их помощью, в частности, были решены долго стоявшие проблемы дезинтегрирования [8] и внутреннего описания субдифференциалов [9]. Приложения булевозначных моделей к анализу или, как еще говорят, приложения булевозначного анализа основаны на изучении способа изображения исследуемых объектов в "нестандартном универсуме" - в булевозначной модели - с помощью обычных множеств. Указанное изучение связано с естественными функториальными процедурами - спуском и подъемом. При спуске булевозначного объекта описывается набор составляющих его множеств. При подъеме решается обратная задача: ищутся условия, при которых исходный объект порождает булевозначное множество с заданной структурой. Основной результат при этом состоит в реализации программы спуск-подъем, т.е. в обнаружении критериев систем, изоморфных спускам аналогичных образований в булевозначной модели. В настоящее время спуск-подъем осуществлен для ряда систем, важных в анализе и в его приложениях, в частности для K-пространств [6-14]. Особо выделим работу [14], наметившую категорный подход к программе спуск-подъем. Однако говорить о полной ясности в очерченном круге вопросов, конечно же, преждевременно. В то же время уже сейчас перспективность булевозначного анализа в приложениях к субдифференциальному исчислению и к близким разделам теории экстремальных задач бесспорна. В этой связи хочется надеяться, что достижение конкретной цели статьи – детализация программы спуск-подъем для общих алгебраических систем – будет полезно и для решения актуальной задачи популяризации булевозначного анализа.

§I. Вспомогательные сведения о булевозначных моделях

I.0. Дадим очерк основных фактов о построении и правилах работы с булевозначными моделями, оттенив необходимые нам подробности. Детали в [2–7].

I.I. Пусть B – полная булева алгебра. Для ординала α положим

$$V_\alpha^{(B)} := \{x : (\exists \beta \in \alpha)\, dom(x) \in V_\beta^{(B)} \wedge x : dom(x) \to B\}.$$

В более подробной записи это рекурсивное определение означает

$$V_0^{(B)} := \varnothing, \quad V_{\alpha+1}^{(B)} := \{x : dom(x) \subset V_\alpha^{(B)} \wedge x : dom(x) \to B\},$$

$$V_\alpha^{(B)} := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(B)} \quad \text{при } \alpha = \sup[0,\alpha).$$

Булевозначный универсум $V^{(B)}$ определяют соотношением

$$V^{(B)} := \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(B)},$$

где On – класс всех ординалов. Элементы класса $V^{(B)}$ называют B-значными множествами. Стоит подчеркнуть, что $V^{(B)}$ состоит только из функций.

I.2. Используя способ построения $V^{(B)}$, определяют две функции:

$$x, y \in V^{(B)} \mapsto [\![x \in y]\!] \in B;$$

$$x, y \in V^{(B)} \mapsto [\![x = y]\!] \in B.$$

При этом элемент $[\![x \in y]\!]$ называют оценкой или оценкой истинности принадлежности B-значного множества x - элемента булевозначного универсума - B-значному множеству y. Аналогично, элемент $[\![x \in y]\!]$ называют оценкой равенства x и y в $V^{(B)}$. Указанные функции определены схемой совместной рекурсии:

$$[\![x \in y]\!] := \bigvee_{z \in dom(y)} y(z) \wedge [\![z = x]\!];$$

$$[\![x = y]\!] := \bigwedge_{z \in dom(x)} x(z) \Rightarrow [\![z \in y]\!] \wedge \bigwedge_{z \in dom(y)} y(z) \Rightarrow [\![z \in x]\!].$$

I.3. Имея оценки истинности атомарных формул, нетрудно приписать такую оценку каждой формуле формальной теории множеств. В самом деле, такие формулы представляют собой конечные тексты, полученные из атомарных формул применениями пропозициональных связок $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, кванторов $\forall$, $\exists$ и разумной расстановкой скобок. Таким образом, если φ и ψ - оцененные формулы и $[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!] \in B$ - их оценки, то полагают

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!] := [\![\varphi]\!][\![\psi]\!]; \quad [\![\varphi \vee \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!];$$

$$[\![\varphi \rightarrow \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \Rightarrow [\![\psi]\!]; \quad [\![\neg \varphi]\!] := \neg [\![\varphi]\!] := [\![\varphi]\!]';$$

$$[\![\forall x\, \varphi(x)]\!] := \bigwedge_{x \in V^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!]; \quad [\![\exists x\, \varphi(x)]\!] := \bigvee_{x \in V^{(B)}} [\![\varphi(x)]\!].$$

Здесь $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $'$ означают также соответствующие операции в алгебре B. Указанные определения обеспечивают единичную оценку для классических тавтологий.

I.4. Универсум $V^{(B)}$ с указанным правилом оценивания формул является моделью теории множеств в том смысле, что для любой теоремы φ теории ZFC (теории множеств Цермело - Френкеля с аксиомой выбора) выполнено $[\![\varphi]\!] = 1$ или, как говорят, φ истинно внутри $V^{(B)}$. Приведенный факт часто называют принципом переноса.

Стоит отметить здесь же, что для формулы $\varphi(\cdot)$ теории ZFC и элемента $x \in V^{(B)}$ фраза " $\varphi(x)$ внутри $V^{(B)}$ " или, более полно, " x удовлетворяет φ внутри $V^{(B)}$ " означает равенство $[\![\varphi(x)]\!] = 1$.

Для элемента $x \in V^{(B)}$ и произвольного $b \in B$ определена функция

$$bx : z \mapsto bx(z) \qquad (z \in dom(x)).$$

Эта запись подразумевает, что $b\varnothing := \varnothing$ для $b \in B$.

I.5. Для B-значных множеств x и y и элемента $b \in B$ выполнено:

$$[\![x \in by]\!] = b[\![x \in y]\!];$$

$$[\![bx = by]\!] = b \Rightarrow [\![x = y]\!];$$

$$[\![x = bx]\!] = [\![b'x = \varnothing]\!] = b' \Rightarrow [\![x = \varnothing]\!].$$

$\triangleleft$ В самом деле, привлекая определения, имеем

$$[\![x \in by]\!] = \bigvee_{z \in dom(y)} (by)(z) \wedge [\![x = z]\!] =$$

$$= \bigvee_{z \in dom(y)} b \wedge y(z) \wedge [\![x = z]\!] = b[\![x \in y]\!].$$

Отсюда последовательно выводим:

$$[\![bx = by]\!] = \bigwedge_{z \in dom(y)} \neg by(z) \vee [\![z \in bx]\!] \wedge \bigwedge_{z \in dom(y)} \neg bx(z) \vee$$

$$\vee [\![z \in by]\!] = \bigwedge_{z \in dom(y)} (\neg b \vee \neg y(z) \vee b[\![z \in x]\!]) \wedge \bigwedge_{z \in dom(x)} (\neg b \vee \neg x(z) \vee b[\![z \in y]\!]) =$$

$$= \bigwedge_{z \in dom(y)} (\neg b \vee \neg y(z) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg y(z) \vee [\![z \in x]\!]) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{z \in dom(x)} (\neg b \vee \neg x(z) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg x(z) \vee [\![z \in y]\!]) = \neg b \vee [\![x = y]\!].$$

Из принципа переноса и аксиомы экстенсиональности

$$[\![x = bx]\!] = [\![\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in bx)]\!].$$

Кроме того, $[\![z \in bx]\!] = b[\![z \in x]\!] \leq [\![z \in x]\!]$, т.е. $[\![z \in bx \to z \in x]\!] = 1$. Отсюда выводим:

$$[\![x = bx]\!] = \bigwedge_z [\![z \in x]\!] \Rightarrow [\![z \in bx]\!] =$$

$$= \bigwedge_z (\neg[\![z\in x]\!] \vee (b\wedge [\![z\in x]\!])) = \bigwedge_z (\neg[\![z\in x]\!]\vee b)\wedge(\neg[\![z\in x]\!]\vee[\![z\in x]\!]) =$$

$$= \bigwedge_z \neg[\![z\in x]\!]\vee b = b\vee \bigwedge_z \neg[\![z\in x]\!] = b\vee[\![\forall z\ \neg(z\in x)]\!] =$$

$$= b\vee[\![x=\varnothing]\!] = b' \Rightarrow [\![x=\varnothing]\!] = [\![b'x = b'\varnothing]\!] = [\![b'x=\varnothing]\!]. \ \triangleright$$

1.6. В булевозначном универсуме $V^{(B)}$ соотношение $[\![x=y]\!]=1$ совсем не означает, что функции x и y совпадают. Например, нулевая функция на любом слое $V^{(B)}_\alpha$ играет роль пустого множества внутри $V^{(B)}$. В этой связи осуществляют переход к отделимому булевозначному универсуму $\bar V^{(B)}$. Для определения $\bar V^{(B)}$ в классе $V^{(B)}$ рассматривают отношение $x\sim y := [\![x=y]\!]=1$, которое, бесспорно, является эквивалентностью. Выбирая в каждом классе эквивалентных функций элемент представителя наименьшего ранга ("прием Фреге – Рассела – Скотта"), приходят к отделимому универсуму $\bar V^{(B)}$. Очевидно, что для формулы φ теории ZFC будет $[\![x=y]\!]=1 \to [\![\varphi(x)]\!] = [\![\varphi(y)]\!]$. Таким образом в отделимом универсуме можно вычислять оценки формул, не задумываясь о способе выбора представителя класса эквивалентности. В этой связи в дальнейшем без оговорок осуществляют отождествление $V^{(B)} := \bar V^{(B)}$. Подчеркнем, что в $V^{(B)}$ корректно определен элемент bx для $x\in V^{(B)}$ и $b\in B$. В самом деле, в силу 1.5

$$[\![x_1=x_2]\!]=1 \to [\![bx_1=bx_2]\!]=b \Rightarrow [\![x_1=x_2]\!]=1.$$

Это обстоятельство позволяет, в частности, использовать запись $0=\varnothing$, имея в виду, что $0\varnothing=\varnothing=0x$ для $x\in V^{(B)}$.

1.7. В $V^{(B)}$ справедлив следующий принцип максимума.

Для каждой формулы φ теории ZFC имеется B-значное множество x, для которого

$$[\![\exists x\ \varphi(x)]\!] = [\![\varphi(x)]\!].$$

В частности, для элементов $x,y\in V^{(B)}$ определены элементы $\{x\}^B, \{y\}^B, \{x,y\}^B, \langle x,y\rangle^B$, играющие соответственно роли множеств $\{x\}, \{y\}, \{x,y\}$ и $\langle x,y\rangle$ внутри $V^{(B)}$.

1.8. В $V^{(B)}$ справедлив следующий принцип перемешивания.

Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – разбиение единицы в B, т.е. $\xi_1\neq\xi_2 \to b_{\xi_1}\wedge b_{\xi_2}=0 \wedge \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = 1$. Для любого семейства

$(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов универсума $V^{(B)}$ существует, и притом единственное, перемешивание $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, т.е. элемент x отделимого универсума, обозначаемый $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$, такой, что $[\![x=x_\xi]\!]\geq b_\xi$ для всех $\xi\in\Xi$. При этом выполнено

$$x=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi \longleftrightarrow (\forall \xi\in\Xi)\; b_\xi x=b_\xi x_\xi .$$

I.9. Для любых двух элементов $x,y\in V^{(B)}$ внутри $V^{(B)}$ имеет место равенство

$$b<x,y>^B=b<bx,by>^B.$$

$$\triangleleft\; [\![b<x,y>^B=b<bx,by>^B]\!]=b\Rightarrow[\![<x,y>^B=<bx,by>^B]\!]=$$

$$=b\Rightarrow([\![x=bx]\!]\wedge[\![y=by]\!])=b\Rightarrow(b'\Rightarrow[\![x=\emptyset]\!]\wedge b'\Rightarrow[\![y=$$

$$=\emptyset]\!])=b'\vee((b\vee[\![x=\emptyset]\!])\wedge(b\vee[\![y=\emptyset]\!]))=$$

$$=(b'\vee b\vee[\![x=\emptyset]\!])\wedge(b'\vee b\vee[\![y=\emptyset]\!])=1.\;\triangleright$$

I.10. Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – разбиение единицы, $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ – семейства элементов $V^{(B)}$, тогда

$$\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi<x_\xi,y_\xi>^B=<\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi,\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi>^B.$$

$\triangleleft$ Положим

$$x:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi\,;\quad y:=\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi .$$

Тогда, привлекая I.8 и I.9, имеем

$$b_\xi<x,y>^B=b_\xi<b_\xi x,b_\xi y>^B=b_\xi<b_\xi x_\xi,b_\xi y_\xi>^B=b_\xi<x_\xi,y_\xi>^B.\;\triangleright$$

I.11. Схема рекурсии

$$V_\alpha:=\{x:(\exists\beta\in\alpha)\,x\in\mathcal{P}(V_\beta)\}\qquad(\alpha\in On);$$

$$V:=\bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha ,$$

где $\mathcal{P}(V_\beta)$ – совокупность подмножеств V_β, определяет класс всех множеств V или, как еще говорят, универсум фон Неймана.

Для множества x определяют элемент $x^\wedge$ булевозначного универсума как выделенный представитель класса, определенного схемой рекурсии

$$\emptyset^\wedge := \emptyset;\ dom(x^\wedge) := \{y^\wedge : y \in x\};\ im(x^\wedge) := \{1\}.$$

Элемент $x^\wedge$ называют стандартным именем x.

Для $x \in V$ полагаем $\hat{x} := \{z^\wedge : z \in x\}$. Множество $\hat{x}$ часто называют стандартной областью определения $x^\wedge$. Происхождение этого названия ясно – "характеристическая функция $\hat{x}$ и есть $x^\wedge$ в отделимом универсуме".

Стоит отметить, что

$$[\![y \in x^\wedge]\!] = \bigvee_{z \in x} [\![y = z^\wedge]\!].$$

Кроме того, если φ – ограниченная формула теории ZFC, т.е. если связанные переменные входят в нее под знаком кванторов, распространенных на какие-либо множества, то для произвольных множеств $x_1, \dots, x_n$ будет

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow [\![\varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge)]\!] = 1.$$

1.12. Тот факт, что B – это булева алгебра, записывается ограниченной формулой. Значит, в силу 1.11 можно утверждать, что $B^\wedge$ – булева алгебра внутри $V^{(B)}$. Ниже используется описание ультрафильтров в $B^\wedge$ в $V^{(B)}$. Для иллюстрации техники вычислений они будут приведены с избыточной подробностью.

1.13. Пусть Ψ – элемент в $V^{(B)}$, являющийся ультрафильтром в $B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. Для $b \in B$ положим $\mathcal{X}_\Psi(b) := [\![b^\wedge \in \Psi]\!]$. Тогда $\mathcal{X}_\Psi$ – эндоморфизм булевой алгебры B. В свою очередь, если $\mathcal{X}$ – произвольный эндоморфизм B, то элемент $\Psi_\mathcal{X}$, порожденный правилом

$$dom(\Psi_\mathcal{X}) := \hat{B};\ \Psi_\mathcal{X}(b^\wedge) := \mathcal{X}(b) \quad (b \in B),$$

таков, что $\Psi_\mathcal{X}$ – ультрафильтр в $B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. При этом справедливы соотношения:

$$\mathcal{T}_{\Psi_{\mathcal{T}}}=\mathcal{T}; \qquad [\![\Psi_{\mathcal{T}_\Psi}=\Psi]\!]=1.$$

◁ Пусть сначала Ψ – ультрафильтр в $B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$ и $b_1, b_2\in B$. Несомненно, что

$$\mathcal{T}_\Psi(b_1)\wedge\mathcal{T}_\Psi(b_2)=[\![b_1^\wedge\in\Psi]\!]\wedge[\![b_2^\wedge\in\Psi]\!]\leq$$

$$\leq[\![b_1^\wedge\wedge b_2^\wedge\in\Psi]\!]=[\![(b_1\wedge b_2)^\wedge\in\Psi]\!]=\mathcal{T}_\Psi(b_1\wedge b_2).$$

Кроме того, если $c\geq b$, то $[\![c^\wedge\geq b^\wedge]\!]=1$ и, значит,

$$\mathcal{T}_\Psi(b)=[\![b^\wedge\in\Psi]\!]=[\![b^\wedge\in\Psi]\!]\wedge[\![c^\wedge\geq b^\wedge]\!]\leq[\![c^\wedge\in\Psi]\!]=\mathcal{T}_\Psi(c).$$

Раз $[\![\Psi$ – ультрафильтр в $B^\wedge]\!]=1$, то $[\![b^\wedge\in\Psi\leftrightarrow\neg b^\wedge\notin\Psi]\!]=1$, т.е.

$$\mathcal{T}_\Psi(b)=[\![\neg b^\wedge\notin\Psi]\!]=\neg[\![\neg b^\wedge\in\Psi]\!]=\neg[\![(\neg b)^\wedge\in\Psi]\!]=\neg\mathcal{T}_\Psi(\neg b).$$

Если теперь $\mathcal{T}: B\to B$ – произвольный эндоморфизм, то заметим для начала, что

$$[\![x\in\Psi_{\mathcal{T}}]\!]=\bigvee_{b\in B}\mathcal{T}(b)\wedge[\![b^\wedge=x]\!]\leq\bigvee_{b\in B}[\![b^\wedge=x]\!]=[\![x\in B^\wedge]\!],$$

т.е. $\Psi_{\mathcal{T}}\in B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. При этом

$$[\![b^\wedge\in\Psi_{\mathcal{T}}]\!]=\mathcal{T}(b)\qquad(b\in B).$$

Отсюда видим, что $0\notin\Psi_{\mathcal{T}}$ в $V^{(B)}$ и, кроме того,

$$[\![(\forall c\in\Psi_{\mathcal{T}})(\forall b\in B^\wedge)\, b\geq c\to b\in\Psi_{\mathcal{T}}]\!]=$$

$$=\bigwedge_{c\in B}\bigwedge_{b\in B}(\mathcal{T}(c)\wedge[\![b^\wedge\geq c^\wedge]\!])\Rightarrow[\![b^\wedge\in\Psi_{\mathcal{T}}]\!]=$$

$$=\bigwedge_{c\in B}\bigwedge_{b\in B}\mathcal{T}(c)\wedge[\![b^\wedge c^\wedge=c^\wedge]\!]\Rightarrow\mathcal{T}(b)=\bigwedge_{c\in B}\bigwedge_{\substack{b\in B\\ b\geq c}}\mathcal{T}(c)\Rightarrow\mathcal{T}(b)=1.$$

Аналогично проверяется, что

$$[\![(\forall b_1\in\Psi_{\mathcal{T}})(\forall b_2\in\Psi_{\mathcal{T}})\, b_1\wedge b_2\in\Psi_{\mathcal{T}}]\!]=1;$$

$$[\![(\forall b\in B^\wedge)\, b\in\Psi_{\mathcal{T}}\vee\neg b\in\Psi_{\mathcal{T}}]\!]=1.$$

Для завершения доказательства проведем следующие выкладки:

$$[\![\Psi_{\mathcal{T}_\Psi}=\Psi]\!]=\bigwedge_x[\![x\in\Psi_{\mathcal{T}_\Psi}\leftrightarrow x\in\Psi]\!]=\bigwedge_x\bigvee_{b\in B}\mathcal{T}_\Psi(b)\wedge[\![b^\wedge=x]\!]\leftrightarrow[\![x\in\Psi]\!]=$$

$$= \bigwedge_{z} \bigvee_{b\in B} [\![b^\wedge \in \Psi \wedge b^\wedge = z]\!] \Leftrightarrow [\![z \in \Psi]\!] =$$

$$= \bigwedge_{z} [\![(\exists b \in B^\wedge)\, b \in \Psi \wedge b = z \leftrightarrow z \in \Psi]\!] = 1,$$

ибо по условию $\Psi = \Psi \cap B^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. $\triangleright$

1.14. Как видно, следует предпринять усилия, направленные на автоматизацию подобного рода скучных вычислений. Такую автоматизацию и осуществляет программа спуск-подъем, излагаемая ниже.

§2. Простейшие спуски

2.0. Здесь собраны необходимые факты об изображении классов, множеств и соответствий в булевозначных моделях. Полезно с самого начала подчеркнуть политику в терминологии. Слово спуск используется для обозначения результата и способа изображения элемента из $V^{(B)}$ в V.

2.1. Пусть φ – некоторая формула ZFC и фиксирован набор y элементов булевозначного универсума. Пусть далее, $A_\varphi := A_\varphi(\cdot, y)$ – класс множеств, определимых посредством y. Спуск $A_\varphi{\downarrow}$ класса A_φ определяют соотношением

$$A_\varphi{\downarrow} := \{ t \in V^{(B)} : [\![\varphi(t,y)]\!] = 1 \}.$$

Если $t \in A_\varphi{\downarrow}$, то говорят, что t удовлетворяет $\varphi(\cdot, y)$ внутри $V^{(B)}$.

2.2. Спуск любого класса сильно цикличен, т.е. выдерживает всевозможные перемешивания семейств своих элементов.

2.3. Пусть φ, ψ – формулы ZFC, причем $A_\varphi{\downarrow} \neq \varnothing$. Тогда

$$[\![A_\varphi \subset A_\psi]\!] = \bigwedge_{x \in A_\varphi{\downarrow}} [\![\psi(x)]\!].$$

2.4. Для элемента x отделимого булевозначного универсума $V^{(B)}$ его спуск $x{\downarrow}$ задан правилом

$$x{\downarrow} := \{ t \in V^{(B)} : [\![t \in x]\!] = 1 \},$$

т.е. $x{\downarrow} = A_{\cdot \in x}{\downarrow}$. Спуск $x{\downarrow}$ является множеством. При этом $x{\downarrow} \subset scyc(dom(x))$, где $scyc$ – символ перехода к сильно циклической оболочке. Полезно подчеркнуть, что для непустого внутри $V^{(B)}$ множества x и формулы φ теории ZFC верно

$$(\exists z \in x\!\downarrow)\ [\![(\exists z \in x)\,\varphi(z)]\!] = [\![\varphi(x)]\!].$$

2.5. Для непустых внутри $V^{(B)}$ множеств x и y выполнено

$$[\![x \subset y]\!] = 1 \leftrightarrow x\!\downarrow \subset y\!\downarrow;\ (x \cap y)\!\downarrow = x\!\downarrow \cap y\!\downarrow;$$
$$(x \cup y)\!\downarrow = \mathrm{scyc}(x\!\downarrow \cup y\!\downarrow);\ \{x\}\!\downarrow = \{x\}^B\!\downarrow = \{x\};$$
$$\{x, y\}\!\downarrow = \{x, y\}^B\!\downarrow = \mathrm{scyc}(\{x, y\});$$
$$\langle x, y\rangle\!\downarrow = \langle x, y\rangle^B\!\downarrow = \mathrm{scyc}(\{x\}^B, \{x, y\}^B);$$
$$(x \times y)\!\downarrow = \{\langle a, b\rangle^B : a \in x\!\downarrow, b \in y\!\downarrow\}.$$

2.6. Напомним, что для соответствия F из X в Y, т.е. для подмножества F в $X \times Y$ и для любого подмножества A в X поляра $\pi_F(A)$ определена правилом

$$\pi_F(A) := \{y \in Y : F^{-1}(y) \supset A\} = \{y \in Y : (\forall a \in A)\, \langle a, y\rangle \in F\}.$$

2.7. Пусть F - соответствие из X в Y внутри $V^{(B)}$. Существует, и притом единственное, соответствие $F\!\downarrow$ из $X\!\downarrow$ в $Y\!\downarrow$ такое, что для любого непустого подмножества A в X внутри $V^{(B)}$ выполнено $F(A)\!\downarrow = F\!\downarrow(A\!\downarrow)$. При этом $\pi_F(A)\!\downarrow = \pi_{F\downarrow}(A\!\downarrow)$ и, кроме того,

$$[\![\langle x, y\rangle^B \in F]\!] = 1 \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F\!\downarrow.$$

$\triangleleft$ Если $[\![F \neq \varnothing]\!] < 1$, то полагаем $F\!\downarrow := \varnothing$. Если же $[\![F \neq \varnothing]\!] < 1$, то $[\![(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\, \langle x, y\rangle \in F]\!] = 1$, т.е. $(\exists x \in X\!\downarrow)(\exists y \in Y\!\downarrow)$ $\langle x, y\rangle^B \in F\!\downarrow$. Для каждого такого $x \in X\!\downarrow$ полагаем

$$F\!\downarrow(x) := F(x)\!\downarrow = \{y \in Y\!\downarrow : \langle x, y\rangle^B \in F\!\downarrow\}.$$

Ясно, что тем самым возникает соответствие $F\!\downarrow \subset X\!\downarrow \times Y\!\downarrow$. При этом для A такого, что $A \subset X$ внутри $V^{(B)}$ и A непусто в $V^{(B)}$, будет

$$y \in F(A)\!\downarrow \leftrightarrow [\![y \in F(A)]\!] = 1 \leftrightarrow [\![(\exists a \in A)\langle a, y\rangle \in F]\!] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\exists a \in A\downarrow)\langle a, y\rangle^{B} \in F\downarrow \leftrightarrow (\exists a \in A\downarrow) y \in F\downarrow(a) \leftrightarrow y \in F\downarrow(A\downarrow).$$

Аналогично,

$$z \in \mathcal{T}_{F\downarrow}(A\downarrow) \leftrightarrow (\forall a \in A\downarrow) z \in F\downarrow(a) \leftrightarrow \bigwedge_{a \in A\downarrow} [\![\langle a, z\rangle^{B} \in F]\!] = 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow [\![(\forall a \in A)\langle a, z\rangle^{B} \in F]\!] = 1 \leftrightarrow [\![z \in \mathcal{T}_F(A)]\!] = 1 \leftrightarrow z \in \mathcal{T}_F(A)\downarrow.$$

Утверждение об единственности $F\downarrow$ не вызывает сомнений. $\triangleright$

2.8. Соответствие $F\downarrow \subset X\downarrow \times Y\downarrow$ называют спуском F из X в Y внутри $V^{(B)}$. Отметим, что $(G \circ F)\downarrow = G\downarrow \circ F\downarrow$; $F^{-1}\downarrow = F\downarrow^{-1}$; $I_A\downarrow \underset{V^{(B)}}{=} I_{A\downarrow}$ для тождественного отношения I_A на A внутри $V^{(B)}$. Таким образом, в частности, спуск является ковариантным функтором на категории соответствий внутри $V^{(B)}$ в обычную категорию соответствий.

§3. Простейшие подъемы

3.0. Здесь собраны необходимые факты о переходе от подмножеств $V^{(B)}$ к элементам $V^{(B)}$, т.е. к процедуре подъема множеств и соответствий.

3.1. Пусть $X \in \mathcal{P}(V^{(B)})$, т.е. X – это множество, составленное из B-значных множеств. Положим $\varnothing\uparrow := \varnothing$ и

$$dom(X\uparrow) := X; \quad im(X\uparrow) := \{1\}$$

при $X \neq \varnothing$. Элемент $X\uparrow$ отделимого универсума $V^{(B)}$, т.е. выделенный представитель предъявленного класса, называют подъемом X. Отметим, что

$$[\![z \in X\uparrow]\!] = \bigvee_{t \in X} [\![t = z]\!].$$

И, кроме того, $\hat{x}\uparrow = x^{\wedge}$, т.е. стандартное имя $x^{\wedge}$ множества x есть подъем его стандартной области определения $\hat{x}$.

3.2. Для непустых в $V^{(B)}$ элементов x и y будет

$$\{x\}^{B} = \{x\}\uparrow; \ \{x, y\}^{B} = \{x, y\}\uparrow; \langle x, y\rangle^{B} = \{\{x\}^{B}, \{x, y\}^{B}\}\uparrow;$$

$$x \times y = \{\langle a, b\rangle^{B} : \langle a, b\rangle \in x\downarrow \times y\downarrow\}\uparrow;$$

$$x\uparrow \cap y\uparrow = (x \cap y)\uparrow.$$

3.3. Пусть $X, Y \in \mathcal{P}(V^{(B)})$ и F - соответствие из X в Y. Существует, и притом единственное, соответствие $F\uparrow$ из $X\uparrow$ в $Y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$ такое, что для каждого подмножества A множества X выполнено $F\uparrow(A\uparrow) = F(A)\uparrow$ в том и только в том случае, если F экстенсионально. Последнее означает, что

$$y_1 \in F(x_1) \rightarrow [\![x_1 = x_1]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

При этом $F\uparrow = F'\uparrow$, где $F' := \{\langle x, y\rangle^B : \langle x, y\rangle \in F\}$.

◁ Установим прежде всего необходимость условия экстенсиональности. Отметим для этого, что при $y \in F(x_1)$ будет $[\![y \in F(x_1)\uparrow]\!] = 1$. Значит, $[\![y_1 \in F\uparrow(x_1)]\!] = 1$. Помимо этого, по принципу переноса

$$[\![x_1 = x_2 \wedge y_1 \in F\uparrow(x_1) \rightarrow y_1 \in F\uparrow(x_2)]\!] = 1.$$

Иными словами, учитывая правила оценивания и 3.I,

$$[\![x_1 = x_2]\!] = [\![x_1 = x_2]\!] \wedge [\![y_1 \in F\uparrow(x_1)]\!] \leq [\![y_1 \in F\uparrow(x_2)]\!] = \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Единственность $F\uparrow$ (но не его существование!) обеспечивает принцип переноса в связи с тем, что соответствие определяется своими значениями. Итак, осталось предъявить $F\uparrow$. Для этого возьмем $F'\uparrow$. С учетом 2.5, поскольку $F \subset X \times Y \subset X\uparrow\downarrow \times Y\uparrow\downarrow$, видим, что $F' \subset (X\uparrow \times Y\uparrow)\downarrow$. Стало быть, $F'\uparrow \subset X\uparrow \times Y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$.

Для доказательства требуемых равенств разберем сначала случай одноэлементного множества. Иначе говоря, возьмем $x_1 \in \operatorname{dom}(F)$. Тогда, привлекая условие экстенсиональности, последовательно получаем

$$[\![y_1 \in F\uparrow(x_1)]\!] = [\![\langle x_1, y_1\rangle^B \in F\uparrow]\!] = \bigvee_{z \in F'} [\![z = \langle x_1, y_1\rangle^B]\!] =$$

$$= \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} [\![\langle x_1, y_1\rangle^B = \langle x_2, y_2\rangle^B]\!] = \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} [\![x_1 = x_2]\!] = [\![y_1 = y_2]\!] \leq$$

$$\leq \bigvee_{\langle x_2, y_2\rangle \in F} [\![y_2 \in F(x_1)\uparrow]\!] \wedge [\![y_1 = y_2]\!] \leq [\![y_1 \in F(x_1)\uparrow]\!] =$$

$$= \bigvee_{y_2 \in F(x_1)} [\![y_1 = y_2]\!] = \bigvee_{y_2 \in F(x_1)} [\![y_1 = y_2]\!] \wedge [\![x_1 = x_1]\!] =$$

$$\leq \bigvee_{x_2 \in dom(F)} \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!] \wedge [\![x_2 = x_1]\!] =$$

$$= \bigvee_{\langle x_2, y_2 \rangle \in F} [\![y_1 = y_2]\!] \wedge [\![x_1 = x_2]\!] = [\![y_1 \in F{\uparrow}(x_1)]\!].$$

Окончательно, выводим равенство оценок

$$[\![y_1 \in F{\uparrow}(x_1)]\!] = [\![y_1 \in F(x_2){\uparrow}]\!].$$

Пусть теперь A – произвольное подмножество X. Имеем в силу уже установленного и принципа переноса:

$$[\![y \in F(A){\uparrow}]\!] = \bigvee_{z \in F(A)} [\![y = z]\!] = \bigvee_{a \in A} \bigvee_{z \in F(a)} [\![y = z]\!] =$$

$$= \bigvee_{a \in A} [\![y \in F(a){\uparrow}]\!] = \bigvee_{a \in A} [\![y \in F{\uparrow}(a)]\!] =$$

$$= [\![(\exists a \in A{\uparrow})\, y \in F{\uparrow}(a)]\!] = [\![y \in F{\uparrow}(A{\uparrow})]\!]. \triangleright$$

3.4. Элемент $F{\uparrow}$ в $V^{(B)}$, отвечающий экстенсиональному соответствию F, называют подъемом F.

Суперпозиция экстенсиональных соответствий G и F экстенсиональна. При этом $G \circ F{\uparrow} = G{\uparrow} \circ F{\uparrow}$. Отметим здесь же, что в случае одновременной экстенсиональности F и F^{-1} будет $F{\uparrow}^{-1} = F^{-1}{\uparrow}$. Однако экстенсиональность F не обеспечивает, вообще говоря, экстенсиональности F^{-1}. Подчеркнем здесь же, что если экстенсиональное соответствие F – это функция из X в Y, то подъем $F{\uparrow}$ – также функция из $X{\uparrow}$ в $Y{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$. При этом экстенсиональность F выглядит так:

$$x_1, x_2 \in X \rightarrow [\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![F(x_1) = F(x_2)]\!].$$

3.5. Соответствие $F \subset X \times Y$ экстенсионально в том и только в том случае, если

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leqslant [\![F(x_1){\uparrow} = F(x_2){\uparrow}]\!]$$

для $x_1, x_2 \in dom(F)$, т.е. при условии экстенсиональности отображения $x \rightarrow F(x){\uparrow}$, действующего из X в $\mathcal{P}(Y{\uparrow}){\uparrow}$.

$\triangleleft$ Если F экстенсионально, то

$$1 = [\![x_1 = x_2 \rightarrow F{\uparrow}(x_1) = F{\uparrow}(x_2)]\!] \rightarrow [\![x_1 = x_2]\!] \leq [\![F(x_1){\uparrow} = F(x_2){\uparrow}]\!].$$

В свою очередь, при выполнении последнего условия будет

$$[\![x_1=x_2]\!] \leq [\![\forall y \ (y\in F(x_1){\uparrow} \leftrightarrow y\in F(x_2){\uparrow})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{y_1\in F(x_1)} [\![y_1\in F(x_2){\uparrow}]\!] \wedge \bigwedge_{y_2\in F(x_2)} [\![y_2\in F(x_1){\uparrow}]\!] \leq$$

$$\leq [\![y_1\in F(x_2){\uparrow}]\!] = \bigvee_{y_2\in F(x_2)} [\![y_1=y_2]\!],$$

т.е. F экстенсионально. $\rhd$

§4. Спуск-подъем и подъем-спуск для соответствий

4.0. Здесь приводятся сведения о последовательном применении процедур спуска и подъема.

4.1. Для непустого внутри $V^{(B)}$ множества x выполнено $x{\downarrow}{\uparrow}=x$. Для подмножества X в $V^{(B)}$ выполнено $X{\uparrow}{\downarrow}=$ $=\mathrm{scyc}(X)$.

4.2. Для непустого внутри $V^{(B)}$ соответствия F выполнено $F{\downarrow}{\uparrow}=F$.

$\lhd$ Пусть $[\![F\subset X\times Y \wedge F\neq\varnothing]\!]=1$. Несомненно, что $F{\downarrow}\subset X{\downarrow}\times Y{\downarrow}$ и $F{\downarrow}{\uparrow}\subset X{\downarrow}{\uparrow}\times Y{\downarrow}{\uparrow}$ внутри $V^{(B)}$, т.е. $F{\downarrow}{\uparrow}\subset X\times Y$ в силу 4.1. Помимо этого для $x\in X{\downarrow}$ выполнено

$$F{\downarrow}{\uparrow}(x)=F{\downarrow}{\uparrow}(x{\downarrow}{\uparrow})=F{\downarrow}(x{\downarrow}){\uparrow}=F(x){\downarrow}{\uparrow}=F(x).$$

Осталось сослаться на принцип переноса. $\rhd$

4.3. Для каждого экстенсионального соответствия $F\subset X\times Y$, где $X,Y\in\mathcal{P}(V^{(B)})$, выполнено

$$F{\uparrow}{\downarrow}(x) = F(x){\uparrow}{\downarrow} \qquad (x\in X).$$

При этом для произвольного непустого подмножества A в X будет

$$\mathcal{T}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A)=\mathcal{T}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow};\ \mathcal{T}_{F{\uparrow}{\downarrow}}(A){\uparrow}=\mathcal{T}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}).$$

$\lhd$ Прежде всего, для $x\in X$ очевидно $x\in X{\uparrow}{\downarrow}$. Отсюда заключаем, что $F{\uparrow}{\downarrow}(x)=F{\uparrow}(x){\downarrow}=F(x){\uparrow}{\downarrow}$. Теперь для произвольного непустого A в X получаем

$$z\in\mathcal{T}_{F{\uparrow}}(A{\uparrow}){\downarrow} \leftrightarrow [\![(\forall a\in A{\uparrow})\, z\in\mathcal{T}_{F{\uparrow}}(a)]\!]=1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigwedge_{a\in A} [\![z \in F\uparrow(a)]\!] = 1 \leftrightarrow (\forall a\in A)\, z\in F(a)\uparrow\downarrow \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall a\in A)\, z\in F\uparrow\downarrow(a) \leftrightarrow z\in \mathcal{T}_{F\uparrow\downarrow}(A).$$

Наконец, ввиду сильной цикличности множества $\mathcal{T}_{F\uparrow\downarrow}(A)$ из уже доказанного заключаем:

$$\mathcal{T}_{F\uparrow\downarrow}(A)\uparrow\downarrow = \mathcal{T}_{F\uparrow\downarrow}(A) = \mathcal{T}_{F\uparrow}(A\uparrow)\downarrow.$$

Остается сослаться на 2.3. $\triangleright$

4.4. Пусть F - соответствие из $X\downarrow$ в $Y\downarrow$, где $X, Y\in \in V^{(B)}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) F экстенсионально и $F\uparrow\downarrow = F$;

(2) имеет место равенство $F' = F'\uparrow\downarrow$;

(3) F' - сильно циклическое множество;

(4) для каждых $x\in X\downarrow$ и $b\in B$ выполнено

$$F(x) = F(x)\uparrow\downarrow;\quad F\circ\sigma_{X\downarrow}(b)\subset \sigma_{Y\downarrow}(b)\circ F,$$

где $\sigma_Z(b) := \{\langle z_1, z_2\rangle \in Z^2 : [\![z_1 = z_2]\!] \geqslant b\}$.

$\triangleleft$ (I) $\Longrightarrow$ (2). Включение $F'\subset F'\uparrow\downarrow$ очевидно. В свою очередь,

$$\langle x, y\rangle^B \in F'\uparrow\downarrow \to [\![\langle x,y\rangle^B \in F]\!] = 1 \to [\![\langle x,y\rangle^B \in F\uparrow]\!] = 1 \to$$

$$\to \langle x,y\rangle \in F\uparrow\downarrow \to \langle x,y\rangle \in F \to \langle x,y\rangle^B \in F'.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ - разбиение единицы и $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ - семейство элементов $F(x)$. Ясно, что $\langle x, y_\xi\rangle^B \in F'$ и, стало быть, привлекая I.I0, выводим

$$\langle x, \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi\rangle^B = \langle \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x, \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi\rangle^B = \sum_{\xi\in\Xi} b_\xi \langle x, y_\xi\rangle^B \in F'.$$

Отсюда $\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi y_\xi \in F(x)$. На основании 4.I заключаем: $F(x) = F(x)\uparrow\downarrow$.

Заметим теперь, что

$$\langle x,y\rangle \in F \leftrightarrow \langle x,y\rangle^B \in F' \leftrightarrow \langle x,y\rangle^B \in F'\uparrow\downarrow \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in (F'\uparrow)\downarrow,$$

т.е. F - это спуск соответствия $F'\uparrow$ из X в Y внутри

$V^{(B)}$ и, стало быть, F экстенсионально. Отсюда для $y_1 \in \in F(x_1)$ верно

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leq \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_2 = y_1]\!] = [\![\bar{y}_2 = y_1]\!]$$

для некоторого $\bar{y} \in F(x_2)$ в силу сильной цикличности $F(x_2)$. Итак, для $x_2 \in X\!\downarrow$ и $y_1 \in F \circ \sigma_{X\downarrow}(b)(x_2)$ для некоторого x_1 такого, что $[\![x_1 = x_2]\!] \geq b$, найдется $\bar{y}_2$, для которого $y_1 \in \in \sigma_{Y\downarrow}(\bar{y}_2)$ и $y_2 \in F(x_2)$. Последнее означает, что $\langle x_2, y_1 \rangle \in \in \sigma_{Y\downarrow}(b) \circ F$.

(4) $\Longrightarrow$ (I). Для $y_1 \in F(x_1)$ и $x_2 \in X\!\downarrow$ имеем

$$\langle x_2, y_1 \rangle \in F \circ \sigma_{X\downarrow}([\![x_1 = x_2]\!])(x_2) \subset \sigma_{Y\downarrow}(b) \circ F(x_2)$$

по условию. Иначе говоря, найдется $y_2 \in F(x_2)$, для которого

$$[\![x_1 = x_2]\!] \leqslant [\![y_1 = y_2]\!] \leqslant \bigvee_{y_2 \in F(x_2)} [\![y_1 = y_2]\!].$$

Следовательно, F экстенсионально. При этом для каждого $x \in X\!\downarrow$ с учетом 4.3 и условия будет $F(x) = F(x)\!\uparrow\downarrow = F\!\uparrow\downarrow(x)$, т.е. $F = F\!\uparrow\downarrow$. ▷

4.5. Отметим, что конструкции, изложенные в §§2–4, естественным и очевидным образом переносятся на случай многоместных соответствий. В дальнейшем мы будем использовать соответствующие обобщения без особых разъяснений.

§5. Спуски и подъемы алгебраических систем

5.0. В этом параграфе детализируются процедуры спуска и подъема общих алгебраических систем, изученные впервые Соловьем и Тененбаумом при исследовании изображений булевых алгебр [7].

5.I. Пусть $\Sigma := \langle F, \mu \rangle$ – некоторая сигнатура и $\mathfrak{X} := = \langle X, \nu^{\mathfrak{X}} \rangle$ – (универсальная) алгебра сигнатуры Σ с носителем X и интерпретацией $\nu^{\mathfrak{X}}$. Иными словами, F – множество символов операций, а $\mu : F \to \omega$ – отображение, указывающее целое число – арность $\mu(f)$ – операции $\nu^{\mathfrak{X}}(f)$ в множестве X для каждого $f \in F$. Алгебру $\mathfrak{X}$ называют экстенсиональной, если X – подмножество отделимого булевозначного универсума $V^{(B)}$ и, кроме того, для каждого $f \in F$ отображение $\nu^{\mathfrak{X}}(f) : X^{\mu(f)} \to X$ экстенсионально.

5.2. Алгебра $\mathscr{X}$ с носителем X является экстенсиональной в том и только в том случае, если отображение $\rho_{\mathscr{X}}: b \to \sigma_X(b')$ действует из B в множество $Cong(\mathscr{X})$ конгруэнций $\mathscr{X}$. При этом $\rho_{\mathscr{X}}$ сохраняет произвольные непустые пересечения:

$$\emptyset \neq B_0 \subset B \to \rho_{\mathscr{X}}(\inf B_0) = \bigcap\{\rho_{\mathscr{X}}(b_0) : b_0 \in B\}$$

и множество $\rho_{\mathscr{X}}(0)$ совпадает с тождественным отношением I_X.

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{X}$ – экстенсиональная алгебра и $f \in F$. Считаем для удобства, что $\mu(f) = 1$. Тогда

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in \rho_{\mathscr{X}}(b) \leftrightarrow b' x_1 = b' x_2 \leftrightarrow [\![x_1 = x_2]\!] \geq b' \to$$

$$\to [\![\nu^{\mathscr{X}}(f)(x_1) = \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_2)]\!] \geq [\![x_1 = x_2]\!] \geq b' \to \langle \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_1), \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_2) \rangle \in \rho_{\mathscr{X}}(b).$$

В свою очередь, если $\rho_{\mathscr{X}}([\![x_1 = x_2]\!]')$ – конгруэнция, то

$$[\![x_1 = x_2]\!] = \neg [\![x_1 = x_2]\!]' \leq [\![\nu^{\mathscr{X}}(f)(x_1) = \nu^{\mathscr{X}}(f)(x_2)]\!],$$

т.е. $\nu^{\mathscr{X}}(f)$ – экстенсиональная функция.

Наконец, для $\emptyset \neq B_0 \subset B$ выполнено

$$\rho_{\mathscr{X}}(\inf B_0) = \{\langle x_1, x_2 \rangle : [\![x_1 = x_2]\!] \geq \neg \inf B_0\} =$$

$$= \{\langle x_1, x_2 \rangle : [\![x_1 = x_2]\!] \geq \sup\{b' : b \in B_0\}\} = \bigcap_{b \in B_0} \{\langle x_1, x_2 \rangle : [\![x_1 = x_2]\!] \geq b'\} = \bigcap\{\rho_{\mathscr{X}}(b) : b \in B_0\}. \triangleright$$

5.3. Пусть $\Sigma := \langle R, F, \mu \rangle$ – некоторая сигнатура и $\mathscr{X}$ представляет собой алгебраическую систему сигнатуры $\Sigma^\wedge$ внутри $V^{(B)}$. Иначе говоря, $\mathscr{X}$ – это объект булевозначного универсума, являющийся B-парой: $\mathscr{X} := \langle X, \nu^{\mathscr{X}} \rangle^B$, где элементы X, $\nu^{\mathscr{X}} \in V^{(B)}$ играют, соответственно, роли носителя $\mathscr{X}$ и интерпретации $\Sigma^\wedge$ в X внутри $V^{(B)}$. Для $r \in R$ и $f \in F$ ясно, что

$[\![\nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge)$ – это $\mu^\wedge(r^\wedge)$-местное отношение в $X]\!] = 1$;

$[\![\nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge)$ – это $\mu^\wedge(f^\wedge)$-местная операция на $X]\!] = 1$.

Определяем теперь отображение $\nu{\downarrow}$, полагая

$$\nu{\downarrow}(r) := \nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge){\downarrow}; \qquad \nu{\downarrow}(f) := \nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge){\downarrow},$$

где $\nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge){\downarrow}$ и $\nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge){\downarrow}$ – спуски отношения $\nu^{\mathscr{X}}(r^\wedge)$ и функции $\nu^{\mathscr{X}}(f^\wedge)$ внутри $V^{(B)}$ соответсвенно. Возникающая алгебраическая система сигнатуры Σ с носителем $X{\downarrow}$ и интерпретацией $\nu{\downarrow}$ называется спуском исходной системы и обозначается $\mathscr{X}{\downarrow}$. Таким образом, $\mathscr{X}{\downarrow} = \langle X{\downarrow}, \nu{\downarrow} \rangle$.

Стоит подчеркнуть, что спуск алгебры сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ – безусловно экстенсиональная алгебра сигнатуры Σ.

5.4. Пусть $\mathcal{Y}$ – некоторая алгебра сигнатуры Σ с носителем Y. Пусть, далее, задано отображение $f: B \to Cong(\mathcal{Y})$, сохраняющее произвольные непустые пересечения и такое, что $f(0)=I_Y$. Тогда существует алгебра $\mathcal{X}$ сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$ и эндоморфизм χ из $\mathcal{Y}^{\wedge}$ на $\mathcal{X}$ внутри $V^{(B)}$ такие, что $\chi\downarrow$ осуществляет мономорфизм $\mathcal{Y}$ в экстенсиональную алгебру $\mathcal{X}\downarrow$ сигнатуры Σ и при этом

$$\langle y_1, y_2\rangle \in f(b) \leftrightarrow \langle \chi\downarrow(y_1), \chi\downarrow(y_2)\rangle \in f_{\mathcal{X}\downarrow}(b)$$

при каждом $b \in B$ и произвольных $y_1, y_2 \in Y$.

◁ Рассмотрим стандартное имя $\mathcal{Y}^{\wedge}$ алгебры $\mathcal{Y} := \langle Y, \nu^{\mathcal{Y}}\rangle$. Ясно, что внутри $V^{(B)}$ элемент $\mathcal{Y}^{\wedge} = \langle Y^{\wedge}, \nu^{\mathcal{Y}_{\wedge}}\rangle^{B}$ – универсальная алгебра сигнатуры $\Sigma^{\wedge} := \langle F^{\wedge}, \mu^{\wedge}\rangle^{B}$. Пусть, далее, Ψ – ультрафильтр в $B^{\wedge}$, порожденный тождественным эндоморфизмом B в соответствии с I.13. Определим, наконец, элемент τ в универсуме $V^{(B)}$ соотношением

$$\langle u, v\rangle^{B} \in \tau \leftrightarrow u \in Y^{\wedge} \wedge v \in Y^{\wedge} \wedge (\exists b \in \Psi) \langle u, v\rangle^{B} \in f^{\wedge}(b').$$

Полезно с самого начала отметить, что

$$[\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge}\rangle \in \tau]\!] = \bigvee_{b \in B} b [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge}\rangle \in f^{\wedge}(b')]\!] = \bigvee\{b \in B : \langle u, v\rangle \in f(b')\}.$$

При этом из представления

$$f([\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge}\rangle \in \tau]\!]') = f(\wedge\{b' : \langle u, v\rangle \in f(b')\}) = \wedge\{f(b') : \langle u, v\rangle \in f(b)\}$$

вытекает: $\langle u, v\rangle \in f([\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge}\rangle \in \tau]\!]')$.

Бесспорно, что τ – это рефлексивное и симметричное отношение в $Y^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$. Проверим транзитивность τ. Имеем

$$[\![\langle x, y\rangle \in \tau]\!] \wedge [\![\langle y, z\rangle \in \tau]\!] =$$

$$= \Big(\bigvee_{\langle u, v\rangle \in Y^2} [\![x = u^{\wedge}]\!] \wedge [\![y = v^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge}\rangle \in \tau]\!]\Big) \wedge$$

$$\wedge \Big(\bigvee_{\langle s, w\rangle \in Y^2} [\![y = s^{\wedge}]\!] \wedge [\![z = w^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle s^{\wedge}, w^{\wedge}\rangle \in \tau]\!]\Big) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\langle u, v\rangle \in Y^2 \\ \langle s, w\rangle \in Y^2}} [\![x = u^{\wedge}]\!] \wedge [\![y = v^{\wedge}]\!] \wedge [\![y^{\wedge} = s^{\wedge}]\!] \wedge [\![z = w^{\wedge}]\!] \wedge [\![\langle u^{\wedge}, v^{\wedge}\rangle \in \tau]\!] \wedge$$

$$\wedge [\![\langle s^\wedge, w^\wedge\rangle \in \tau]\!] \leq \bigvee_{\substack{\langle u,v\rangle \in Y^2\\ \langle s,w\rangle \in Y^2}} [\![x = u^\wedge]\!] \wedge [\![z = w^\wedge]\!] \wedge [\![\langle u^\wedge, w^\wedge\rangle \in \tau]\!],$$

поскольку справедливы оценки

$$[\![\langle u^\wedge, v^\wedge\rangle \in \tau]\!] \wedge [\![v^\wedge = s^\wedge]\!] \wedge [\![\langle s^\wedge, w^\wedge\rangle \in \tau]\!] \leq$$

$$\leq \bigvee\{b_1 : \langle u,v\rangle \in f(\neg b_1)\} \wedge \bigvee\{b_2 : \langle v,w\rangle \in f(\neg b_2)\} \leq$$

$$\leq \bigvee\{b_1 \wedge b_2 : \langle u,v\rangle \in f(\neg(b_1 \wedge b_2)) \wedge \langle v,w\rangle \in f(\neg(b_1 \wedge b_2))\} \leq$$

$$\leq \bigvee\{b : \langle u,w\rangle \in f(b')\} = [\![\langle u^\wedge, w^\wedge\rangle \in \tau]\!].$$

Таким образом, действительно, $[\![\langle x,y\rangle \in \tau \wedge \langle y,z\rangle \in \tau \to \langle x,z\rangle \in \tau]\!] = 1$.

Установим теперь, что τ - это конгруэнция. Для этого возьмем $f \in F$ и проведем необходимые вычисления (в упрощающем предположении одноместности f):

$$[\![(\forall \langle y_1,y_2\rangle \in Y^{\wedge 2}) \langle y_1,y_2\rangle \in \tau \to \langle (\nu^{\Psi})^\wedge (f^\wedge)(y_1), (\nu^{\Psi})^\wedge (f^\wedge)(y_2)\rangle \in \tau]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\langle u,v\rangle \in Y^2} [\![\langle u^\wedge, v^\wedge\rangle \in \tau \to \langle (\nu^{\Psi})^\wedge (f^\wedge)(u^\wedge), (\nu^{\Psi})^\wedge (f^\wedge)(v^\wedge)\rangle \in \tau]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\langle u,v\rangle \in Y^2} [\![\langle u^\wedge, v^\wedge\rangle \in \tau \to \langle \nu^{\Psi}(f)(u)^\wedge, \nu^{\Psi}(f)(v)^\wedge\rangle \in \tau]\!] = 1.$$

Последнее равенство основано на том, что $\langle u,v\rangle \in f([\![\langle u^\wedge, v^\wedge\rangle \in \tau]\!]')$, и с учетом конгруэнтности $f([\![\langle u^\wedge, v^\wedge\rangle \in \tau]\!]')$ будет

$$[\![\langle u^\wedge, v^\wedge\rangle \in \tau]\!] \leq [\![\langle \nu^{\Psi}(f)(u)^\wedge, \nu^{\Psi}(f)(v)^\wedge\rangle \in \tau]\!].$$

Рассмотрим теперь фактор-алгебру $\mathcal{X} := \Psi^\wedge/\tau$ внутри $V^{(B)}$ и каноническое отображение $\chi : Y^\wedge \to \mathcal{X}$ внутри $V^{(B)}$.

Проверим, что алгебра $\mathcal{X}$ и отображение χ искомые. Для этого при $y_1, y_2 \in Y$ и $b \in B$ проведем следующую выкладку:

$$[\![\chi\downarrow(y_1) = \chi\downarrow(y_2)]\!] \geq b' \leftrightarrow [\![\chi(y_1^\wedge) = \chi(y_2^\wedge)]\!] \geq b' \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow b' \leq [\![\langle y_1^\wedge, y_2^\wedge\rangle \in \tau]\!] \leftrightarrow b' \leq \bigvee\{c : \langle y_1,y_2\rangle \in f(c')\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow b \geq \bigwedge\{c : \langle y_1,y_2\rangle \in f(c)\} \leftrightarrow \langle y_1,y_2\rangle \in f(b). \ \rhd$$

5.5. В [14] для описания спусков и подъемов использовано понятие B-метрики. Отображение $d : X^2 \to B$ называют B-метрикой на X, если $d(x_1,x_2)=0 \leftrightarrow x_1=x_2$; $d(x_1,x_2)=d(x_2,x_1)$ и $d(x_1,x_2)\leqslant d(x_1,x_3)\vee d(x_3,x_2)$ для любых $x_1,x_2,x_3\in X$. Из предложения 5.4 вытекает следующее простое описание множеств с B-метрикой.

5.6. Для произвольного множества X с B-метрикой d существует множество $\mathscr{X}$ из $\mathscr{P}(V^{(B)})$ и взаимно-однозначное отображение $\chi : X \to \mathscr{X}$ такое, что

$$d(x_1,x_2)=[\![\chi(x_1)\neq\chi(x_2)]\!]$$

для всех $x_1,x_2\in X$.

$\lhd$ Положим $\rho(b):=\{\langle x_1,x_2\rangle\in X^2 : d(x_1,x_2)\leqslant b\}$. Ясно, что $\rho(b)$ – отношение эквивалентности в X, причем $\rho(0)=I_X$ и, кроме того, ρ сохраняет произвольные непустые пересечения. Отсюда по 5.4 выводим, что для некоторых $\mathscr{X}\in\mathscr{P}(V^{(B)})$ и взаимно-однозначного отображения χ будет

$$\langle x_1,x_2\rangle\in\rho(b)\leftrightarrow[\![\chi(x_1)=\chi(x_2)]\!]\geqslant b'$$

при $b\in B$. Иными словами, $d(x_1,x_2)\leqslant b \leftrightarrow [\![\chi(x_1)=\chi(x_2)]\!]'\leqslant b$, что и требовалось. $\rhd$

5.7. Алгебраическую систему $\mathscr{Y}:=\langle Y,\nu^{\mathscr{Y}}\rangle$ сигнатуры $\Sigma:=\langle R,F,\mu\rangle$ называют расширенной с помощью полной булевой алгебры B и отображения ρ или, короче, B-расширенной (посредством ρ), если ρ действует из B в множество конгруэнций $\mathrm{Cong}(\mathscr{Y})$ (универсальной алгебры, ассоциированной с $\mathscr{Y}$) и при этом выполнены следующие условия:

(I) отображение ρ сохраняет произвольные непустые пересечения и, кроме того, $\rho(0)=I_Y$;

(2) $\mathscr{Y}$ является ρ-сильно циклической алгеброй, т.е. для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры B и произвольного семейства $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ носителя Y существует, и притом единственный, элемент $y\in Y$, для которого $\langle y, y_\xi\rangle\in\rho(b'_\xi)$ для $\xi\in\Xi$. Этот элемент называют ρ-перемешиванием $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$;

(3) для каждого $r\in R$ отношение $\nu^{\mathscr{Y}}(r)$ является ρ-сильно циклическим, т.е. устойчивым относительно всевозможных покоординатных ρ-перемешиваний, т.е. если $\langle y_\xi,\dots,z_\xi\rangle\in\nu^{\mathscr{Y}}(r)$ и $y,\dots,z$ – это ρ-перемешивания $(y_\xi)_{\xi\in\Xi},\dots,(z_\xi)_{\xi\in\Xi}$ с вероятностями $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, то $\langle y,\dots,z\rangle\in\nu^{\mathscr{Y}}(r)$.

5.8. ТЕОРЕМА. П у с т ь $\mathscr{Y}$ – н е к о т о р а я

B - расширенная посредством ρ алгебраическая система сигнатуры Σ. Существуют алгебраическая система $\mathscr{X}$ сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$ и изоморфизм γ системы $\mathscr{Y}$ на спуск $\mathscr{X}\downarrow$ такие, что выполнено условие согласования

$$\langle y_1, y_2\rangle \in \rho(b) \leftrightarrow \langle \gamma(y_1), \gamma(y_2)\rangle \in \rho_{\mathscr{X}\downarrow}(b)$$

для произвольного $b \in B$ и любых y_1, y_2 из носителя $\mathscr{Y}$. Система $\mathscr{X}$ единственна с точностью до изоморфизма внутри $V^{(B)}$, т.е. алгебраическая система $\mathscr{X}'$ сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$, для которой имеется изоморфизм $\mathscr{Y}$ на спуск $\mathscr{X}'\downarrow$, удовлетворяющий условию согласования, обладает изоморфизмом на $\mathscr{X}$ внутри $V^{(B)}$.

◁ Рассмотрим $\mathscr{Y}$ как алгебру сигнатуры $\bar{\Sigma} := \langle F, \mu\rangle$, где $\Sigma := (R, F, \mu)$. Привлекая 5.4, найдем алгебру $\bar{\mathscr{X}}$ сигнатуры $\bar{\Sigma}^{\wedge}$ внутри $V^{(B)}$ и эпиморфизм χ из $\mathscr{Y}^{\wedge}$ на $\bar{\mathscr{X}}$ внутри $V^{(B)}$, для которых

$$\langle y_1, y_2 \rangle \in \rho(b) \leftrightarrow \langle \gamma(y_1), \gamma(y_2)\rangle \in \rho_{\mathscr{X}\downarrow}(b),$$

где $\gamma := \chi\downarrow$, $b \in B$ и $y_1, y_2 \in Y$. По условию $x \in X\downarrow$, где X - носитель $\mathscr{X}$, верно

$$1 = [\![(\exists y \in Y^{\wedge})\ \chi(z) = x]\!] = \bigvee_{y \in Y} [\![\gamma(y) = x]\!].$$

Таким образом, существуют разбиение единицы $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейство $(y_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов Y, для которых $[\![\gamma(y_\xi) = x]\!] \geqslant b_\xi$ при $\xi \in \Xi$. По условию имеется ρ-перемешивание y, т.е.

$$\langle y, y_\xi \rangle \in \rho(b_\xi') \leftrightarrow [\![\gamma(y) = \gamma(y_\xi)]\!] \geqslant b_\xi \quad (\xi \in \Xi).$$

Отсюда выводим, что $[\![x = \gamma(y)]\!] \geqslant \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = 1$, т.е. $\chi(y) = x$. Окончательно, χ - это изоморфизм $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{X}\downarrow$ как универсальных алгебр.

Для $\tau \in R$ рассмотрим соответствие $y^{\Psi}(\tau)$ в $Y^{\mu(\tau)}$. Перенесем $y^{\Psi}(\tau)$ в $(X\downarrow)^{\mu(\tau)}$ посредством отображения $\gamma^{\sim}$. Привлекая 4.4, 4.5 и условия, видим, что возникающее соответствие $G(\tau)$ экстенсионально и при этом $G(\tau) = G(\tau)\uparrow\downarrow$. Положим $y(\tau^{\wedge}) := G(\tau)\uparrow$. Тем самым на $\widehat{R}$ определено экстенсиональное отображение. Поднимем его в $V^{(B)}$ и пусть $y^{\mathscr{X}}/_R := y\uparrow$ внутри $V^{(B)}$. Ясно, что возникающая система $\mathscr{X} := \langle X, y^{\mathscr{X}}\rangle^B$ сигнатуры $\Sigma^{\wedge}$ искомая.

Установим теперь утверждение об единственности. Пусть $\mathscr{X}'$ – еще одна система с нужным свойством и γ' – связанный с ней изоморфизм Y и $X'\downarrow$. Положим $\chi' := \gamma\gamma'^{-1}$. Ясно, что χ' – экстенсиональное отображение $X'\downarrow$ в $X\downarrow$, поскольку для $z_1, z_2 \in X'\downarrow$ будет

$$\langle z_1, z_2\rangle \in f_{\mathscr{X}'\downarrow}([\![z_1 = z_2]\!]) \to \langle \gamma'^{-1}(z_1), \gamma'^{-1}(z_2)\rangle \in f([\![z_1 = z_2]\!]) \to$$

$$\to \langle \gamma\gamma'^{-1}(z_1), \gamma\gamma'^{-1}(z_2)\rangle \in f_{\mathscr{X}\downarrow}([\![z_1 = z_2]\!]).$$

Рассмотрим подъем $\chi'\uparrow$. Видно, что $\chi'\uparrow$ – требуемый изоморфизм $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ внутри $V^{(B)}$. Убедимся, например, в том, что $\chi'\uparrow$ сохраняет (двуместные) отношения внутри $V^{(B)}$. В самом деле,

$$[\![(\forall \tau \in R^{\wedge})\, \chi'\uparrow \circ y^{\mathscr{X}'}(\tau) \circ \chi'\uparrow^{-1} = y^{\mathscr{X}}(\tau)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![\chi'\uparrow \circ y^{\mathscr{X}'}(\tau^{\wedge}) \circ \mathscr{X}\uparrow^{-1} = y^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![\chi'\uparrow \circ (\gamma' \circ y^{\Psi}(\tau) \cdot \gamma'^{-1}) \circ \chi'\uparrow^{-1} = y^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![(\chi' \circ \gamma' \circ y^{\Psi}(\tau) \circ \gamma'^{-1} \circ \chi'^{-1})\uparrow = y^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\tau \in R} [\![\gamma \circ y^{\Psi}(\tau) \circ \gamma^{-1}\uparrow = y^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})]\!] = 1$$

в силу определения $y^{\mathscr{X}}(\tau^{\wedge})$.

5.9. Категорный вариант 5.8, основанный на использовании множеств с B-метрикой, приведен в [14].

5.10. В заключение стоит отметить, что изложенные выше результаты частично анонсированы в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные проблемы математики, т.19. - М.: ВИНИТИ, 1982.
2. ЙЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. - М.: Мир, 1973.
3. МАНИН Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. - М.: Советское радио, 1979.
4. BELL J.L. Boolean-valued models and independence proofs in set theory. - Oxford: Clarendon Press, 1979.
5. TAKEUTI G., ZARING W. Axiomatic set theory. - Berlin a.o.: Springer, 1975.
6. TAKEUTI G. Two applications of logic to mathematics.- Tokyo: Iwanami, 1978.
7. SOLOVAY R., TENNENBAUM S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. - Ann. Math., 1973, v.94, N2, p.201-245.
8. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. - Новосибирск, 1982. - 42 с. (Препринт №5/ Институт математики СО АН СССР).
9. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств. - Сиб. мат. журн., 1983, т.29, №5, с.109-133.
10. ГОРДОН Е.И. К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах. - Сиб. мат. журн., 1982, т.23, №5, с.55-65.
11. ГОРДОН Е.И. K-пространства в булевозначных моделях теории множеств. - ДАН СССР, 1981, т.158, №4, с.777-780.
12. ГОРДОН Е.И., ЛЮБЕЦКИЙ В.А. Некоторые применения нестандартного анализа в теории булевозначных мер. - ДАН СССР, 1981, т.256, №5, с.1037-1041.
13. КУСРАЕВ А.Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей. - ДАН СССР, 1982, т.267, №5, с.1049-1052.
14. КУСРАЕВ А.Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа. - ДАН СССР, 1983, т.271, №2, с.283-286.
15. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Спуски и подъемы. - ДАН СССР, 1983, т.272, №3, с.521-524,

Поступила в ред.-изд. отдел

01.12.1983 г.