Выпуск 33(50) ОПТИМИЗАЦИЯ 1983 г.
Выпуклый анализ

УДК 517.98

О ПРОДОЛЖЕНИИ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Кусраев, Р.Неве

1°. Возможность мажорированного продолжения линейных операторов и функционалов составляет одно из основных средств выпуклого анализа. Выпуклость в самом широком смысле сама является постоянным источником теорем типа теоремы Хана – Банаха.

В настоящей работе изучается мажорированное продолжение выпуклых операторов. Демонстрируются два подхода: стандартный, основанный на обычной технике локального выпуклого анализа, и нестандартный, использующий метод булевозначных моделей теории множеств. Весь необходимый вспомогательный материал можно найти в [1-4].

2°. Всюду в этом параграфе X – вещественное векторное пространство, Y – некоторое K-пространство. Для подмножества $A\subset X$ символами $\mathrm{aff}(A)$ и $\mathrm{ri}(A)$ обозначим соответсвенно аффинную оболочку и относительную внутренность (см. [1,2]; в [3] вместо $\mathrm{ri}(A)$ пишут ${}^iA$). Отображение $f: X\to Y\cup\{\infty\}$ называют выпуклым, если выполнено неравенство Йенсена

$$f(\alpha x+\beta y)\le \alpha f(x)+\beta f(y),$$

каковы бы ни были $x,y\in X$ и $\alpha,\beta\in R,\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1$. Это неравенство нужно понимать в соответствии с правилами $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty,\ y+\infty=\infty+y=\infty, y\in Y\cup\{\infty\},\alpha>0$. Эффективное множество $\mathrm{dom}\,(f)$ оператора f определяется формулой

$$\mathrm{dom}\,(f)=\{x\in X: f(x)\in Y\}.$$

2.1. Будем заниматься следующей задачей. Пусть f, g — выпуклые операторы из X в $Y \cup \{\infty\}$, причем

$$g(x) \le f(x) \quad \forall x \in ri(dom(g)).$$

При каких условиях существует выпуклый оператор $g_1 : X \to Y \cup \cup \{+\infty\}$ такой, что

$$g_1(x) = g(x) \qquad \forall x \in ri(dom(g)),$$

$$g_1(x) \le f(x) \qquad \forall x \in X.$$

Если такой оператор g_1 существует, то говорят, что g допускает продолжение с $ri(dom(g))$ на X, мажорируемое оператором f.

2.2. Обозначим $A = dom(g)$. Для каждого фиксированного $x \in X$ положим

$$B_g(x) = \{(y, \alpha) \in ri(A) \times (0,1] : \alpha x + (1-\alpha) y \in A\}.$$

Легко заметить, что $B_g(x) \ne \emptyset$ в том и только в том случае, если $x \in aff(A)$ и $ri(A) \ne \emptyset$. Таким образом, если $dom(g)$ содержит более одной точки, то

$$aff(A) = \{x \in X : B_g(x) \ne \emptyset\}.$$

2.3. Для любых $x, y \in aff(A)$ и $\lambda \in [0,1]$ имеет место включение

$$B_g(\lambda x + (1-\lambda) y) \subset \lambda B_g(x) + (1-\lambda) B_g(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in aff(A)$, $\lambda \in [0,1]$, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ и $(y, \alpha) \in B_g(x)$. Положим $z = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ и заметим, что $z \in A$. Дальнейшие геометрические рассуждения имеют дело с плоскостью, натянутой на точки x_1, x_2 и y. Случай, когда плоскость вырождается в прямую, не разбираем отдельно ввиду его простоты.

Поскольку $y \in ri(A)$, то можно подобрать y_1 и $y_2 \in \in ri(A)$ так, чтобы $y \in]x_1, y_1[\cap]x_2, y_2[$, где

$$]a, b[= \{x \in X : x = \lambda a + (1-\lambda) b,\ 0 < \lambda < 1\},$$

и, кроме того, отрезки $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ параллельны. Возможны два случая: (I) существует $z_0 \in]x, y[$, для которого $]y, z_0[\subset ri(A)$ и $]z_0, x[\subset aff(A) \setminus A$; (2) не существует точки с указанными в (1) свойствами; в этом случае $x \in A$ и полагаем $z_0 = x$.

При таком выборе точки z_0 будем иметь

$$]y_2, z_0[\cup]y_1, z_0[\subset ri(A),$$

следовательно, существуют такие $z_i \in]y_i, z_0[, i=1,2$, что интервалы $]z_1, z_2[$ и $]x_1, x_2[$ параллельны, а кроме того $z \in]z_1, z_2[$. Но тогда $z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$, а точки z_1 и z_2 допускают представление

$$z_1 = \alpha_1 x_1 + (1-\alpha) y_1', \; z_2 = \alpha_2 x_2 + (1-\alpha) y_2'$$

при подходящих $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$ и $y_1', y_2' \in ri(A)$. Тем самым установлено требуемое.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть $g, f : X \longrightarrow Y \cup \{\infty\}$ - выпуклые операторы, причем $dom(f) = X$ и $ri(dom(g)) \neq \emptyset$. Тогда равносильны следующие утверждения:

(1) оператор g допускает продолжение с $ri(dom(g))$ на все X, мажорируемое оператором f;

(2) для любых $x \in aff(A)$ и $(y, \alpha) \in B_g(x)$ выполняется неравенство

$$g(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) g(y).$$

2.5. Докажем сначала теорему 2.4, предполагая, что $A = dom(g)$ - аффинное многообразие, т.е. $aff(A) = A$. В этом случае $dom(g) = ri(A)$, значит, $\partial g(x) \neq \emptyset$ для каждого $x \in A$ (см. [2,3]).

Предположим, что выполняется (2). Если $T_0 \in \partial g(x)$, то в силу (2) будет

$$T_0 y - T_0 x \le f(y) - g(x), \; y \in aff(A).$$

Далее, из теоремы Хана - Банаха - Канторовича можно вывести, что последнее неравенство выполняется на всем X для некоторого линейного оператора $T_x : X \longrightarrow Y$, т.е. $T_x \in \partial(f(\cdot) - g(x))(x)$. Положим

$$\mathcal{L} = \cup \{\partial(f(\cdot) - g(x))(x) : x \in aff(A)\},$$

$$h(y)=\sup\{T(y-x)+g(x):T\in\mathcal{L}\}.$$

Тогда $h:X\to Y\cup\{\infty\}$ - выпуклый оператор, причем $h(y)\le\le f(y)$ для всех $y\in X$. С другой стороны, легко видеть, что $h(x)=g(x)$ при $x\in \operatorname{aff}(A)$.

Импликация (I) $\Longrightarrow$ (2) очевидна.

2.6. Доказательство теоремы 2.4.

(I) $\Longrightarrow$ (2). Полагая $y\in ri(A)$ и $\alpha x+(1-\alpha)y\in A$ в неравенстве Йенсена $h(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha h(x)+(1-\alpha)h(y)$, получим

$$g(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha h(x)+(1-\alpha)T_0 y\le\alpha f(x)+(1-\alpha)g(y).$$

(2) $\Longrightarrow$ (I). Для каждого $x\in \operatorname{aff}(A)$ положим

$$g_1(x)=\sup\{\tfrac{1}{\alpha}[g(\alpha x+(1-\alpha)y)-(1-\alpha)g(y)]:(y,\alpha)\in B_g(x)\}.$$

Из (2) вытекает тогда, что

$$g_1(x)\le f(x)\qquad (x\in \operatorname{aff}(A)).$$

Если $x_1,x_2\in \operatorname{aff}(A)$ и $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda\in[0,1]$, то ввиду (2.3) и выпуклости g будет

$$g_1(x)=\sup_{(y,\alpha)\in B_g(x)}\{\tfrac{1}{\alpha}[g(\alpha[\lambda x_1+(1-\alpha)x_2]+(1-\alpha)y)-(1-\alpha)g(y)]\}\le$$

$$\le\sup_{(y,\alpha)\in\lambda B_g(x)+(1-\alpha)B_g(x_2)}\{\tfrac{1}{\alpha}[g(\lambda[\alpha x_1+(1-\alpha)y]+(1-\alpha)[\alpha x_1+(1-\alpha)y])-$$

$$-(1-\alpha)g(y)]\}\le\lambda\sup_{(y,\alpha)\in B_g(x_1)}\{\tfrac{1}{\alpha}[g(\alpha x_1+(1-\alpha)y)-(1-\alpha)g(y)]\}+$$

$$+(1-\alpha)\sup_{(y,\alpha)\in B_g(x_2)}\{\tfrac{1}{\alpha}[g(\alpha x_2+(1-\alpha)y)-(1-\alpha)g(y)]\}=\lambda g_1(x_1)+(1-\alpha)g_1(x_2).$$

Следовательно, доопределив g_1 значением ∞ вне $\operatorname{aff}(A)$, получим выпуклый оператор из X в $Y\cup\{\infty\}$. Этот оператор обозначим также через g_1. Для $x\in A$ и $y\in ri(A)$ имеем $(y,1)\in B_g(x)$. С другой стороны,

$$g(x) \geq \frac{1}{\alpha}[g(\alpha x+(1-\alpha)y)-(1-\alpha)g(y)] \ ((y,\alpha)\in B_g(x)).$$

Таким образом,

$$g(x) \geq \sup_{(y,\alpha)\in B_g(x)} \{\frac{1}{\alpha}[g(\alpha x+(1-\alpha)y)-$$

$$-(1-\alpha)g(y)]\} = g_1(x) \geq g(x)$$

и окончательно $g(x)=g_1(x)$ при $x\in aff(A)$. Осталось сослаться на 2.5.

2.7. ЗАМЕЧАНИЯ. (I) Утверждение 2.5 доказано для функционалов в [7] несколько иным способом.

(2) В [6] приведены необходимые и достаточные условия, при которых выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве, имеет конечное выпуклое продолжение на все пространство. Эти условия существенно отличаются от 2.4.(2), поскольку в теореме 2.4 речь идет не просто о конечном продолжении выпуклого оператора, а также о сохранении мажорированности при таком продолжении.

3. Рассмотрим теперь нестандартный подход к проблеме продолжения выпуклых операторов. Покажем, что эта проблема редуцируется к аналогичной проблеме для выпуклых числовых функций, используя метод булевозначных моделей.

3.I. Пусть Y - некоторое K-пространство и обозначим символом $P_r(Y)$ булеву алгебру проекторов на всевозможные компоненты в Y. В множестве $Y\times P_r(Y)$ введем отношение эквивалентности:

$$(y_1,\pi_1)\sim(y_2,\pi_2) \Longleftrightarrow \pi_1=\pi_2 \ \& \ \pi_1^d y_1=\pi_2^d y_2,$$

где $y_1,y_2\in Y$ и $\pi_1,\pi_2\in P_r(Y)$. Пусть $Y^{\cdot}$ - ассоциированное фактор-пространство, т.е. $Y^{\cdot}=Y\times P_{\sigma}(Y)/\sim$. В множестве $Y^{\cdot}$ можно определить сложение, умножение на неотрицательные числа и отношение порядка посредством формул

$$(y_1,\pi_1)+(y_2,\pi_2)=(y_1+y_2,\pi_1\vee\pi_2);$$

$$\lambda(y,\pi)=(\lambda y,\pi);$$

$$(y_1,\pi_1)\leq(y_2,\pi_2) \Longleftrightarrow \pi_1\leq\pi_2 \ \& \ \pi_2^d y_1\leq\pi_2^d y_2.$$

Положим по определению $\infty=\{(y, I_Y): y\in Y\}$. Ясно, что ∞ – наибольший элемент упорядоченного множества $Y^{\bullet}$. Поскольку класс эквивалентности элемента $(y, 0)$ есть $\{(y,0)\}$, то отображение $y\to\{(y,0)\}, y\in Y$, есть инъективное вложение Y в $Y^{\bullet}$, сохраняющее алгебраические операции и порядок. В дальнейшем Y отождествляем со своим образом в $Y^{\bullet}$ при указанном вложении и считаем $Y\subset Y^{\bullet}$. Помимо "глобальной бесконечности" $\infty\in Y^{\bullet}$ имеются в $Y^{\bullet}$ также и "локальные бесконечности" $\pi\infty=\{(y,\pi): \pi y=0\}$ по одному для каждого $I_Y\neq\pi\in P_r(Y)$. Если $Y^{\infty}=\{\pi\infty : \pi\in P_r(Y)\}$, то $Y\cap Y^{\infty}=\{0\}$ и всякий элемент $z\in Y^{\bullet}$ допускает (не единственное, вообще говоря) представление в виде $z=y+\pi\infty$, где $y\in Y$ и $\pi\in P_r(Y)$. Это представление единственно, если $\pi y=0$; в этом случае пишем $z=y_\pi$. Отметим следующие правила оперирования с бесконечностями:

$$\pi_1\infty+\pi_2\infty=(\pi_1\vee\pi_2)\infty;\quad y+\pi\infty=(\pi^d y)_\pi;$$

$$\pi\infty+\pi^d\infty=\infty;\qquad 0\cdot y_\pi=\pi\infty;$$

где $y, y_1, y_2\in Y$ и $\pi,\pi_1,\pi_2\in P_r(Y)$.

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть Y – некоторое K-пространство. Тогда $Y^{\bullet}$ – условно порядково полный упорядоченный полулинеал. Более подробно, $Y^{\bullet}$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $(Y^{\bullet},+)$ есть абелева полугруппа;

(2) $(Y^{\bullet},\leq)$ есть упорядоченное множество, причем из $x\leq y$ следует, что $x+z\leq y+z$ и $\lambda x\leq\lambda y$, каковы бы ни были $x, y, z\in Y^{\bullet}$ и $\lambda\geq 0$;

(3) если множество $A=(y^{\xi}_{\pi_\xi})$ ограничено в $Y^{\bullet}$, то существуют точные границы A, причем

$$\sup(A)=\sup(y_\xi)+(\sup(\pi_\xi))\infty;$$
$$\inf(A)=\inf(y^\xi)+(\inf(\pi_\xi))\cdot\infty;$$

(4) если $\lambda, \mu \in R^+$ и $x, y \in Y^\cdot$, то

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y; \ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x;$$

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x; \ 1x = x \cdot 1 = x.$$

Доказательство, использующее лишь элементарные свойства пространства Y и булевой алгебры $P_{\gamma}(Y)$, опускаем.

3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если K-пространство одномерно, то оно изоморфно полю вещественных чисел R. Поскольку $P_{\gamma}(R) = \{0, I_R\}$, то $R^\cdot = R \cup \{\infty\}$. В наших обозначениях $Y^\cdot \neq Y \cup \{\infty\}$, если Y более чем одномерно. Однако в литературе часто встречается обозначение $Y^\cdot$ для множества $Y \cup \{\infty\}$ (см. [1,2]).

3.4. Приведем краткий перечень понятий теории булевозначных моделей, используемых ниже. Подробности можно найти в [3,8].

Пусть B – фиксированная полная булева алгебра с нулем 0_B и I_B, решеточные операции и дополнение которой будем обозначать так же, как и логические связки $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Будем работать с булевозначной моделью теории множеств, состоящей из класса $V^{(B)}$, называемого булевозначным универсумом, и отображений $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ из $V^{(B)} \times V^{(B)}$ в B, называемых булевыми оценками равенства и включения соответственно. Исходя из этих отображений, для любой формулы теории множеств $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ определяется оценка $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \in B$ при любых $x_1, \ldots, x_n \in V^{(B)}$. Говорят, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ истинна внутри $V^{(B)}$, и пишут $V^{(B)} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] = 1_B$. Основной факт о булевозначных моделях состоит в том, что внутри $V^{(B)}$ истинна любая теорема теории множеств Цермело – Френкеля с аксиомой выбора ZFC.

Существует естественное вложение $x \longmapsto x^\vee$ класса всех множеств V в булевозначный универсум $V^{(B)}$. При этом, если $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ – формула с ограниченными кванторами (т.е. с кванторами вида $\forall u \in v, \exists u \in v$), то для любых $x_1, \ldots, x_n \in V$ будет

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow V^{(B)} \models \varphi(x_1^\vee, \ldots, x_n^\vee).$$

Пусть $X \in V^{(B)}$ – такой элемент, что $[\![X \neq \emptyset]\!] = 1_B$. Тогда $X\!\downarrow = \{x \in X : [\![x \in X]\!] = 1_B\}$ есть непустое множество, называемое спуском X. Если же Y, $f \in V^{(B)}$ обладают свойствами $[\![Y \neq \emptyset]\!] = 1_B$ и $[\![f : X \to Y]\!] = 1_B$, то существует единственное отображение $f\downarrow : X\downarrow \to Y\downarrow$ такое, что

$$[\![f\downarrow(x) = f(x)]\!] = 1_B \qquad (x \in X\downarrow).$$

Отображение $f\downarrow$ называют спуском f. Спуском алгебраической системы называется система, полученная путем спуска основного множества, операций и отношений на основном множестве.

3.5. ТЕОРЕМА. (I) Пусть элементы $\mathcal{R}, \infty$ и $\mathcal{R}^{\cdot} \in V^{(B)}$ таковы, что $V^{(B)} \models$ " $\mathcal{R}$ - поле вещественных чисел и $\mathcal{R}^{\cdot} = \mathcal{R} \cup \{\infty\}$". Тогда $\mathcal{R}\downarrow$ - расширенное K-пространство, $\mathcal{R}^{\cdot}\downarrow$ - условно порядково полный упорядоченный полулинеал, изоморфный полулинеалу $\mathcal{R}\downarrow^{\cdot}$. При этом существует изоморфизм $i : B \to \mathcal{R}\downarrow^{\infty}$ такой, что $[\![i(b) = \infty]\!] = b$ для каждого $b \in B$.

(2) Пусть Y - такое расширенное K-пространство, что алгебра $P_{\gamma}(Y)$ изоморфна B. Пусть $\mathcal{R}, \infty$ и $\mathcal{R}^{\cdot}$ те же, что и в (I). Тогда полулинеалы $Y^{\cdot}$ и $\mathcal{R}^{\cdot}\downarrow$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Тот факт, что $\mathcal{R}\downarrow$ - расширенное K-пространство, установлен в [9].

Рассмотрим двухэлементную булеву алгебру $\{0, \infty\}^{(B)} \in V^{(B)}$ внутри $V^{(B)}$. Спуск $\{0, \infty\}^{(B)}\downarrow$ этой алгебры есть полная булева алгебра, изоморфная B. Изоморфизм $i : B \to \{0, \infty\}^{(B)}\downarrow$ определяется равенствами

$$[\![i(b) = \infty]\!] = b, \quad [\![i(b) = 0]\!] = \neg b \qquad (b \in B).$$

По аналогичным соображениям существует j из B на алгебру проекторов $P_{\gamma}(\mathcal{R}\downarrow)$.

Допустим теперь, что $x \in \mathcal{R}^{\cdot}\downarrow$. Тогда

$$1_B = [\![x \in \mathcal{R} \vee x = \infty]\!] = [\![x \in \mathcal{R}]\!] \vee [\![x = \infty]\!].$$

С другой стороны,

$$0_B = [\![x \in \mathcal{R} \,\&\, x = \infty]\!] = [\![x = \infty]\!] \wedge [\![x \in \mathcal{R}]\!],$$

следовательно, x есть перемешивание элемента ∞ и некоторого $y \in \mathcal{R}\downarrow$ с весами $b = [\![x = \infty]\!]$ и $\neg b = [\![x \in \mathcal{R}\downarrow]\!]$ соответственно. Сопоставим x элемент $y + j(b)\infty$ полулинеала $\mathcal{R}\downarrow^{\cdot}$. Нетрудно проверить, что такое сопоставление есть искомый изоморфизм.

(2) Ввиду установленного в (I), утверждение (2) достаточно обосновать для пространства Y вместо полулинеала $Y^{\cdot}$. Однако расширенное K – пространство является модулем над самим собой и требуемое можно извлечь, например, из [I0].

3.6. Пусть X – некоторое множество, а элемент $Y \in V^{(B)}$ таков, что $[\![Y \neq \varnothing]\!] = 1$. Рассмотрим отображение $f : X \to Y\downarrow$. Обозначим символом $f\uparrow$ единственный элемент из $V^{(B)}$, удовлетворяющий соотношениям

$$[\![f\uparrow : X^{\vee} \to Y]\!] = 1_B,$$

$$[\![f\uparrow(x^{\vee}) = f(x)]\!] = 1_B, \qquad x \in X.$$

Предположим теперь, что $g \in V^{(B)}$ и выполнено условие $V^{(B)} \models g : X^{\vee} \to Y$. Тогда существует единственное отображение $g\downarrow$ из X в $Y\downarrow$ такое, что

$$[\![g\downarrow(x) = g(x^{\vee})]\!] = 1_B, \quad x \in X.$$

Имеют место следующие правила сокращения стрелок:

$$f\uparrow\downarrow = f, \quad g\downarrow\uparrow = g.$$

Результаты этого пункта и теорема 3.5 сводят изучение отображений со значениями в $Y^{\cdot}$, где Y – расширенное K-пространство, к изучению $\mathcal{R}^{\cdot}$-значных отображений внутри $V^{(B)}$.

3.7. Пусть Y – некоторое K-пространство, а X – векторное пространство над подполем P поля вещественных чисел R. Отображение $f : X \to Y^{\cdot}$ называется P-выпуклым, если выполнено неравенство Йенсена

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y),$$

каковы бы ни были $x, y \in X$ и $\alpha, \beta \in P, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Неравенство нужно понимать в соответствии с упорядочением полулинеала $Y^{\cdot}$ (см. 3.I). Говорят, что отображение g мажорируется отображением f на множестве $A \subset X$, если $g|A \leq f|A$.

3.8. ТЕОРЕМА. Пусть X – вещественное векторное пространство, A – подмножество X и f – отображение из X в $\mathcal{R}^{\cdot}$, где $\mathcal{R} \in V^{(B)}$ и $V^{(B)} \models$ " $\mathcal{R}$ – поле вещественных чисел". Обозначим $\mathcal{P} = R^{\vee}$. Тогда справедливы утверждения:

(I) $V^{(B)} \models$ " $\mathcal{P}$ – плотное подполе поля $\mathcal{R}$, а $X^{\vee}$ – векторное пространство над полем $\mathcal{P}$ ";

(2) отображение f есть выпуклый оператор в том и только в том случае, если $V^{(B)} \models$ " $f\uparrow : X \to \mathcal{R}^{\cdot}$ – $\mathcal{P}$-выпуклая функция";

(3) если g – отображение из X в $\mathcal{R}^{\cdot}$, то g мажорируется оператором f на множестве A в том и только в том случае, если $V^{(B)} \models$ " $g\uparrow$ мажорируется функцией $f\uparrow$ на множестве $A^{\vee}$ ";

(4) оператор f является сублинейным (соответственно линейным, аффинным, всюду определенным) в том и только в том случае, если $V^{(B)} \models$ " $f\uparrow$ – сублинейная (соответственно линейная, аффинная, всюду определенная) функция".

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) следует из того, что утверждение " R – архимедово упорядоченное поле и X – векторное пространство над R " записывается ограниченной формулой. Полагая $\mathcal{P} = R^{\vee}$, получим $V^{(B)} \models$ " $\mathcal{P}$ – архимедово упорядоченное плотное поле", поэтому можно считать, что $V^{(B)} \models$ " $\mathcal{P}$ – плотное подполе поля $\mathcal{R}$ ".

(2) Сосчитаем булеву оценку $b = [\![f\uparrow$ есть $\mathcal{P}$-выпуклая функция $]\!]$. Несложно проверяется справедливость цепочки:

$$b = [\![\forall x \in X^{\vee} \forall y \in X^{\vee} \forall \alpha \in R^{\vee} \forall \beta \in R^{\vee} (\alpha \geq 0^{\vee} \,\&\, \beta \geq$$

$$\geq 0^{\vee} \,\&\, \alpha + \beta = 1^{\vee} \quad f\uparrow(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f\uparrow(x) + \beta f\uparrow(y)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{\substack{x,y\in X\\ \alpha,\beta\in R}} [\![\alpha^\vee \geq 0^\vee]\!] \wedge [\![\beta^\vee \geq 0^\vee]\!] \wedge [\![\alpha^\vee + \beta^\vee = 1^\vee]\!] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\![f\uparrow((\alpha x+\beta y)^\vee) \leq \alpha^\vee f\uparrow(x^\vee) + \beta^\vee f\uparrow(y^\vee)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x,y\in X} \bigwedge_{\substack{\alpha,\beta\in R^+\\ \alpha+\beta=1}} [\![f(\alpha x+\beta y) \leq \alpha^\vee f(x) + \beta^\vee f(y)]\!].$$

Отсюда видно, что $b = 1_B$ в том и только в том случае, если

$$[\![f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)]\!] = 1_B,$$

каковы бы ни были $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta=1$. Последнее же равносильно выпуклости f.

(3) если $g : X \to \mathcal{R}^\cdot$, то

$$[\![g\uparrow\upharpoonright A^\vee \leq f\uparrow\upharpoonright A^\vee]\!] = [\![\forall x \in A^\vee\ g\uparrow(x) \leq f\uparrow(x)]\!] =$$

$$= \bigwedge_{x\in A} [\![g\uparrow(x) = f\uparrow(x)]\!] = \bigwedge_{x\in A} [\![g(x) \leq f(x)]\!].$$

Отсюда немедленно вытекает требуемое.

(4) Это устанавливается аналогичными вычислениями.

3.9. ЗАМЕЧАНИЕ. (I) Субдифференциал $\partial f(x)$ выпуклого оператора $f : X \to Y^\cdot$ в точке x определяется, как обычно, соотношением

$$\partial f(x) = \{T \in L(X,Y) : \forall h \in X [T(h-x) \leq f(h) - f(x)]\},$$

где $L(X,Y)$ – пространство всех линейных операторов из X в Y (см. [2,4]). Можно показать, что если $Y^\cdot = \mathcal{R}^\cdot\uparrow$, то

$$T \in \partial f(x) \leftrightarrow V^{(B)} \models T\uparrow \in \partial(f\uparrow)(x^\vee).$$

Таким образом, результаты данного параграфа намечают также нестандартный подход к субдифференцированию выпуклых операторов вектор-функций.

(2) Теорема 3.8 применяется к задаче о продолжении выпуклых операторов по такой схеме. Допустим, что $f, g : X \to \mathcal{R}^\cdot$ – выпуклые операторы, $A = ri(dom(g))$ и $g\upharpoonright A \leq f\upharpoonright A$. Тогда по 3.8.(2) $g\uparrow$ и $f\uparrow$ – $\mathcal{P}$-выпуклые функции, а по 3.8.(4) $g\uparrow$ мажорируется функцией $f\uparrow$ на $A^\vee$. Предположим, что $g\uparrow$ допускает продолжение h с A на все X с сохранением

выпуклости и мажорируемости. Тогда $h\dagger : X \to \mathcal{R}^{\cdot}\dagger$ – выпуклый оператор, продолжающий g с A на X и мажорируемый оператором f на всем X.

ЛИТЕРАТУРА

1. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
2. КУСРАЕВ А.Г., КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Локальный выпуклый анализ.– В кн.:Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т.19, с.155–206.
3. ELSTER K.-H., NEHZE R. Konjugierte Operatoren und Subdifferentiale.– Math. Operat. und Statist., 1975, v.6,N4, p.641–657.
4. ЙЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. – М.: Мир, 1973.
5. NEHSE R. A new concept of separation. – Comment. Math.Univ. Carolinae, 1981,v.22, N1, p.169–179.
6. SCHOLZ K., SCHWARTZ B. Finite extensions of convex functions. – Math. Operat. und Statist. Ser. Optimization,1979, v.10, N4, p.501–509.
7. VALENTINE F.A. Convex sets.-Mcgraw-Hill,N.Y a.o, 1964.
8. КУСРАЕВ А.Г. Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. – Новосибирск, 1982.
9. ГОРДОН Е.И. Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K –пространства. – Докл. АН СССР, 1977, т.237, №4, с.773–775.
10. КУСРАЕВ А.Г. Булевозначный анализ двойственности расширенных модулей. – Докл. АН СССР, 1982, т.267, №5, с.1049–1052.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.10.1983 г.